Exercice 1 Vrai ou Faux

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse.

1. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) X suit la loi uniforme sur $[0,1]$;
   (b) X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
2. Si la loi de X est donnée par $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=2)=\dfrac{1}{2}$, alors X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
3. Si X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{P}(X=0)=1$.

Exercice 2

On lance deux dés équilibrés, les faces étant marquées de 1 à 6.

1. On gagne 1 euro si la somme des points obtenus est supérieure strictement à 7, on perd 1 euro sinon. Le jeu est-il équitable ?
2. On considère maintenant la règle suivante : on gagne 1 euro si les points obtenus sur les deux dés ne diffèrent que de 1 ou 2 et on perd 1 euro sinon. Le jeu est-il équilibré ?

Exercice 3

1. Soit $q \in]0,1[$. On considère X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X=n)=q\mathbb{P}(X\geq n)$$

   Déterminer la loi de X et calculer son espérance et sa variance.
2. Soient Y,Z deux variables aléatoires réelles telles que $Y(\Omega)=Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$, X,Y,Z mutuellement indépendantes et $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(Z=k)=p^kq$$

   où $q=1-p$.
   (a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Z\geq k)$.
   (b) Déterminer $\mathbb{P}(X+Y\leq Z)$.

Exercice 1 Vrai ou Faux

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse.

1. Si X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([1, n+1])$, alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+2}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2}{12}$.
2. Si X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors $1 - X$ suit la loi $\mathcal{B}(p)$.
3. Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - p^n$.

Exercice 2

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes.

1. On suppose que X et Y suivent chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs α et β. Déterminer la loi de probabilité de $X + Y$.
2. On suppose dans cette question que X et Y suivent chacune une loi binomiale de paramètres respectifs (n, p) et (m, p).
   (a) Quelle est la loi de probabilité de $S = X + Y$?
   (b) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que l'événement $(S = s)$ est réalisé où $s \in \{0, 1, \ldots, n+m\}$.
   (c) On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$ et $n \leq m$, calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 3

On considère X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$ et calculer son espérance et sa variance.
2. Calculer $\mathbb{P}(S \leq Z)$.

Exercice 1 Vrai ou Faux

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse.

1. Si X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([1, n])$, alors X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([2, 2n])$.
2. Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = (1 - p)^n$.
3. Si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n$.

Exercice 2

Une urne contient des boules blanches et des boules noires, la proportion de boules blanches est p ($p \in]0, 1[$). On effectue dans cette urne, une suite de tirages d'une boule au hasard, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne après chaque tirage.

1. (a) On note X_1 la variable aléatoire réelle égale au rang de sortie de la première boule blanche. Quelle est la loi de X_1 ? Préciser son espérance et sa variance.
   (b) $\forall i \geq 2$, on note X_i la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages à effectuer après la sortie de la $(i - 1)$-ième boule blanche jusqu'à l'obtention de la i-ième boule blanche. Quelle est la loi de X_i ? Que représente $X_1 + X_2$? Donner la loi de $X_1 + X_2$.
2. On note Y la variable aléatoire réelle égale au rang de sortie de la n-ième boule blanche ($n \geq 1$).
   (a) Exprimer Y à l'aide des variables aléatoires X_i pour $1 \leq i \leq n$.
   (b) Montrer que Y admet une espérance et une variance et les préciser.

Exercice 3

Lors d'une compétition sportive, un athlète a une probabilité $\dfrac{1}{n}$ de réussir son n-ième saut. Il est éliminé dès qu'il échoue à un saut. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de sauts effectués.

1. Quelle est la loi de X ? Vérifier que l'expression trouvée définie bien une loi de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.