Isométries du cube

Références : [Ale99] p.64-66 ([Aud06]).

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine euclidien de dimension 3.
On note :
- $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ le groupe des isométries affines ;
- $\mathcal{O}^+(\mathcal{E})$ le groupe des déplacements ;
- $\mathcal{O}^-(\mathcal{E})$ l'ensemble des anti-déplacements.

Soit X une partie non vide de $\mathcal{E}$, on pose :
- $Isom(X) = \{f \in \mathcal{O}(\mathcal{E}), f(X) = X\}$;
- $Isom^+(X) = \{f \in \mathcal{O}^+(\mathcal{E}), f(X) = X\}$.

Définition 0.1 *Une isométrie vectorielle est une application linéaire qui conserve la norme, ie une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ (avec E et F des espaces vectoriels euclidiens) telle que $\forall u \in E$, $\| f(u) \| = \| u \|$.*

Remarque : comme le produit scalaire peut s'exprimer à l'aide de la norme, ie :

$$< u, v >= \frac{1}{4} \left(\| u + v \|^2 - \| u - v \|^2 \right)$$

les isométries préservent le produit scalaire et l'orthogonalité.

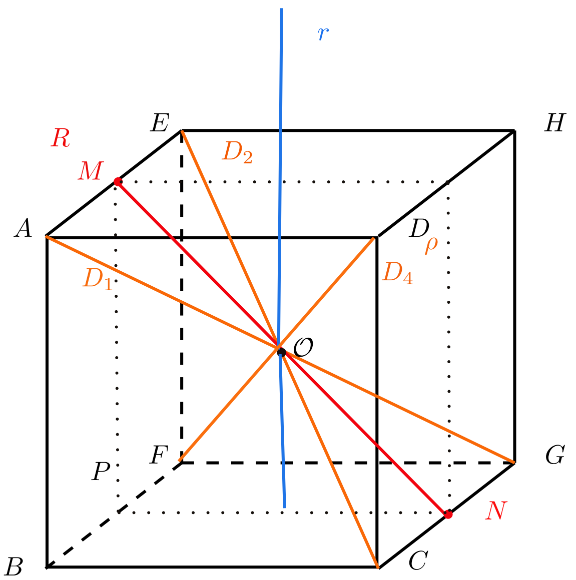
Définition 0.2 *De même, une application affine $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ (où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des espaces affines euclidiens) est une isométrie affine si $\forall A, B \in \mathcal{E}$, $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$; ce qui est équivalent à dire que l'application linéaire associée est une isométrie vectorielle.*

Définition 0.3 *On dit qu'une isométrie (affine) est un déplacement si son déterminant (celui de l'application linéaire associée) est positif.*
Une isométrie qui n'est pas un déplacement est un anti-déplacement.

Définition 0.4 *Un réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan ; c'est aussi une isométrie.*

Théorème 0.1 *On pose C_6 le cube de $\mathbb{R}^3$. Alors :*

$$Isom(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$Isom^+(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4$$



Démonstration $\rightsquigarrow$ Notons $D = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ l'ensemble des diagonales du cube ; formellement une telle diagonale est une paire de sommets symétriques par rapport à $\mathcal{O}$ (le centre de symétrie du cube).
$\rightsquigarrow$ Comme les distances sont conservées par isométries et qu'une diagonale du cube réalise la plus grande distance entre deux sommets, le groupe $Isom(C_6)$ opère de façon naturelle sur D, d'où le morphisme :

$$\begin{aligned} \rho : Isom(C_6) &\longrightarrow \mathfrak{S}(D) \\ f &\longmapsto \rho_f : D_i \longmapsto D_j \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Chaque transposition de $\mathfrak{S}(D)$ est réalisée par une réflexion du cube ; par exemple $(D_1\, D_2)$ est réalisée par la réflexion du plan P.
Ainsi ρ est surjectif, car les transpositions engendrent $\mathfrak{S}(D)$.
$\rightsquigarrow$ Une isométrie f de C_6 qui vérifie $\rho(f) = id$ fixe globalement chaque diagonale D_i.
Supposons $f \neq id$; l'un des sommets n'est alors pas fixé par f, par exemple $f(A) = G$ (on peut adapter la démonstration si on considère une autre sommet que A). Comme $f \in Isom(C_6)$, f conserve les distances et comme $f(B) \in \{B, H\}$, on a $f(B) = H$; et de même, on obtient que $f = s_{\mathcal{O}}$; car f et $s_{\mathcal{O}}$ coïncident sur leurs sommets, donc partout. Donc $\ker(\phi) = \{id, s_{\mathcal{O}}\}$.
$\rightsquigarrow$ Montrons que $\ker(\rho) = \{id, s_{\mathcal{O}}\}$ est un sous-groupe distingué de $Isom(C_6)$.
- $\forall f \in Isom(C_6)$, $f \circ id \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = id \in \{id, s_{\mathcal{O}}\}$;
- Soit $f \in Isom(C_6)$, on a vu que les isométries bougent les diagonales et $s_{\mathcal{O}}$ échange juste les sommets des diagonales, donc $s_{\mathcal{O}}(f^{-1}(D_i)) = f^{-1}(D_i)$ pour toute diagonale D_i, d'où $f \circ s_{\mathcal{O}} \circ f^{-1}(D_i) = D_i$, donc $f \circ s_{\mathcal{O}} \circ f^{-1} = id \in \{id, s_{\mathcal{O}}\}$.

