Exercice 1

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et dont la loi de probabilité vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{n}\mathbb{P}(X = n - 1)$$

1. Déterminer l'expression de $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction de $\mathbb{P}(X = 0)$. En déduire alors la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$ et reconnaître X.
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $V(X)$.

Exercice 2

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n (avec $n \geq 2$). On effectue deux tirages successifs d'un jeton de cette urne et on note X (respectivement Y) le plus grand (respectivement le plus petit) des numéros obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de X et celle de Y dans les cas où :

1. les tirages se font sans remise ;
2. les tirages se font avec remise.

Exercice 3

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq b < a$. Un urne contient a boules dont b boules blanches et $a - b$ boules noires. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux boules blanches.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$ telle que :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\beta}{k+1}\binom{n}{k}$$

1. Déterminer β.
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $V(X)$.

Exercice 2

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise selon le protocole suivant : on note B_k le numéro de la k-ième boule tirée et on arrête les tirages dès que $B_k \geq B_{k+1}$. Soit X la variables aléatoire réelle égale au nombre de tirages effectués.

1. Définir la fonction de répartition de X.
2. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

Exercice 3

On considère deux variables aléatoires réelles X et Y indépendantes qui suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$ et celle de $X - Y$.
2. Étudier l'indépendance de ces deux variables aléatoires.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ de loi de probabilité définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = a\frac{k^2+1}{k!}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer a.
2. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $V(X)$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire réelle de loi binomiale de paramètres n et p, ie $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. On définit la variable aléatoire réelle Y par :
- Si $X = k$ avec $k > 0$, alors $Y = k$;
- Si $X = 0$, alors Y prend une valeur quelconque avec équiprobabilité dans $\{1, 2, \dots, n\}$.

Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.

Exercice 3

Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts, avec $n \geq 2$. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p, avec $p \in]0,1[$, alors que la probabilité de ne pas l'obtenir est de $q = 1 - p$. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. Après n recherches, le secrétaire demande une deuxième fois et dans les mêmes conditions (ie toujours avec indépendance et probabilité p de réussir à chaque appel) chacun des $n - X$ correspondants non obtenus la première fois. Soit Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de correspondants obtenus dans la seconde série d'appels. On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z. Puis donner son espérance et sa variance.