Ellipse de Steiner

Références : il n'y en a pas ! ([Aud06] et [FGN07]).

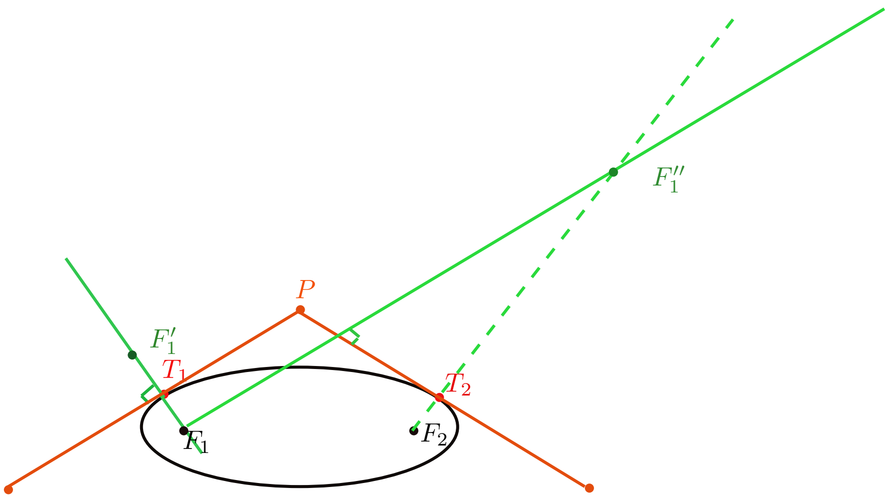
Définition 0.1 *La bissectrice extérieure d'un angle est la droite perpendiculaire à la bissectrice intérieure de l'angle (la bissectrice intérieure étant la droite qui coupe l'angle en deux angles égaux).*

Théorème 0.1 *Soient M_1, M_2 et M_3 trois points non alignés dans le plan complexe d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.*
Soit $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$.
Alors les racines de P' sont les foyers d'une ellipse tangente aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$ en leurs milieux.

Démonstration

Étape 1 : Lemme de Poncelet.

Lemme 0.1 (de Poncelet) *Soit E une ellipse de foyers F_1, F_2.*
Soit P un point extérieur à E.
Soient PT_1 et PT_2 les deux tangentes à E passant par le point P, où T_1 et T_2 sont les points de tangence appartenant à E.
Alors les angles $(\overrightarrow{PT_1}, \overrightarrow{PF_1})$ et $(\overrightarrow{PT_2}, \overrightarrow{PF_2})$ sont égaux.



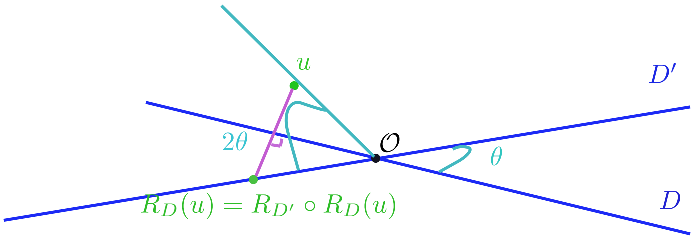
Démontrons ce lemme. On utilise pour cela une propriété de l'ellipse : la tangente PT_1 est la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{T_1F_1}, \overrightarrow{T_1F_2})$.
Autrement dit si F_1' est le symétrique orthogonal de F_1 par rapport à la tangente PT_1, alors F_2, T_1 et F_1' sont alignés et on a :

$$d(F_2, F_1') = d(F_2, T_1) + d(T_1, F_1') = d(F_2, T_1) + d(T_1, F_1) = 2a$$

où a est le demi-grand axe de l'ellipse (par définition de l'ellipse).
De même si F_1'' est le symétrique orthogonal de F_1 par rapport à PT_2, alors F_2, T_2 et F_1'' sont alignés et on a :

$$d(F_2, F_1'') = 2a$$

Notons R_D la symétrie orthogonale par rapport à une droite D. On rappelle que si D et D' se coupent en $\mathcal{O}$, alors $R_{D'} \circ R_D$ est la rotation de centre $\mathcal{O}$ et d'angle deux fois l'angle des droites D et D' modulo π.



Ainsi pour montrer le théorème de Poncelet, il suffit de montrer que $R_{PF_1} \circ R_{PT_1}$ et $R_{PT_2} \circ R_{PF_2}$ sont la même rotation de centre P.
Pour cela on détermine l'image de F_1' par ces deux transformations :
- $R_{PT_1}(F_1') = F_1$ et $R_{PF_1}(R_{PT_1}(F_1')) = R_{PF_1}(F_1) = F_1$;
- on a vu que $d(F_2, F_1') = d(F_2, F_1'') = 2a$ et on a aussi $d(P, F_1) = d(P, F_1') = d(P, F_1'')$ par construction de F_1' et de F_1'', donc (PF_2) est la médiatrice de $(F_1'F_1'')$ et $R_{PF_2}(F_1') = F_1''$, d'où $R_{PT_2}(R_{PF_2}(F_1')) = F_1$.

