Classification euclidienne des coniques affines

Référence : [Aud06] p.228-231.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 0.1 (Quadrique) *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Une quadrique est un ensemble de points vérifiant une équation du second degré, ie*

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{E}; f(M) = 0\}$$

où f est un polynôme de degré 2, ie il existe un point $\mathcal{O}$, une forme quadratique q non nulle, une forme linéaire $L_{\mathcal{O}}$ et une constante $c_{\mathcal{O}}$ tels que :

$$f(M) = q(\overrightarrow{\mathcal{O}M}) + L_{\mathcal{O}}(\overrightarrow{\mathcal{O}M}) + c_{\mathcal{O}}$$

Définition 0.2 (Quadrique affine et Conique) *On appelle quadrique affine la classe d'équivalence d'un polynôme du second degré $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ sous la relation $f \sim g$ si et seulement si g est un multiple scalaire de f.*
Une quadrique plane est appelée conique.

Définition 0.3 (Quadrique propre) *La quadrique de l'espace affine $\mathcal{E}$ définie par le polynôme :*

$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) + c$$

est dite propre si la forme quadratique définie sur $E \times \mathbb{K}$ par :

$$Q(u, z) = q(u) + L(u)z + cz^2$$

est non dégénérée. Cette forme quadratique est dite homogénéisée de q.

Définition 0.4 (Quadrique à centre) *On dit qu'un point $\mathcal{O}$ tel que $L_{\mathcal{O}} = 0$ est un centre pour la quadrique. Quand il y a un unique centre, on dit que la quadrique est une quadrique à centre.*

Remarque : Autrement dit si O est un centre de symétrie alors $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + c$, ce qui équivaut à $f(O - \overrightarrow{OM}) = f(M)$.

Théorème 0.1 *Soit $\mathcal{C}$ une conique propre d'image non vide d'un plan affine. Alors il existe un repère dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ a une (et une seule) des formes :*

1. $x^2 + y^2 = 1$ *ellipse ;*
2. $x^2 - y^2 = 1$ *hyperbole ;*
3. $y^2 = x$ *parabole.*

Théorème 0.2 (Classification euclidienne des coniques affines) *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Alors une conique propre à centre (d'image non vide) s'écrit dans un repère orthonormé d'origine le centre :*

1. *soit* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *la conique est alors une ellipse ;*
2. *soit* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *la conique est alors une hyperbole.*

pour deux nombres réels positifs a et b (tels que $0 < b \leq a$ si la conique est une ellipse).
De plus une équation d'une conique propre d'image non vide qui n'a pas de centre de symétrie dans un repère orthonormé est $y^2 = 2px$ pour un nombre réel positif p.

Démonstration

Démonstration de la première partie du théorème. D'après le premier lemme, on sait qu'un centre unique signifie que la forme quadratique q est non dégénérée. D'après le théorème d'orthogonalisation simultanée des formes quadratiques, on sait qu'il existe un repère orthonormé d'origine le centre de la conique, qui est en même temps orthogonal pour la forme quadratique, l'équation de la conique est alors de la forme :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + c = 0$$

avec α, β non nuls.
Comme la conique est propre, la forme quadratique homogénéisée Q s'écrit :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + cz^2 = 0$$

et est non dégénérée, donc c est non nul.
On peut donc écrire l'équation de la conique sous la forme :

$$-\frac{\alpha}{c}x^2 - \frac{\beta}{c}y^2 = 1$$

On distingue différents cas :
- Si les deux coefficients sont strictement négatifs, la conique est vide ;
- S'ils sont strictement positifs, on obtient l'équation d'une ellipse ;
- S'ils sont de signes opposés, on obtient une hyperbole.

Remarque : On remarque que dans le cas où $c = 0$, la conique n'est pas propre, elle contient alors son centre et l'équation $\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$ peut se mettre sous la forme :
- soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, on obtient alors un point ;
- soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, on obtient alors deux droites sécantes.

Démonstration de la deuxième partie du théorème. Considérons maintenant le cas où la forme quadratique q est dégénérée. Elle est alors de rang 1. Il y a un repère dans lequel l'équation de la conique s'écrit :

$$aY^2 + \alpha X + \beta Y + \gamma = 0$$

En posant $x = X$ et $y = Y + \frac{\beta}{2a}$ et $c = \gamma - \frac{\beta^2}{4a}$ (ie en changeant l'origine) l'équation devient :

$$ay^2 + \alpha x + c = 0$$

Distinguons deux cas.
Si $\alpha = 0$. Dans ce cas, l'équation est $ay^2 + c = 0$, tous les points de l'axe des x sont des centres de symétrie et la conique est formée de :
- deux droites parallèles si $-c/a > 0$;
- d'une droite (dite double) si $c = 0$;
- elle est vide si $-c/a < 0$.

