Exercice 1

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = ln\left(\dfrac{3+\sin(\frac{1}{n})}{3-\sin(\frac{1}{n})}\right)$.
2. $u_n = (-1)^n n e^{-n}$.
3. $u_n = \dfrac{n^4 ln(3n)}{e^{2n}}$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels qui tend vers 0. Montrer que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

Exercice 3 Étude d'une série alternée

Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

1. La série de terme général u_n est-elle absolument convergente ?
2. Déterminer une expression de la suite $v_n = u_n - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
3. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge en utilisant l'exercice précédent.
4. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

ophelie.rouby@ens-cachan.org

Exercice 1

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{n + e^{-2n}}{n^4 + n^2 + 1}$.
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos(n)}{n^2\sqrt{n}}$.
3. $u_n = e^{-\sqrt{5+n}}$.

Exercice 2

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Exercice 3 La constante d'Euler

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $\forall n \geq 1$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n)$$

1. En interprétant u_n comme la somme partielle d'une série, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On notera γ sa limite, c'est ce qu'on appelle la constante d'Euler.
2. En déduire un équivalent de $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Exercice 1

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{ln(n)}{n^4}$.
2. $u_n = \dfrac{1}{n} - ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
3. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}$.

Exercice 2

On considère deux séries de termes généraux u_n et v_n qui sont strictement positifs et telles que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

1. Que peut-on dire si la série de terme général u_n converge ?
2. Quelle est la nature de la série :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1 \times 4 \times 7 \times \ldots \times (3n-2)}{3^n \times n!}$$

Exercice 3

Soit $p \in]-1, 1[$. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{p^{n+1}}{n+1}$ converge et calculer sa somme.