Exercice 1

On considère une variable aléatoire X suivant la loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0,1[$.
Montrer que X est une variable aléatoire "sans mémoire" sur $\mathbb{N}^*$, ie :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > n+m | X > n) = \mathbb{P}(X > m)$$

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires suivant toutes une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$ avec $\lambda > 0$.
Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Exercice 3

Résoudre, selon la valeur du réel a, le système :

$$(S) \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

Exercice 1

On désigne par p un réel de $]0,1[$. On suppose que la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F(n) = 1 - (1-p)^n$$

Donner la loi de X.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère une variable aléatoire X dont le support est $\mathbb{N}^*$ et qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n+1) = \frac{a}{n}\mathbb{P}(X = n)$$

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (n-1)!\mathbb{P}(X = n)$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n et de $\mathbb{P}(X = 1)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$, puis donner la loi de X.
3. On pose $Y = X - 1$. Reconnaître Y, donner son espérance et sa variance et en déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 1

Soit $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ avec $n \geq 1$.

1. Quel est le nombre de parties de l'ensemble E_n ?
2. On dispose de morceaux de papier identiques. Sur chacun d'eux, on écrit une partie de E_n (pour la partie vide, on n'inscrit rien) et on place ces papiers dans une urne. On extrait au hasard un papier de l'urne et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre d'entiers inscrits sur le morceau de papier.
   (a) $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, déterminer le cardinal de $(X = k)$.
   (b) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Exercice 2

Soit $(X_N)_N$ une suite de variables aléatoires suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ où les paramètres n, p sont fixés.
Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad \lim_{N \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exercice 3

Résoudre, selon la valeur du paramètre réel λ, le système :

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + 4z = 0 \\ 3x - (4+\lambda)y + 12z = 0 \\ x - 2y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases}$$