La forme quadratique Q s'écrit $ay^2 + cz^2$ et bien entendu, la conique n'est pas propre.
Dans le cas contraire ($\alpha \neq 0$), la conique est propre, elle n'a aucun centre de symétrie et quitte à changer d'origine, elle a une équation de la forme :

$$y^2 = bx$$

(où l'on peut supposer $b > 0$).

Remarque : Lorsque $a = b$, une ellipse est un cercle.

Lemmes utilisés

Lemme 0.1 *Pour qu'une quadrique affine $\mathcal{C}$ soit à centre, il faut et il suffit que la forme quadratique q d'un des polynômes qui la définissent soit non dégénérée.*

Démonstration On suppose donné un point O tel que l'équation de C soit de la forme :

$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) + c$$

Soit Ω un point de $\mathcal{C}$, alors :

$$\begin{aligned} f(M) &= q(\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}) + L(\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}) + c \\ &= q(\overrightarrow{\Omega M}) + L(\overrightarrow{O\Omega}) + c + q(\overrightarrow{O\Omega}) + L(\overrightarrow{\Omega M}) + 2\phi(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{\Omega M}) \end{aligned}$$

On pose $u = \overrightarrow{O\Omega}$, ie :

$$f(M) = q(\overrightarrow{\Omega M}) + L(u) + c + q(u) + L(\overrightarrow{\Omega M}) + 2\phi(u, \overrightarrow{\Omega M})$$

Donc Ω est un centre de symétrie si et seulement si $2\phi(u,x) = -L(x)$ pour tout vecteur x du plan.
Notons :

$$\begin{aligned} \overline{\phi} : E &\longrightarrow E^* \\ u &\longmapsto \phi(u,.) \end{aligned}$$

Alors il existe un unique centre Ω si et seulement si ϕ est injective, ce qui équivaut à q non dégénérée.

Lemme 0.2 (Orthogonalisation simultanée) *Soit q une forme quadratique définie positive. Soit q' une forme quadratique quelconque. Alors il existe une base orthonormée pour q qui est orthogonale pour q'.*

Démonstration La forme q est définie positive, elle définit donc un produit scalaire, notons alors $q = \| \, . \, \|^2$ et $\phi(x,y) = < x, y >$.
Récurrence sur la dimension.
Si la dimension de l'espace est 1, le résultat est vrai.
Supposons que le résultat soit vrai en dimension $n-1$.
On se place en dimension n. On va chercher un vecteur e_1 de norme 1 dans E tel que si x est orthogonal à e_1 pour q (ie si $< x, e_1 >= 0$), alors il est aussi orthogonal pour q', ie $\phi'(x, e_1) = 0$.
On décomposera ensuite E en somme directe orthogonale (pour q) :

$$E = < e_1 > \oplus < e_1 >^{\perp}$$

Avec la propriété vérifiée par e_1, l'orthogonal de e_1 pour q' contient l'hyperplan $< e_1 >^{\perp}$, il est donc égal soit à E tout entier, soit à l'orthogonal de e_1. Dans tous les cas, si u est un vecteur de $< e_1 >^{\perp}$, on a :

$$q'(xe_1 + u) = \lambda x^2 + q'(u)$$

pour un certain λ (peut-être nul) et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au sous-espace $< e_1 >^{\perp}$.
Montrons maintenant l'existence d'un tel vecteur e_1. Comme on le cherche de norme 1, considérons la sphère unité S de notre espace euclidien. On définit une fonction f par :

$$\begin{aligned} f : E \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{q'(x)}{\| x \|^2} \end{aligned}$$

Comme la sphère S est compacte et l'application $f_{|S}$ est continue, elle atteint son maximum, notons e_1 le point en lequel elle l'atteint. Comme on a :

$$f(\lambda x) = f(x)$$

pour tout x, e_1 réalise aussi le maximum sur $E \setminus \{0\}$.
Maintenant f est aussi une application différentiable sur l'ouvert $E \setminus \{0\}$ et elle atteint un extremum en e_1, donc la différentielle en e_1 doit être nulle, ie

$$0 = Df_{e_1}(x) = \frac{1}{\| e_1 \|^4}(2\phi'(e_1,x) \| e_1 \|^2 - 2q'(e_1) < e_1, x >) = 2\phi'(e_1,x) - 2q'(e_1) < e_1, x >$$

Donc pour tout x dans E l'orthogonalité de x et de e_1 pour q, ie $< e_1, x >= 0$ implique que $\phi'(e_1, x) = 0$.

Références

[Aud06] Michèle Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.