Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Référence : [Rou09] p.180-184.

On munit $\mathbb{R}^m$ d'une norme $\|.\|$.

Théorème 0.1 (de Cauchy-Lipschitz global) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue et globalement lipschitzienne en y, ie $\forall K$ compact inclus dans I, il existe une constante $k > 0$ telle que $\forall t \in K$ et $\forall y, z \in \mathbb{R}^m$:*

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k\|y - z\|$$

On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x \end{cases}$$

avec $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$ donnés.
Alors ce système admet une solution unique $t \longmapsto y(t)$ qui est définie sur I tout entier.

Démonstration

Cas 1 : on suppose I compact.
On note E l'espace des fonctions $t \longmapsto y(t)$ continue de I dans $\mathbb{R}^m$. Pour $y \in E$ et $t \in I$, on définit :

$$F(y)(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

$\rightsquigarrow$ Montrons que le système différentiel équivaut à $y \in E$ et $F(y) = y$.
• Dire que y est solution du système différentiel sur l'intervalle compact I signifie que $t \longmapsto y(t)$ est une fonction dérivable sur I (donc continue) et que :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{pour tout } t \in I \text{ et } \quad y(t_0) = x$$

Comme f est continue, cela entraîne que y' est continue, d'où en utilisant le théorème fondamental de l'intégration :

$$\int_{t_0}^{t} y'(s)ds = y(t) - x = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

D'où :

$$y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds = F(y)(t)$$

• Réciproquement, si y est continue sur I et vérifie l'équation intégrale (ie $F(y) = y$), alors y est dérivable sur I et solution du système différentiel (en dérivant l'équation intégrale).
• Le problème équivaut donc à la recherche d'un point fixe $y \in E$ de l'application F.

$\rightsquigarrow$ Soit k la constante de Lipschitz associée à l'intervalle compact $K = I$. Soit l la longueur de I. On munit E de la norme :

$$\|y\|_k = \max_{t\in I}(e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\|)$$

Montrons que les hypothèses du théorème de point fixe sont vérifiées pour F et E.
• Montrons que E est complet pour $\|.\|_k$.
Soit $\|y\|_\infty = \max_{t\in I} \|y(t)\|$ la norme classique sur E. On a pour tout $t \in I$:

$$e^{-kl}\|y(t)\| \leq e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\| \leq \|y(t)\|$$

Donc en passant au sup pour $t \in I$, on obtient :

$$e^{-kl}\|y\|_\infty \leq \|y\|_k \leq \|y\|_\infty$$

ce qui nous donne l'équivalence des normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_k$. Comme l'espace E est complet pour la norme $\|.\|_\infty$ alors il est également complet pour la norme $\|.\|_k$.
• Montrons que F va de E dans E.
Soit $y \in E$, ie y est continue. On a pour tout $t \in I$:

$$F(y)(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

Alors par continuité de f, on obtient la continuité de F. D'où $F(y) \in E$.
• Montrons que F est contractante.
Soient $y, z \in E$, soit $t \in I$ et $t \geq t_0$, on a :

$$F(y)(t) - F(z)(t) = \int_{t_0}^{t} (f(s, y(s)) - f(s, z(s)))ds$$

D'où :

$$\begin{aligned}
e^{-k(t-t_0)}\|F(y)(t) - F(z)(t)\| &\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|ds \\
&\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k\|y(s) - z(s)\|ds \\
&\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} ke^{k(s-t_0)}e^{-k(s-t_0)}\|y(s) - z(s)\|ds \\
&\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} ke^{k(s-t_0)}ds\|y - z\|_k \\
&= e^{-k(t-t_0)}ke^{-kt_0} \int_{t_0}^{t} e^{ks}ds\|y - z\|_k \\
&= e^{-kt}k \left[\frac{e^{ks}}{k}\right]_{t_0}^{t} \|y - z\|_k \\
&= e^{-kt}(e^{kt} - e^{kt_0})\|y - z\|_k \\
&= (1 - e^{-k(t-t_0)})\|y - z\|_k
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in I$ et $t \leq t_0$, on obtient de la même façon, en prenant soin d'écrire $\int_t^{t_0}$ à la place de $\int_{t_0}^t$, la majoration :

$$e^{k(t-t_0)}\|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq (1 - e^{k(t-t_0)})\|y - z\|_k$$