Donc les deux transformations ont même centre et envoient F_1' sur F_1. Ce sont donc les mêmes rotations.
On a donc démontré le lemme de Poncelet !

Étape 2 : Cœur de la démonstration Soient ω_1 et ω_2 les racines de P' et soient F_1 et F_2 les points d'affixes respectives ω_1 et ω_2.

Lemme 0.2 (Théorème de Gauss-Lucas) *Soit P un polynôme à coefficients complexes. Alors dans $\mathbb{C}$, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.*

D'après ce lemme, les points F_1 et F_2 sont donc à l'intérieur du triangle $M_1M_2M_3$.
$\leadsto$ Montrons que $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1F_1}) = (\overrightarrow{M_1F_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$.
Pour cela on écrit P' de deux manières différentes. Comme $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$ alors en dérivant, on obtient :

$$P'(X) = (X - z_2)(X - z_3) + (X - z_1)(X - z_2) + (X - z_1)(X - z_3)$$

Si on développe le polynôme P, on obtient $P = X^3 - (z_1+z_2+z_3)X^2 + (z_3z_1+z_3z_2+z_1z_2)X - z_1z_2z_3$, d'où en dérivant :

$$P'(X) = 3(X - \omega_1)(X - \omega_2)$$

En faisant $X = z_1$ dans les deux expression de P', on obtient :

$$3(z_1 - \omega_1)(z_1 - \omega_2) = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)$$
$$\frac{z_2 - z_1}{\omega_1 - z_1} = 3\frac{\omega_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

Ainsi en passant à l'argument, on a :

$$arg\left(\frac{z_2 - z_1}{\omega_1 - z_1}\right) = arg\left(3\frac{\omega_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = arg(3) + arg\left(\frac{\omega_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = arg\left(\frac{\omega_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$$

ce qui signifie que $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1F_1}) = (\overrightarrow{M_1F_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$.
$\leadsto$ Construisons maintenant l'ellipse E de foyers F_1, F_2, qui est tangente au côté M_1M_2 du triangle. Pour cela, on va de nouveau utiliser la propriété de la bissectrice extérieure.
On prend M_1 comme point extérieur (ie $= P$). Une des tangentes à E est donc (M_1M_2). Donc le point de tangence $T_1 \in (M_1M_2)$.
On construit F_1' le symétrique orthogonal de F_1 par rapport à $(M_1T_1) = (M_1M_2)$ et d'après la propriété T_1 est l'intersection de (M_1M_2) avec $(F_1'F_2)$. On trouve ainsi T_1 explicitement.
D'après la définition bifocale :

$$E = \{Q, d(F_1, Q) + d(F_2, Q) = d(F_1, T_1) + d(F_2, T_1)\}$$

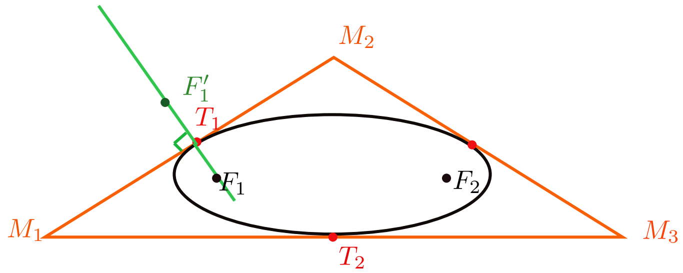
$\rightsquigarrow$ Soit T_2 le point de tangence de la deuxième tangente issue de M_1. D'après le lemme de Poncelet, $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1F_1}) = (\overrightarrow{M_1F_2}, \overrightarrow{M_1T_2})$. Donc (M_1T_2) coïncide avec (M_1M_3) et $T_2 \in (M_1M_3)$, donc E est tangente à (M_1M_3).
$\rightsquigarrow$ Il ne reste plus qu'à montrer que les points de tangence sont les milieux des côtés. Montrons-le pour I milieu de $[M_1M_2]$ d'affixe $\dfrac{z_1+z_2}{2}$. Il suffit de montrer que $(\overrightarrow{IM_1}, \overrightarrow{IF_1}) = (\overrightarrow{IF_2}, \overrightarrow{IM_2})$ (toujours en utilisant la propriété de la bissectrice extérieure). En faisant $X = \dfrac{z_1+z_2}{2}$ dans les deux expressions de P', on obtient :

$$3\left(\frac{z_1+z_2}{2}-\omega_1\right)\left(\frac{z_1+z_2}{2}-\omega_2\right)$$
$$=\left(\frac{z_1+z_2}{2}-z_1\right)\left(\frac{z_1+z_2}{2}-z_2\right)+\left(\frac{z_1+z_2}{2}-z_1\right)\left(\frac{z_1+z_2}{2}-z_3\right)+\left(\frac{z_1+z_2}{2}-z_2\right)\left(\frac{z_1+z_2}{2}-z_3\right)$$
$$=\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$$

D'où

$$12\frac{\omega_1-\dfrac{z_1+z_2}{2}}{z_1-z_2}=\frac{z_2-z_1}{\omega_2-\dfrac{z_1+z_2}{2}}$$

Ainsi en passant à l'argument, on obtient $(\overrightarrow{IF_1}, \overrightarrow{M_2M_1}) = (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{IF_2})$, ie $(\overrightarrow{IF_1}, \overrightarrow{IM_1}) = (\overrightarrow{IM_2}, \overrightarrow{IF_2})$. D'où le résultat.
On procède de même pour montrer que les autres tangentes passent par les milieux de $[M_1M_3]$ et $[M_2M_3]$ respectivement.



