Exercice 1

On considère l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni des lois usuelles, étudier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels :

1. $\mathcal{F}_0 = \{f; \quad f(0) = 0\}$;
2. $\mathcal{C}_1 = \{f; \quad f \quad \text{continue et croissante}\}$;
3. $I = \{f; \quad f \quad \text{continue et} \quad \int_0^1 f(t)dt = 0\}$.

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites de nombres réels muni des lois usuelles. L'ensemble $\mathcal{B}$ des suites bornées en est-il un sous-espace vectoriel ?

Exercice 2

On considère pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + X^{2^k}\right)$$

Calculer les coefficients de ce polynôme.

Exercice 3

1. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
2. En déduire une factorisation du polynôme $P = X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1

On considère l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni des lois usuelles, étudier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels :

1. $\mathcal{F}_{0,1} = \{f; \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 0\}$;
2. $\mathcal{D}_2 = \{f; \quad f \quad \text{deux fois dérivable et} \quad f'' + f = 0\}$;
3. $\mathcal{E} = \{f; \quad f \quad \text{continue et} \quad \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = I\}$, avec $I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites de nombres réels muni des lois usuelles. L'ensemble $\mathcal{C}_0$ des suites qui convergent vers 0 en est-il un sous-espace vectoriel ?

Exercice 2

Déterminer l'unique polynôme P_n tel que $P_n - P_n' = \dfrac{1}{n!}X^n$.

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$.
2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ et $z_k = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right)$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ alors :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(z_k^2 - 2z_k\cos\theta + 1\right) = 2\left(1 - \cos n\theta\right)$$

Exercice 1

On considère l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni des lois usuelles, étudier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels :

1. $\mathcal{F}_1 = \{f; \quad f(0) = 1\}$;
2. $\mathcal{B} = \{f; f \quad \text{bornée}\}$.

On considère maintenant l'espace $\mathbb{R}^3$. L'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites de nombres réels muni des lois usuelles. L'ensemble $\mathcal{C}$ des suites convergentes en est-il un sous-espace vectoriel ?

Exercice 2

Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1. Déterminer le degré de P.
2. Montrer que P possède au moins deux racines entières et donner leur ordre de multiplicité.
3. Démontrer que P est divisible par $X - j$.
4. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3

1. Soit θ un nombre réel appartenant à $[0, 2\pi[$. Déterminer le module du nombre complexe $\alpha = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$.
2. Déterminer les nombres complexes z tels que z, $1 + z$ et $\dfrac{1}{z}$ aient le même module.