Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. La famille $\mathcal{F} = (e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1} - e_n, e_n - e_1)$ est-elle libre dans E ?

Exercice 2

On note dans $\mathbb{K}^d$, $e_k = (1, 1, \ldots, 1, k, 1, \ldots, 1)$ où l'entier k se trouve à la k-ième place pour $1 \leq k \leq d$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ est une base de $\mathbb{K}^d$.
2. Soit $v = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d$. Déterminer les composantes de v dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F, F', G, H quatre sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset H$ et $E = F \oplus F'$.

1. Montrer que $H = F \oplus (H \cap F')$.
2. Montrer que $(F + G) \cap H = F + (G \cap H)$.

Exercice 1

1. Si $(P_1, \ldots, P_n)$ est une famille de n polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré (ie $\deg P_1 < \deg P_2 < \ldots < \deg P_n$). Montrer que cette famille est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Si $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = X + 1$, $P_3(X) = (X+2)^2$ et $P_4(X) = (X+3)^3$, montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2

Montrer que toute sous-famille finie de la famille des applications $f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ par $f_\alpha(x) = |x - \alpha|$ est une famille libre.

Exercice 3

Soient S et S' deux systèmes de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que :

$$\max\{rg(S), rg(S')\} \leq rg(S \cup S') \leq rg(S) + rg(S')$$

Exercice 1

Montrer que si (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$ alors $(a+b+c, a+b, 2a+b-c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère les quatre vecteurs : $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 2, 4)$, $v_3 = (3, -1, a)$ et $v_4 = (2, 3, b)$. Déterminer a et b de telle sorte que $Vect(v_1, v_2) = Vect(v_3, v_4)$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère $f_1 : x \longmapsto x^2 + x - 1$, $f_2 : x \longmapsto \cos x$, $f_3 : x \longmapsto e^x$, $f_4 : x \longmapsto 2x$ et $f_5 : x \longmapsto x^2 + 1$.

1. Montrer que $Vect(f_1, f_4, f_5) = \mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que $Vect(f_1, f_4, f_5) + Vect(f_2, f_3) = Vect(f_1, f_4, f_5) \oplus Vect(f_2, f_3)$.