Exercice 1

Soit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (y-z, -3x+4y-3z, y-x). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer sa matrice M dans la base canonique.
3. Vérifier que $M^2 - 3M + 2I_3 = 0$. Que peut-on en déduire ?
4. Soient $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (1,3,1)$. Montrer que $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et exprimer les $f(e_i)$ pour $i = 1,2,3$ comme une combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -f$.
Montrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On considère deux systèmes de vecteurs $S = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $S' = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ extrait de S.
En utilisant le théorème de la base incomplète, montrer que si $\operatorname{rg}(S) = r$ alors $\operatorname{rg}(S') \geq r + p - n$.

Exercice 1

Soit :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (y - z, x + y - 2z, y - x).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer sa matrice M dans la base canonique et vérifier que $M^3 = aM^2 + bM$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont à préciser. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 2

Soient f, g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que :
   (a) $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} v - \dim(\operatorname{Im} v \cap \ker u)$;
   (b) $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} u - \dim E + \dim(\operatorname{Im} v + \ker u)$.
2. En déduire que :
$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim E \leq \operatorname{rg}(u \circ v) \leq \inf(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v).$$

Exercice 1

On considère $e_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, -1, 1, 1)$ et $e_3 = (1, 1, -1, 1)$.

1. Déterminer l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que $f(i) = e_1$, $f(j) = e_2$ et $f(k) = e_3$ où (i, j, k) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le rang de f et caractériser les vecteurs de l'image de f.
3. f est-elle injective ?

Exercice 2

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\ker f \subset \ker(f \circ g)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $(p+1)n$ avec $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0$ et $\mathrm{rg}\, f = pn$.
Montrer que $\mathrm{rg}(f^2) = n$.