Nombres de Bell

Références : [FGN07] p.14-16 ([Gou08]).

Théorème 0.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose B_n le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, avec par convention $B_0 = 1$.*
Soit :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

Alors le rayon de convergence de cette série R n'est pas nul et $\forall z \in]-R, R[$, $f(z) = e^{e^z - 1}$.
De plus :

$$B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}$$

Démonstration

Étape 1 : Montrons une formule sur les B_n. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$$

Tout d'abord, familiarisons-nous avec la famille des B_n et déterminons pour ce faire B_1, B_2 et B_3.

- B_1 est le nombre de partition de $\{1\}$, d'où $B_1 = 1$;
- B_2 est le nombre de partition de $\{1, 2\}$, il y a $\{1\} \cup \{2\}$ et $\{1, 2\}$, d'où $B_2 = 2$;
- B_3 est le nombre de partitions de $\{1, 2, 3\}$, il y a :
  - ⇝ $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$;
  - ⇝ $\{1\} \cup \{2, 3\}$;
  - ⇝ $\{1, 2\} \cup \{3\}$;
  - ⇝ $\{1, 3\} \cup \{2\}$;
  - ⇝ $\{1, 2, 3\}$.

  d'où $B_3 = 5$.

Montrons maintenant la formule. Soit $n \geq 0$.
On pose E_k l'ensemble des partitions de $\{1, \ldots, n+1\}$ pour lesquelles la partie de $\{1, \ldots, n+1\}$ contenant $n+1$ est de cardinal $k+1$.
On a alors $|E_k| = C_n^k B_{n-k}$, car pour constituer la partie contenant $n+1$, il faut choisir k vecteurs parmi $\{1, \ldots, n\}$, puis il faut réaliser une partition des $n-k$ éléments restants.
Comme $E_0, E_1, \ldots, E_n$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $\{1, \ldots, n+1\}$, on obtient :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} E_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j B_j$$

(via le changement de variable $j = n - k$).
D'où le résultat.

Étape 2 : Déterminons une inégalité sur R et calculons $f(z)$. Pour minorer le rayon de convergence de la série $\sum_n \frac{B_n}{n!} z^n$, il faut majorer B_n. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $B_n \leq n!$.

- Si $n = 0$, alors par convention $B_0 = 1 \leq 0! = 1$.

– Soit $n \geq 0$. Supposons la propriété vérifiée jusqu'au rang n et montrons-là au rang $n+1$. D'après l'étape 1 et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$B_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \sum_{k=0}^{n} 1 \leq (n+1)!$$

D'où le résultat.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{B_n}{n!} \leq \frac{n!}{n!} = 1$$

Donc le rayon de convergence de la série entière est supérieur ou égal à 1 (par définition du rayon de convergence d'une série entière).

Déterminons maintenant $f(z)$ pour $z \in]-R, R[$, en utilisant l'étape 1. Soit $z \in]-R, R[$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{B_0}{0!} z^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}$$

La fonction f est dérivable sur $]-R, R[$ et :

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (n+1)! z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n$$

D'où $\forall z \in]-R, R[$ (d'après l'étape 1) :

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k)!} \right) z^n$$

On reconnaît un produit de Cauchy des séries $\sum_n \frac{B_n}{n!} z^n$ et $\sum_n \frac{z^n}{n!}$. La première série a pour somme $f(z)$ et la seconde e^z. Elles ont toutes deux un rayon de convergence supérieur ou égal à R, on a donc $\forall z \in]-R, R[$:

$$f'(z) = f(z) e^z$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre, elle admet pour solution $f(z) = Ce^{e^z}$ où C est une constante, or ici $f(0) = B_0 = 1 = Ce$ d'où $C = \frac{1}{e}$, ainsi $\forall z \in]-R, R[$:

$$f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{e^z - 1}$$

Étape 3 : Montrons la formule asymptotique sur B_k. La série entière définissant la fonction exponentielle ayant un rayon de convergence infini, on a $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!}$$

On pose $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ la série double définie par :

$$u_{n,k} = \frac{(nz)^k}{k!n!}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|nz|^k}{k!n!} = \frac{e^{|nz|}}{n!}$$

puis :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{|nz|}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{|z|})^n}{n!} = e^{e^{|z|}}$$

La série double est donc sommable pour tout $z \in \mathbb{C}$. On peut donc intervertir l'ordre des sommations et en déduire $\forall z \in]-R, R[$:

$$f(z) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} \right) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right)$$

Par unicité du développement en série entière de f, on obtient $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

Lemmes utilisés et rappels

Définition 0.1 (Rayon de convergence) *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre :*

$$R = \sup\{r \geq 0; \textit{la suite } (|a_n z^n|) \textit{ est bornée}\}$$

s'appelle le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.
D'après le lemme d'Abel :

- *$\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument ;*
- *$\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge ;*
- *$\forall 0 \leq r < R$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$.*

Le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ est appelé disque de convergence de la série entière.

