Exercice 1

1. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)^3$ où E désigne un ensemble. Monter que :

$$(A \subset B) \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup C)$$

2. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)^2$. Monter que :

$$A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$$

Exercice 2

Un jeu comporte 32 cartes dont 8 couleurs. Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent un as au moins ?
3. Combien de mains contiennent au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien de mains contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

Exercice 3

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0, 2\pi]$ telle que $f'' > 0$. Déterminer le signe de :

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt$$

Exercice 4

Calculer :

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan u du$$

Exercice 1

Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Monter que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A \subset B$;
2. $B^c \subset A^c$;
3. $B \cup A^c = E$;

où A^c désigne le complémentaire de la partie A dans l'ensemble E.

Exercice 2

Déterminer le nombre de numéros de téléphone à dix chiffres tels que :

1. le numéro est formé de deux chiffres 1, deux chiffres 3 et six chiffres 7 ;
2. le numéro est formé de deux chiffres différents et deux seulement ;
3. le numéro comprend trois chiffres 1 et trois seulement.

Exercice 3

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$. Monter que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt = 0$$

Exercice 4

Calculer :

$$K = \int_0^{\pi} (\cos x)^2 dx$$

Exercice 1

1. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Monter que :

$$\left.\begin{array}{r} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{array}\right\} \Rightarrow B = C$$

2. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)^2$, monter que :

$$A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$$

Exercice 2

Une urne contient six boules blanches numérotées de 1 à 6 et cinq boules noires numérotées de 1 à 5. On tire successivement quatre boules sans remise.
Combien de résultat amènent trois boules blanches et une boule noire ?

Exercice 3

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$$

1. Monter que $I_n > 0$.
2. Monter que $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2^p}(p!)^2}{(2p+1)!} \quad \text{et} \quad I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2^p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

3. Monter que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge.
4. Monter que $\forall n \geq 1$, $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.
5. Monter que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \longrightarrow 1$ et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ en l'infini.