Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad f(x) = \frac{2^x - x^2}{x-2}.$$

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 2, noté g, et étudier la dérivabilité de g en 2.
2. Déterminer la position, au voisinage de $(2, g(2))$ de la représentation graphique $\mathcal{C}$ de g par rapport à la tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

Exercice 2

1. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que h n'a pas de limite en 0 en considérant la suite $u_n = \frac{1}{n\pi}$.
2. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,; \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

   est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Calculer $f'(x)$ et montrer que f' n'est pas dérivable en 0.
   Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Exercice 3

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et impaire.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire la valeur de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 1

Soit ϕ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On note G et F les applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = \int_0^x e^t \phi(t)dt \quad F(x) = \frac{1}{e^x - 1} G(x).$$

1. Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer un développement limité de G au voisinage de 0 à l'ordre 2. En déduire le développement limité de F au voisinage de 0 à l'ordre 1 :
$$F(x) = \phi(0) + \frac{x}{2}\phi'(0) + o(x).$$
3. En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F la fonction prolongée. Montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.

Exercice 2

1. Calculer la fonction dérivée de $f : x \longmapsto e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$u_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$
Montrer que $u_n - e \in \left]-\frac{1}{n!}, 0\right[$.
3. En déduire la valeur de :
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur l'intervalle $]-1,1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - (f(x))^2$.
3. Montrer que g est dérivable sur I et calculer $g'(y)$ pour $y \in I$:
   (a) en utilisant le théorème sur la dérivée d'une réciproque ;
   (b) en explicitant $g(y)$.

Exercice 2

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(x) = (e^x - 1)^m$.

1. Montrer que $f(x) = x^m + o(x^m)$.
2. Développer $(e^x - 1)^m$ à l'aide de la formule du binôme du Newton, puis obtenir ainsi une nouvelle expression du développement limité à l'ordre m à l'origine de la fonction f.
3. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq m-1\,; \\ m! & \text{si } j = m. \end{cases}$$

Exercice 3

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$.

1. Montrer que $P(x) = (x+1)(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})$ et en déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction définie par $f(x) = e^x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x}{3}$. Montrer que f atteint un minimum absolu en un point $\alpha < -1$. Exprimer e^α en fonction de α^2, puis en déduire $f(\alpha)$ en fonction de $P(\alpha)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x}{3}$.