Lemmes utilisés

Lemme 0.3 (Théorème de Gauss-Lucas) *Soit P un polynôme à coefficients complexes. Alors dans $\mathbb{C}$, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.*

Démonstration On écrit :

$$P=\lambda\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{n_k}$$

où $r \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ sont les racines deux à deux distinctes de P et $n_1, \ldots, n_r$ leur ordre de multiplicité respectif.
Comme :

$$P'=\lambda\sum_{k=1}^{r}n_k(X-\lambda_k)^{n_k-1}\prod_{l\neq k}(X-\lambda_l)^{n_l}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{P'}{P} &= \frac{\lambda\sum_{k=1}^{r} n_k (X-\lambda_k)^{n_k-1}\prod_{l\neq k}(X-\lambda_l)^{n_l}}{\lambda\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{n_k}}\\
&= \frac{n_1(X-\lambda_1)^{n_1-1}\prod_{k\neq 1}(X-\lambda_k)^{n_k}+\ldots+n_r(X-\lambda_r)^{n_r-1}\prod_{l\neq r}(X-\lambda_l)^{n_l}}{\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{n_k}}\\
&= \frac{n_1\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{n_k-1}\prod_{l\neq 1}(X-\lambda_l)+\ldots+n_r\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{n_k-1}\prod_{l\neq r}(X-\lambda_l)}{\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{n_k-1}\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)}\\
&= \frac{n_1\prod_{l\neq 1}(X-\lambda_l)+\ldots+n_r\prod_{l\neq r}(X-\lambda_l)}{\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)}\\
&= \sum_{k=1}^{r}\frac{n_k}{X-\lambda_k}
\end{aligned}$$

Soit z une racine de P'.
$\rightsquigarrow$ Si z est l'une des racines λ_k, elle est évidemment dans l'enveloppe convexe des racines de P.
$\rightsquigarrow$ Sinon, on peut écrire :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = 0 = \sum_{k=1}^{r}\frac{n_k}{z-\lambda_k} = \sum_{k=1}^{r}\frac{n_k\overline{z-\lambda_k}}{|z-\lambda_k|^2}$$

ce qui donne en passant au conjugué :

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k(z-\lambda_k)}{|z-\lambda_k|^2} = 0$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k z}{|z-\lambda_k|^2} = \sum_{k=1}^{r}\frac{n_k\lambda_k}{|z-\lambda_k|^2}$$

$$z = \frac{\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k\lambda_k}{|z-\lambda_k|^2}}{\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}}$$

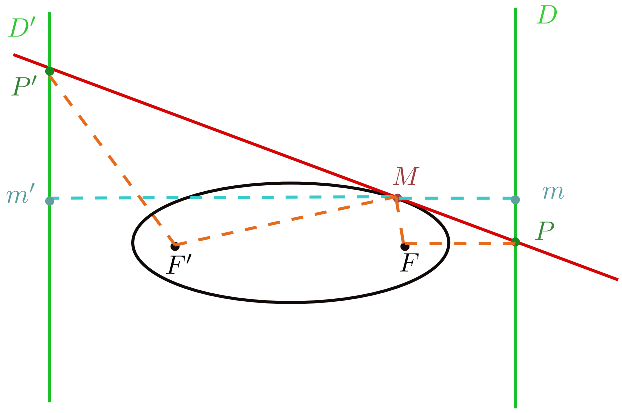
Comme chaque $\frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}$ est strictement positif, cette formule exprime le fait que z est un barycentre à coefficients strictement positifs des λ_k.
La racine z de P' est donc dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Lemme 0.4 (Propriété de la bissectrice extérieure) *Soit E une ellipse de foyers F et F'. Alors la tangente à E en M est la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MF'})$.*

Démonstration Soient D et D' les directrices associées aux foyers F et F'. Soient P et P' les points d'intersections de la tangente en M avec D et D' et soient m et m' les projections de M sur D et D'.
On sait que MF et PF sont orthogonales, ainsi que MF' et $P'F'$. De plus :

$$\frac{MF'}{MF} = \frac{Mm'}{Mm} = \frac{MP'}{MP}$$

de sorte que les triangles rectangles MFP et $MF'P'$ sont semblables d'où l'égalité des angles.
L'ellipse est contenue dans l'un des demi-plans fermés définis par la tangente. Le segment $[FF']$ est contenu à l'intérieur de l'ellipse et la tangente ne peut le rencontrer, c'est donc la bissectrice extérieure.



Références

[Aud06] Michèle Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.

[FGN07] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux x-ens algèbre 1*. Cassini, 2007.