Exercice 1

On considère :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x+2y, z-x, x+4y+z) \end{aligned}$$

Montrer que f est une application linéaire.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la famille $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ des polynômes définis par : $P_i = (X-a)^i(X-b)^{n-i}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont distincts. Montrer que cette famille est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère : $x = (2-\lambda, -3, 2)$, $y = (-4, 1-\lambda, 6)$ et $z = (-2, -1, 6-\lambda)$. Déterminer, en fonction de λ, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\{x, y, z\}$.

Exercice 1

On considère pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto P(\alpha) \end{aligned}$$

Montrer que f est une application linéaire.

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, montrer que les fonctions : $x \longmapsto e^x$, $x \longmapsto e^{2x}$, …, $x \longmapsto e^{nx}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ forment une famille libre.

Exercice 3

Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x - y + z = 0\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Trouver une base de H.
3. Déterminer deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de H.

ophelie.rouby@ens-cachan.org

Exercice 1

On considère pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixés distincts et $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_1[X] \\ P &\longmapsto P(\alpha)X + P(\beta) \end{aligned}$$

Montrer que f est une application linéaire.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre de vecteurs de E et soit $y \in E$. Montrer que $(x_1, \ldots, x_p, y)$ est une famille liée si et seulement si $y \in Vect(x_1, \ldots, x_p)$.

Exercice 3

Soit E l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = axe^{2x} + be^{2x} + cxe^{-2x} + de^{-2x}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E.