L'inégalité isopérimétrique

Référence : [QZ06].

Prérequis :
- la formule de Green-Riemann ;
- l'égalité de Parseval ;
- le théorème de Jordan.

Énoncé du théorème

Théorème 0.1 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$.*
Soit Γ une courbe de Jordan (ie fermée, simple) admettant un paramétrage $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1.
On pose L la longueur de la courbe Γ et S l'aire intérieure à la courbe.
Alors $L^2 \geq 4\pi S$ et on a égalité si et seulement si f définit un cercle parcouru une seule fois.

Démonstration

Remarques préliminaires : D'après le théorème de Jordan :
- $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ possède exactement deux composantes connexes, l'une bornée, notée C_0 (et appelée l'intérieure de la courbe Γ) et l'autre non, notée C_∞ (appelée l'extérieure de la courbe) ;
- pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, l'indice $I_f(z)$ par rapport au paramétrage f vaut 1 ou -1 si $z \in C_0$ et 0 si $z \in C_\infty$.

Dans le cas où l'indice vaut 1 cela signifie que la courbe Γ est orientée positivement et on peut alors poser $f(t) = x(t) + iy(t)$. Ensuite la formule de Green-Riemann nous donne que (avec D le domaine limité par l'arc Γ) :

$$\int_\Gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Or l'aire d'un domaine D est donnée par la formule $\int\int_D dxdy$, donc en posant $Q(x, y) = x$ et $P(x, y) = 0$ et ensuite en posant $P(x, y) = -y$ et $Q(x, y) = 0$ dans la formule de Green-Riemann, on obtient que :

$$\int_\Gamma xdy = \int_\Gamma -ydx = \int\int_D dxdy$$

Donc :

$$\int\int_D dxdy = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx$$

Autrement dit si on se ramène aux coordonnées de notre paramétrage f, S s'exprime de la façon suivante :

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\, dt = \frac{1}{2}\Im\left(\int_a^b f'(t)\overline{f(t)}dt\right)$$

(on trouve le deuxième membre de l'égalité en développant le produit $f'(t)\overline{f(t)}$).

Corps de la démonstration

- les deux membres de l'inégalité sont homogènes ;
- quitte à effectuer une homothétie, on peut supposer que $L = 1$;
- quitte à composer la paramétrage f par l'inverse d'une abscisse curviligne, on peut supposer f normal, ie $|f'(t)| = 1$, pour tout $t \in [0,1]$ (et donc $a = 0$ et $b = 1$) ;
- quitte à considérer $f(1-t)$ à la place de $f(t)$, on peut supposer Γ orientée positivement ;
- puisque $f(0) = f(1)$ (car Γ fermée), on peut prolonger f en une fonction continue, 1-périodique et C^1 par morceaux, ainsi on peut définir ses coefficients de Fourier, pour $n \in \mathbb{Z}$, par :

$$c_n(f) = \int_0^1 e^{-2i\pi nt} f(t)dt$$

- ainsi les coefficients de Fourier de f' sont donnés par (via une intégration par parties), pour $n \in \mathbb{Z}$ (les coefficients de Fourier existent bien car $f' \in L^2([0,1])$ car continue sur un compact) :

$$c_n(f') = 2i\pi n c_n(f)$$

- comme $L = 1$, alors par définition du paramétrage f :

$$\begin{aligned} L^2 = L = 1 &= \int_0^1 |f'(t)|dt \\ &= \int_0^1 |f'(t)|^2 dt \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \quad \text{d'après Parseval ;} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} 4\pi^2 n^2 |c_n(f)|^2 \end{aligned}$$

- de plus :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\Im\left(\int_0^1 f'(t)\overline{f(t)}dt\right) \\ &= \frac{1}{2}\Im\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2i\pi n|c_n(f)|^2\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi n|c_n(f)|^2 \end{aligned}$$

  En effet, les fonctions sous l'intégrale vérifient :

$$f'(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f')e^{2i\pi nt}$$

$$\overline{f(t)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{c_m(f)}e^{-2i\pi mt}$$

  Donc en considérant les sommes finies (avec $N \geq 0$, $M \geq 0$ et $N \leq M$), on peut intervertir les signes sommes et le signe intégral, ie :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n\in[-N,N]} c_n(f')e^{2i\pi nt} \sum_{m\in[-M,M]} \overline{c_m(f)}e^{-2i\pi mt}dt &= \sum_{n\in[-N,N]}\sum_{m\in[-M,M]} c_n(f')\overline{c_m(f)}\int_0^1 e^{2i\pi nt}e^{-2i\pi mt}dt \\ &= \sum_{n\in[-N,N]}\sum_{m\in[-M,M]} c_n(f')\overline{c_m(f)}\delta_{n,m} \\ &= \sum_{n\in[-N,N]} c_n(f')\overline{c_n(f)} \\ &= \sum_{n\in[-N,N]} 2i\pi n|c_n(f)|^2 \end{aligned}$$

  Puis en passant à la limite sur N on obtient l'égalité voulue (on peut passer à la limite car $c_n(f')$ et $\overline{c_n(f)}$ sont de carrés sommables) et le produit scalaire est continue.

- Ainsi :

$$L^2 - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n^2 - n)|c_n(f)|^2$$

Et cette quantité est positive d'où l'inégalité isopérimétrique.
- Enfin, on a donc égalité si et seulement si $c_n(f) = 0$ pour $n \neq 0, 1$, ie si et seulement si $f(t) = c_0 + c_1 e^{2i\pi t}$, ce qui correspond au paramétrage d'un cercle de centre c_0, de rayon $|c_1|$ et parcouru une seule fois.

Références

[QZ06] Hervé Queffelec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2006.