Définition 0.2 (Produit de Cauchy) *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence $R > 0$ et $R' > 0$. Notons f et g les sommes de ces séries entières sur leurs disques de convergence D et D'.*
Alors $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est appelée produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Son rayon de convergence R'' vérifie $R'' \geq \inf(R, R')$ et sur $D \cap D'$, fg est la somme de $\sum c_n z^n$.

Lemme 0.1 (Comparaison des rayons de convergence) *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence $R > 0$ et $R' > 0$ telles que $|a_n| \leq |b_n|$. Alors $R \geq R'$.*

Démonstration Soit $z \in D'$, ie $|z| < R'$. Montrons que $\sum a_n z^n$ converge.
On a $|a_n z^n| \leq |b_n z^n|$ par hypothèse et comme $z \in D'$, alors $\sum b_n z^n$ converge normalement, donc absolument point par point, d'où la convergence absolue de $\sum a_n z^n$ par comparaison des séries à termes positifs, d'où la convergence de $\sum a_n z^n$ pour tout $z \in D'$, ainsi nécessairement $D' \subset D$, d'où $R \geq R'$.

Lemme 0.2 (Fubini pour les séries) *Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une suite à double entrée à valeurs dans un espace de Banach. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_p u_{p,q}$ est absolument convergente et $\sum_q \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \| u_{p,q} \| \right)$ converge ;*
2. *$\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_q u_{p,q}$ est absolument convergente et $\sum_p \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \| u_{p,q} \| \right)$ converge.*

De plus, sous ces hypothèses :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$$

Démonstration
(1) $\Rightarrow$ (2) Notons $A_q = \sum_{q=0}^{+\infty} \| u_{p,q} \|$. Pour p fixé, $\| u_{p,q} \| \leq A_q$ et d'après (1), $\sum A_q$ converge, donc $\sum_q \| u_{pq} \|$ converge, ie $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_q u_{p,q}$ est absolument convergente.
Notons B_p la somme de cette série. On a $\forall P \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{p=0}^{P} B_p = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{P} \| u_{p,q} \| \right) \leq \sum_{q=0}^{+\infty} A_q$$

Cette majoration étant indépendante de P, on en conclut que $\sum_p B_p$ converge, d'où le (2).
On montre de la même manière que (2) $\Rightarrow$ (1).
Montrons l'interversion. Notons $a_{n,q} = \sum_{p=0}^{n} u_{p,q}$ et $a_q = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$.
La série $\sum a_q$ converge absolument car $\| a_q \| \leq A_q$, donc elle converge.
Soit $\epsilon > 0$, soit $Q \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{q>Q} A_q < \epsilon$.
Notons $C_n = \sum_{0 \leq p,q \leq n} u_{p,q}$. Lorsque $n > Q$, on a :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} a_q - C_n = \sum_{q=0}^{Q}(a_q - a_{n,q}) + \sum_{q=Q+1}^{n}(a_q - a_{n,q}) + \sum_{q=n+1}^{+\infty} a_q$$

Pour $q > Q$, on a $\| a_q - a_{n,q} \| = \| \sum_{p>n} u_{p,q} \| \leq A_q$ et comme $\| a_q \| \leq A_q$, l'égalité ci-dessus entraîne :

$$\| \sum_{q=0}^{+\infty} a_q - C_n \| \leq \| \sum_{q=0}^{Q}(a_q - a_{n,q}) \| + \sum_{q=Q+1}^{+\infty} A_q \leq \| \sum_{q=0}^{Q}(a_q - a_{n,q}) \| + \epsilon$$

Les suites $(a_{n,q})_n$ pour $0 \leq q \leq Q$ convergent vers a_q donc $\exists N_0 \geq Q$ tel que $\| \sum_{q=0}^{Q}(a_q - a_{n,q}) \| < \epsilon$ dès que $n \geq N_0$.
Ainsi pour tout $n \geq N_0$, $\| \sum_{q=0}^{+\infty} a_q - C_n \| < 2\epsilon$ donc la suite $(C_n)_n$ converge vers $\sum_{q=0}^{+\infty} a_q$.
On montre de même que $\sum b_p$ converge et que $(C_n)_n$ converge vers $\sum_{p=0}^{+\infty} b_p$ avec $b_p = \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$.
D'où l'interversion.

Références

[FGN07] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux x-ens algèbre 1*. Cassini, 2007.

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse*. Ellipses, 2008.