

Exercice 1

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \ln \left(\frac{3 + \sin(\frac{1}{n})}{3 - \sin(\frac{1}{n})} \right)$.
2. $u_n = (-1)^n n e^{-n}$.
3. $u_n = \frac{n^4 \ln(3n)}{e^{2n}}$.

Exercice 2 Inégalité de Boole

1. Soient A_1, \dots, A_n des événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

2. Soient A, B et C trois événements équiprobables, de même probabilité p , tels que :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$$

Montrer que $p \leq \frac{2}{3}$.

Exercice 3

Une urne contient 10 boules blanches, 6 boules rouges et 4 boules noires.

1. On tire successivement 3 boules avec remise.
 - a. Calculer la probabilité que le tirage soit tricolore.
 - b. Quelle est la probabilité que le tirage soit bicolore ?
 - c. Quelle est la probabilité que le tirage soit unicolore ?
2. Traiter toutes les questions précédentes dans le cas d'un tirage simultané de 3 boules.

Exercice 1

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{n + e^{-2n}}{n^4 + n^2 + 1}$.
2. $u_n = \frac{(-1)^n \cos(n)}{n^2 \sqrt{n}}$.
3. $u_n = e^{-\sqrt{5+n}}$.

Exercice 2

Soient A_1, \dots, A_n des événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k})$$

Exercice 3

On distribue au hasard 5 cartes d'un jeu de 52 cartes et on suppose que les $\binom{52}{5}$ mains sont équiprobables.

1. Quelle est la probabilité d'avoir un full (ie trois cartes d'une hauteur et deux cartes d'une autre hauteur, par exemple trois valets et deux rois) ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un cœur ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir un full avec au moins un cœur ?

Exercice 1

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^4}$.

2. $u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

3. $u_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}$.

Exercice 2

On lance indéfiniment une pièce pour laquelle le probabilité d'obtenir pile à un lancer est égale à $\frac{1}{2}$. On pose :

- A l'événement "on obtient au moins un pile pendant une infinité de lancer";
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement "on obtient au moins un pile pendant les n premiers lancers";
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, E_k l'événement "le premier pile apparaît lors du k -ième lancer".

1. Déterminer la probabilité de l'événement E_k pour tout $k \geq 1$.
2. Déterminer la probabilité de l'événement A_n pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 1.

Exercice 3

Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$ avec $n \geq 1$. On extrait au hasard une boule de cette urne.

1. Quelle est la probabilité que le numéro obtenu soit inférieur ou égal à n ?
2. Quelle est la probabilité que le numéro obtenu soit pair?
3. Reprendre les questions précédentes avec une urne contenant $2n + 1$ boules numérotées de 0 à $2n$.