Exercice 1

1. Déterminer la limite suivante, en effectuant un développement limité :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2}.$$

2. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x)$ dans les cas suivants :
   (a) $f(x) = \ln(2 + \sin(2x))$;
   (b) $f(x) = \sqrt{3 + \sqrt{1 + 8x^2}}$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p, q deux projecteurs de E.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $p + q$ est un projecteur ;
   (b) $p \circ q = -q \circ p$;
   (c) $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. On suppose que $p + q$ est un projecteur. Montrer que :

$$\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q.$$

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On considère deux systèmes de vecteurs $S = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $S' = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ extrait de S.
En utilisant le théorème de la base incomplète, montrer que si $\mathrm{rg}(S) = r$ alors $\mathrm{rg}(S') \geq r + p - n$.

Exercice 1

1. Déterminer la limite suivante, en effectuant un développement limité :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} |\tan x|^x.$$

2. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x)$ dans les cas suivants :
   (a) $f(x) = \sqrt{1 + 3\cos(4x)}$;
   (b) $f(x) = \arctan(e^{2x})$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(v) = 1$ et $u + v = id_E$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v = E$.
2. Montrer que u et v sont des projecteurs de E.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que :
   (a) $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} v - \dim(\operatorname{Im} v \cap \ker u)$;
   (b) $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} u - \dim E + \dim(\operatorname{Im} v + \ker u)$.
2. En déduire que :

$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim E \leq \operatorname{rg}(u \circ v) \leq \inf(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v).$$

Exercice 1

1. Déterminer la limite suivante, en effectuant un développement limité :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}.$$

2. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x)$ dans les cas suivants :
   (a) $f(x) = e^{\cos(2x)}$;
   (b) $f(x) = \arctan \dfrac{x+1}{3x+1}$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ définie pour $u = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ par $f(u) = (x_1, x_1+x_2, \ldots, x_1+x_2+\ldots+x_d)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^d$.
2. Résoudre $f(u) = v$ et en déduire que f est bijective. Exprimer $f^{-1}(v)$.
3. Déterminer $\ker(f - id)$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $(p+1)n$ avec $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0$ et $\mathrm{rg}\, f = pn$.
Montrer que $\mathrm{rg}(f^2) = n$.