Les exercices sont à traiter dans l'ordre.

Exercice 1 Question de cours

Énoncer le théorème de la bijection.

Exercice 2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On considère le polynôme $P_\lambda = X^3 + \lambda X - 1$.

1. Montrer que ce polynôme admet un unique zéro réel, noté $u(\lambda)$.
2. Montrer que la fonction $u : \lambda \longrightarrow u(\lambda)$ est décroissante pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $\forall \lambda > 0$, on a : $u(\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$ et en déduire que :
$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} u(\lambda) = 0.$$
4. (a) Montrer que u est bornée.
   (b) Montrer que pour $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$, on a :
   $$(u(\lambda) - u(\lambda_0)) \left(u(\lambda)^2 + u(\lambda)u(\lambda_0) + u(\lambda_0)^2 + \lambda\right) + (\lambda - \lambda_0)\, u(\lambda_0) = 0.$$
   (c) Montrer que u est continue sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $u'(\lambda)$ en fonction de $u(\lambda)$.
6. Montrer que u est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]0, 1]$.

Les exercices sont à traiter dans l'ordre.

Exercice 1 Question de cours

Rappeler la méthode d'étude d'une suite récurrente.

Exercice 2

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 0; \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n + \dfrac{1}{2^n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et à termes positifs.
2. (a) Étudier la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = x^2 - x - \frac{1}{2^n}.$$

   (b) Montrer que l'équation $x^2 - x - \dfrac{1}{2^n} = 0$ possède sur $\mathbb{R}_+$ une unique solution qu'on note α_n.
3. (a) Étudier le signe de $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Établir, pour tout $n \geq 2$, l'inégalité suivante : $v_n \geq \alpha_n$.
4. (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge.
   (b) Déterminer la valeur de sa limite.

Les exercices sont à traiter dans l'ordre.

Exercice 1 Question de cours

Énoncer le théorème d'intégration par parties.

Exercice 2

On considère une fonction f définie et continue sur $[0, \pi]$ et l'intégrale :

$$I_n = \int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt.$$

1. On suppose que f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Montrer que la suite I_n est convergente de limite nulle.
2. On suppose ici que f est seulement de classe C^0 sur $[0, \pi]$. On veut démontrer que le résultat précédent est encore valable.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout n-uplet de réels $(a_1, \ldots, a_n)$ associe le nombre :
   $$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \sin(kt)\right)^2 dt.$$
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose :
   $$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(kt)dt.$$
   Enfin, on rappelle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)).$$
   Calculer pour tous $k, l \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale :
   $$\int_0^\pi \sin(kt)\sin(lt)dt.$$
   En déduire que pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:
   $$F(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2\sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)^2 dt.$$
   (b) Montrer que F admet un minimum global au point $(b_1(f), \ldots, b_n(f))$. Quelle est la valeur de ce minimum ?
   (c) Montrer que la série $\sum b_k(f)^2$ est convergente et donner un majorant de sa somme.
   (d) Conclure.