Exercice 1

1. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que h n'a pas de limite en 0 en considérant la suite $u_n = \dfrac{1}{n\pi}$.
2. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,; \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

   est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Calculer $f'(x)$ et montrer que f' n'est pas dérivable en 0.
   Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x^n e^x = 1$ possède une unique solution positive notée x_n.
2. Vérifier que $x_n = e^{-x_n/n}$. En déduire la limite de x_n quand $n \longrightarrow +\infty$.
3. Étudier la convergence de la suite $(y_n)_n$ définie par : $y_n = n(x_n - 1)$.

Exercice 3

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et impaire.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire la valeur de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 1

1. Calculer la fonction dérivée de $f : x \longmapsto e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

   Montrer que $u_n - e \in \left]-\frac{1}{n!}, 0\right[$.
3. En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Exercice 2

Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. On note pour $i \in \{0,2\}$:

$$M_i = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f^{(i)}(t)|.$$

1. En appliquant l'inégalité de Taylor sur le segment $[x, x+1]$ pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, montrer que f' est bornée. On note :

$$M_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)|.$$

2. (a) En procédant de même sur tout segment $[x, x+h]$ avec $h > 0$, montrer que pour tout $h > 0$:

$$M_1 \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

   (b) En déduire que $M_1^2 \leq 4M_0M_2$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-2x}} \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(x) = (e^x - 1)^m$.

1. Montrer que $f(x) = x^m + o(x^m)$.
2. Développer $(e^x - 1)^m$ à l'aide de la formule du binôme du Newton, puis obtenir ainsi une nouvelle expression du développement limité à l'ordre m à l'origine de la fonction f.
3. En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq m-1\,; \\ m! & \text{si } j = m. \end{cases}$$

Exercice 2

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$.

1. Montrer que $P(x) = (x+1)(x - 2 + \sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2})$ et en déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction définie par $f(x) = e^x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x}{3}$. Montrer que f atteint un minimum absolu en un point $\alpha < -1$. Exprimer e^α en fonction de α^2, puis en déduire $f(\alpha)$ en fonction de $P(\alpha)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x}{3}$.

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \forall x \in \mathbb{R}_+, \\ e^x + 1 & \forall x \in \mathbb{R}_-^*. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.