Décomposition de Bruhat

Référence : [FGN07] p.347-349.

Théorème 0.1 *Soit $G = GL_n(\mathbb{K})$. Soit T_S le sous-groupe de G formé des matrices triangulaires supérieures inversibles. Soit $A \in G$.*
Alors il existe T_1, $T_2 \in T_S$ et P_σ une matrice de permutation, ie $P = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $A = T_1 P_\sigma T_2$.
De plus σ est unique et la partition $G = \cup_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} T_1 P_\sigma T_2$ de $GL_n(\mathbb{K})$ ainsi obtenue est appelée décomposition de Bruhat.

Pour effectuer la démonstration, on va utiliser les matrices correspondant aux opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes mais en se limitant à celles qui sont dans T_S. On va déterminer un algorithme semblable à celui du pivot de Gauss. Effectuons quelques rappels.
On pose $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 0.1 *On appelle matrice de transvection, toute matrice de la forme :*

$$T_{ij}(\lambda) = Id + \lambda E_{ij}$$

avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 0.2
1. *Multiplier une matrice A à gauche par $T_{ij}(\lambda)$ revient à rajouter à la i-ième ligne de A, la j-ième ligne multipliée par λ.*
2. *Multiplier une matrice A à droite par $T_{ij}(\lambda)$ revient à rajouter à la j-ième colonne de A, la i-ième colonne multipliée par λ.*

Démonstration Calcul direct en posant les coefficients de $A = (a_{ij})$.

Définition 0.2 *On appelle matrice de dilatation, toute matrice de la forme :*

$$D_i(\alpha) = Id + (\alpha - 1)E_{ii}$$

où $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Proposition 0.3
1. *Multiplier A à gauche par $D_i(\alpha)$ revient à multiplier la i-ième ligne de A par α.*
2. *Multiplier A à droite par $D_i(\alpha)$ revient à multiplier la i-ième colonne de A par α.*

Démonstration Calcul direct en posant les coefficients de A.

Proposition 0.4
1. *Toute matrice de dilatation est triangulaire supérieure et appartient à T_S (car $\alpha \neq 0$).*
2. *Une matrice $T_{ij}(\lambda)$ est triangulaire supérieure pour $i < j$ et appartient dans ce cas à T_S.*

Démonstration Écrire à quoi correspondent les matrices de dilatation et de transvection.

Démonstration du théorème
Soit $A \in G$. Construisons un algorithme permettant de transformer A en une matrice de permutation, en la multipliant par des matrices de transvections ou de dilatations.
D'après les rappels que nous venons d'effectuer, on peut ajouter à toute ligne une combinaison linéaire des lignes d'indices supérieurs et à toute colonne, une combinaison linéaire des colonnes d'indices inférieurs.

Étape 1 :

- La première colonne de A est non nulle, car $A \in G$.
- Posons alors i_1 le plus grand indice k tel que $a_{k1} \neq 0$.
- En multipliant A par des matrices $T_{k1}(\lambda)$, on peut annuler tous les coefficients a_{k1} pour $k < i_1$.
- À l'aide d'une matrice de dilatation, on peut remplacer le coefficient en position $(i_1, 1)$ par 1.
- Puis on peut annuler tous les coefficients de la ligne i_1 en effectuant des opérations sur les colonnes.

Notons A_1 la matrice obtenue.

Étape 2 :

- Comme $A_1 \in G$, la seconde colonne de A_1 n'est pas nulle.
- On pose i_2 le plus grand indice k tel que le coefficient en position $(k, 2)$ de A_1 soit non nul.
- Comme précédemment, on peut égaler ce coefficient à 1 et mettre des 0 sur la ligne i_2 et toute la colonne 2.
- On peut vérifier que ces opérations ne modifient pas les termes de la ligne i_1 et de la colonne 1.

On pose A_2 la matrice obtenue.

Étape 3 : On continue l'algorithme de même avec la matrice A_2.
On construit ainsi une suite injective $i_1, i_2, \ldots, i_n$ d'entiers entre 1 et n et en notant σ la bijection qui envoie k sur i_k, la matrice obtenue à la fin de l'algorithme est la matrice de permutation P_σ.
La matrice A a été multipliée à gauche et à droite par un produit d'éléments de T_S, qui est encore dans T_S.
Ainsi en considérant l'inverse de ces matrices, qui sont dans T_S, on peut écrire : $T_1^{-1} A T_2^{-1} = P_\sigma$, ie $A = T_1 P_\sigma T_2$.

Étape 4 : Unicité de σ Montrons que si σ et $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$ et si $T, T' \in T_S$, l'égalité $TP_\sigma = P_{\sigma'} T'$ implique que $\sigma = \sigma'$.

- On remarque que la matrice TP_σ s'obtient en permutant les colonnes de T (la j-ième colonne de TP_σ est la $\sigma(j)$-ième colonne de T) et que $P_{\sigma'}T'$ s'obtient en permutant les lignes de T' (la i-ième ligne de $P_{\sigma'}T'$ est la $\sigma^{-1}(i)$-ième ligne de T').
- Pour tout indice j, les coefficients d'indice (i, j) de TP_σ sont non nuls pour $i > \sigma(j)$.
- Le coefficient d'indice $(\sigma'(j), j)$ de $P_{\sigma'}T'$, ie le coefficient (j, j) de T', n'est pas nul, car T' est triangulaire supérieure inversible.
- On en déduit que $\sigma'(j) \geq \sigma(j)$.
- Par symétrie, on obtient que $\sigma'(j) \leq \sigma(j)$. D'où $\sigma = \sigma'$.

Conclusion :

$$GL_n(\mathbb{K}) = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_1 P_\sigma T_2$$

où la réunion est disjointe.

Références

[FGN07] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux x-ens algèbre 1.* Cassini, 2007.