Donc pour tout $t \in I$, on a :

$$e^{-k|t-t_0|}\|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq (1 - e^{-k|t-t_0|})\|y - z\|_k$$

D'où en passant au max sur I :

$$\|F(y) - F(z)\|_k \leq (1 - e^{-k|t-t_0|})\|y - z\|_k$$

• Ainsi F est contractante, va de E dans E, sur E munit de la norme $\|.\|_k$ qui est complet, donc d'après le théorème du point fixe, le problème posé admet une solution unique.

Cas 2 : I est un intervalle quelconque.
$\rightsquigarrow$ Un intervalle quelconque I peut s'écrire sous la forme d'une réunion croissante d'intervalles compacts contenant t_0, ie :

$$I = \bigcup_j I_j \quad \text{avec} \quad I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_j \subset \ldots$$

(en effet si $I =]a, b[$, on peut écrire $I = \cup_n [a - 1/n, b + 1/n]$).
$\rightsquigarrow$ Soit y_j la solution (donnée par l'étape précédente) du problème sur I_j :

$$y_j' = f(t, y_j) \quad \text{pour } t \in I_j \text{ et } \quad y_j(t_0) = x$$

Si $y(t)$ est une solution du problème sur I :

$$y' = f(t, y) \quad \text{pour } t \in I \text{ et } \quad y(t_0) = x$$

alors la restriction de y à I_j coïncide nécessairement avec y_j par l'unicité sur I_j.
$\rightsquigarrow$ Inversement les y_j se raccordent. La fonction définie par :

$$y(t) = y_j(t) \quad \text{pour tout } j \text{ tel que } t \in I_j$$

est bien définie (encore grâce à l'unicité sur I_j) et donne une solution sur I.
$\rightsquigarrow$ Le problème sur un intervalle quelconque I admet donc une solution unique définie sur I tout entier.

Lemmes utilisés

Théorème 0.2 (du point fixe) *Soit X un espace métrique complet (non vide). Soit d la distance sur X. Soit F une application de X dans X. On suppose que F est contractante, ie il existe une constante $k \geq 0$ et inférieure stricte à 1 telle que pour tous $x, y \in X$:*

$$d(F(x), F(y)) \leq k d(x, y)$$

Alors il existe un unique point $a \in X$ tel que $F(a) = a$ (point fixe de F). De plus, ce point peut s'obtenir comme limite de la suite $(x_n)_n$ des itérés, définie par récurrence à partir d'un point quelconque $x_0 \in X$ selon $x_{n+1} = F(x_n)$. On a plus précisément :

$$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

Démonstration Pour $n \geq 1$, on a :

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(F(x_{n-1}), F(x_n)) \leq k d(x_{n-1}, x_n)$$

Par récurrence sur n, on a donc :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_0, x_1)$$

Et d'après l'inégalité triangulaire sur la distance, on a pour $n \geq 0$ et $p \geq 1$:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq (k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

On a donc $d(x_n, x_{n+p}) \leq \epsilon$ pour n assez grand et $p \geq 1$; ce qui signifie que (x_n) est une suite de Cauchy de X, qui converge vers un point a puisque X est complet.
En faisant $p \longrightarrow +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

Enfin, comme $x_{n+1} = F(x_n)$, alors en passant à la limite, on obtient (par continuité de F) que $a = F(a)$, donc a est un point fixe de F.
S'il y avait un autre point fixe b, on aurait :

$$d(a, b) = d(F(a), F(b)) \leq k d(a, b)$$

et $k < 1$, d'où $d(a, b) = 0$, ie $a = b$.

Références

[Rou09] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel.* Cassini, 2009.