Exercice 1

Soient A, B deux événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 2 Inégalité de Boole

1. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Montrer que pour tout $n \geq 1$:
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$
2. Soient A, B et C trois événements équiprobables, de même probabilité p, tels que :
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$$
Montrer que $p \leq \dfrac{2}{3}$.

Exercice 3

On dispose de deux dés :
- le dé A possède quatre faces rouges et deux faces blanches ;
- le dé B possède deux faces rouges et quatre faces blanches.

On lance une pièce de monnaie équilibrée :
- si on obtient pile, on décide de jouer uniquement avec le dé A ;
- si on obtient face, on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir rouge avec un lancer quelconque de dé.
2. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième lancer sachant qu'on a déjà obtenu cette couleur aux deux premiers lancers.
3. Déterminer la probabilité d'avoir utiliser le dé A sachant qu'on a obtenu rouge aux n premiers lancers (avec $n \geq 1$).

Exercice 1

Une urne contient n_1 boules blanches et n_2 boules noires. On tire une boule de cette urne :
- si elle est blanche, on la remet dans l'urne ;
- si elle est noire, on la remplace par a boules blanches prises dans une réserve auxiliaire avec $a \in \mathbb{N}$.

On tire alors une deuxième boule de l'urne.
Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche ?

Exercice 2

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k})$$

Exercice 3

On considère les familles de n enfants (avec $n \geq 2$) et on s'intéresse aux différentes répartitions des sexes : M et F.
On note M_i l'événement " le i-ème enfant est du sexe masculin" et on suppose que pour tout i, $\mathbb{P}(M_i) = \frac{1}{2}$, les événements $M_1, \ldots, M_n$ étant mutuellement indépendants. On considère les événements :
- $A =$ "la famille a des enfants des deux sexes" ;
- $B =$ "la famille a au plus une fille".

1. Étudier l'indépendance des ces deux événements dans les cas particuliers où $n = 2$ et $n = 3$.
2. Faire l'étude dans le cas général.

Exercice 1

On dispose de trois pièces :
- la première fait pile avec la probabilité 0.1 ;
- la deuxième fait pile avec la probabilité 0.4 ;
- la troisième fait pile avec la probabilité 0.6.

On choisit au hasard l'une des pièces et on la lance trois fois.
Déterminer la probabilité qu'on ait lancé la première pièce sachant qu'on a obtenu deux fois pile et une fois face.

Exercice 2

On lance indéfiniment une pièce pour laquelle le probabilité d'obtenir pile à un lancer est égale à $\frac{1}{2}$. On pose :
- A l'événement "on obtient au moins un pile pendant une infinité de lancer" ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement "on obtient au moins un pile pendant les n premiers lancers" ;
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, E_k l'événement "le premier pile apparaît lors du k-ième lancer".

1. Déterminer la probabilité de l'événement E_k pour tout $k \geq 1$.
2. Déterminer la probabilité de l'événement A_n pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 1.

Exercice 3

N personnes numérotées de 1 à N se transmettent une information. Chaque personne transforme l'information reçue en son contraire avec la probabilité $p \in]0,1[$ et la transmet fidèlement avec une probabilité $1-p$.
Quelle est la probabilité que l'information parvienne non déformée à la N-ième personne ?