## Exercice 1 Vrai ou Faux

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse.

1. Soit $X$ une variable aléatoire prenant des valeurs entières. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$.
2. Si $X$ admet une espérance alors $|X|$ admet une espérance.
3. Si $X$ possède une variance, alors $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sigma_{aX+b} = a\sigma_X$.

## Exercice 2

1. Soit $q \in ]0, 1[$. On considère $X$ une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :
$$\mathbb{P}(X = n) = q\mathbb{P}(X \geq n)$$
Déterminer la loi de $X$ et calculer son espérance et sa variance.
2. Soient $Y, Z$ deux variables aléatoires réelles telles que $Y(\Omega) = Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $X, Y, Z$ mutuellement indépendantes et $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Z = k) = p^k q$$
où $q = 1 - p$.
   (a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Z \geq k)$.
   (b) Déterminer $\mathbb{P}(X + Y \leq Z)$.

## Exercice 3

Une urne contient $n$ jetons numérotés de 1 à $n$ (avec $n \geq 2$). On effectue deux tirages successifs d'un jeton de cette urne et on note $X$ (respectivement $Y$) le plus grand (respectivement le plus petit) des numéros obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de $X$ et celle de $Y$ dans les cas où :

1. les tirages se font sans remise ;
2. les tirages se font avec remise.

## Exercice 1 Vrai ou Faux

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse.

1. Si $X(\Omega)$ est fini, alors la fonction de répartition de $X$ n'est pas strictement croissante.
2. Si $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} e^k \mathbb{P}(X = k)$.
3. L'espérance d'une variable aléatoire est toujours positive.

## Exercice 2

On considère $X, Y, Z$ trois variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p$ avec $p \in ]0, 1[$, ie si on pose $q = 1 - p$, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p$.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$ et calculer son espérance et sa variance.
2. Calculer $\mathbb{P}(S \leq Z)$.

## Exercice 3

Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On effectue des tirages successifs avec remise selon le protocole suivant : on note $B_k$ le numéro de la $k$-ième boule tirée et on arrête les tirages dès que $B_k \geq B_{k+1}$. Soit $X$ la variables aléatoire réelle égale au nombre de tirages effectués.

1. Définir la fonction de répartition de $X$.
2. Déterminer la loi de probabilité de $X$ et calculer son espérance.

## Exercice 1 Vrai ou Faux

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse.

1. Si $X$ admet une espérance et un moment d'ordre 2, alors $(\mathbb{E}(X))^2 \geq \mathbb{E}(X^2)$.
2. Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit $X$ une variable aléatoire qui admet une variance. Alors $X$, $c+X$ et $c-X$ ont même variance.
3. Si $X$ et $|X|$ admettent une variance, alors $V(X) = V(|X|)$.

## Exercice 2

Lors d'une compétition sportive, un athlète a une probabilité $\frac{1}{n}$ de réussir son $n$-ième saut. Il est éliminé dès qu'il échoue à un saut. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de sauts effectués.

1. Quelle est la loi de $X$ ? Vérifier que l'expression trouvée définie bien une loi de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

## Exercice 3

Un secrétaire effectue $n$ appels téléphoniques vers $n$ correspondants distincts, avec $n \geq 2$. On admet que les $n$ appels constituent $n$ expériences indépendantes et que la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p$, avec $p \in ]0,1[$, alors que la probabilité de ne pas l'obtenir est de $q = 1-p$. On note $X$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de $X$ ? Donner son espérance et sa variance.
2. Après $n$ recherches, le secrétaire demande une deuxième fois et dans les mêmes conditions (ie toujours avec indépendance et probabilité $p$ de réussir à chaque appel) chacun des $n-X$ correspondants non obtenus la première fois. Soit $Y$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de correspondants obtenus dans la seconde série d'appels. On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi de $Z$. Puis donner son espérance et sa variance.