Les exercices sont à traiter dans l'ordre.

Exercice 1 Question de cours

Énoncer le théorème de la bijection.

Exercice 2

Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

1. (a) Montrer que ϕ est une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $]0, \sqrt{2\pi}[$.
   On rappelle que :
   $$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$
   (b) On note ψ la bijection réciproque de ϕ. Dresser son tableau de variations.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\phi(x)+\phi(-x) = \sqrt{2\pi}$. En déduire que pour tout $y \in]0, \sqrt{2\pi}[$: $-\psi(y) = \psi(\sqrt{2\pi}-y)$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a :
   $$e^{-x^2/2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq -x\phi(x) \leq e^{-x^2/2}.$$
   (pour la minoration, on écrira, pour $B < x$:
   $$\int_B^x e^{-u^2/2} du = \int_B^x \frac{1}{u} u e^{-u^2/2} du,$$
   avant de procéder à une intégration par parties).
   (c) En déduire un équivalent de $\phi(x)$ lorsque $x \longrightarrow -\infty$, puis un équivalent de $\sqrt{2\pi} - \phi(x)$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_-$. On pose $x = \psi(y)$.
   (a) Dans quel intervalle se trouve y ?
   (b) Montrer que :
   $$-\frac{\psi(y)^2}{2} - \ln|\psi(y)| + \ln\left(1 - \frac{1}{\psi(y)^2}\right) \leq \ln y \leq -\frac{\psi(y)^2}{2} - \ln|\psi(y)|.$$
   (c) En déduire un équivalent de $\psi(y)$ lorsque y tend vers 0 par valeur supérieure.

Les exercices sont à traiter dans l'ordre.

Exercice 1 Question de cours

Que peut-on dire d'une suite monotone et bornée ?

Exercice 2

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par le premier terme u_0 et par les relations de récurrences suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{u_n}}}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{u_n}}}{2}.$$

1. À quelle condition portant sur la valeur de u_0, les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles bien définies ?
   Dans toute la suite, on supposera cette condition réalisée.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 + v_n^2 = 1$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et bornées.
4. (a) En déduire la convergence de ces deux suites. On note α la limite de (u_n) et β celle de v_n. Exprimer β en fonction de α et montrer que :
   $$\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1.$$
   (b) Montrer que α est l'unique point fixe de l'application $f : t \longrightarrow \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{t}}}{2}$ sur $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.
   (c) Déterminer selon la position de u_0 par rapport à α le sens de variation de chacune des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Les exercices sont à traiter dans l'ordre.

Exercice 1 Question de cours

Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 2

1. On considère une fonction g positive, décroissante et de classe C^1 sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
   (a) Justifier l'existence des bornes suivantes :
   $$m = \inf\{F(t); t \in [a, b]\} \quad \text{et} \quad M = \sup\{F(t); t \in [a, b]\},$$
   où $F(t) = \int_a^t f(x)dx$.
   (b) Montrer qu'on a :
   $$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)F(b) - \int_a^b g'(x)F(x)dx.$$
   (c) En déduire que :
   $$mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mg(a).$$
   (d) On suppose que $g(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :
   $$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)F(c) = g(a)\int_a^c f(x)dx.$$
2. On considère la fonction ϕ sur $\mathbb{R}_+$ en posant :
   $$\phi(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx.$$
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $h(t) = \dfrac{1 - e^{-at}}{t}$. Montrer qu'elle est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $A > 0$. Montrer qu'il existe $c \in [0, A]$ tel que :
   $$\int_0^A \frac{1 - e^{-tx}}{t} \sin t dt = x(1 - \cos c).$$
   Prouver que la fonction ϕ est continue en 0.