Donc $\ker(\rho)$ est un sous-groupe distingué de $Isom(C_6)$ (cette étape n'est pas nécessaire puisque le noyau d'un morphisme est nécessairement un sous-groupe distingué, mais elle permet de comprendre un peu comment le morphisme marche).
$\rightsquigarrow$ Par conséquent ρ induit un isomorphisme de $Isom(C_6)/\ker(\rho)$ sur $\mathfrak{S}_4$.
$\rightsquigarrow$ Montrons que $Isom(C_6)/\ker(\rho)$ est isomorphe à $Isom^+(C_6)$. Soit l'application :

$$\begin{aligned} \phi : Isom^+(C_6) &\longrightarrow Isom(C_6)/\{id, s_{\mathcal{O}}\} \\ f &\longmapsto \overline{f} \end{aligned}$$

Montrons que ϕ est un isomorphisme.
- ϕ est un morphisme car c'est la restriction du morphisme surjectif $\psi : Isom(C_6) \longrightarrow Isom(C_6)/\ker(\rho)$;
- Soit $f \in \ker(\phi)$, ie $\phi(f) = \overline{f} = \overline{id}$, donc $f = id$ ou $s_{\mathcal{O}}$. Or $f \in Isom^+(C_6)$, donc nécessairement $f = id$ (car $s_{\mathcal{O}}$ est un anti-déplacement) ;
- Soit $f \in Isom(C_6)$. Montrons que $\overline{f}$ contient un déplacement.
  Si $f \in Isom^+(C_6)$, alors $\overline{f}$ contient le déplacement f.

Si $f \in Isom^-(C_6)$, alors

$$\overline{f} = \overline{f \circ id} = \overline{f} \circ \overline{id} = \overline{f} \circ \overline{s_{\mathcal{O}}} = \overline{f \circ s_{\mathcal{O}}}$$

Or $f \circ s_{\mathcal{O}}$ est un déplacement et $f \circ s_{\mathcal{O}} \in \overline{f}$. Donc $\overline{f}$ contient un déplacement.
Ainsi nous avons montrer que ϕ est un isomorphisme, donc $Isom^+(C_4) \simeq \mathfrak{S}_4$.
$\rightsquigarrow$ D'après un lemme qui suit, on sait que :

$$|Isom(C_6)| = |Isom^+(C_6)| \times |\{id, s_{\mathcal{O}}\}|$$

On sait que $Isom^+(C_6) \cap \{id, s_{\mathcal{O}}\} = \{id\}$ et que $Isom^+(C_6)$ (en calculant le déterminant pour montrer la positivité) et $\{id, s_{\mathcal{O}}\}$ sont des sous-groupes distingués de $Isom(C_6)$, donc d'après un autre lemme, on sait que (d'après la classification des groupes) :

$$Isom(C_6) \simeq Isom^+(C_6) \times \{id, s_{\mathcal{O}}\} \simeq Isom^+(C_6) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Permutations de $\mathfrak{S}(D)$	Isométries
$(D_1\, D_2)$	retournement d'axe (MN)
$(D_1\, D_2\, D_3)$	rotation d'un tiers de tours et d'axe D_4
$(D_1\, D_2\, D_3\, D_4)$	rotation d'un quart de tours d'axe (PQ)
$(D_1\, D_2)(D_3\, D_4)$	retournement r^2

Lemmes utilisés

Lemme 0.1 (Admis) *Soit G un groupe. Soient K, H des sous-groupes de G tels que $H \cap K = \{e\}$ et que $|H| \times |K| = |G|$.*

1. *Si H et K sont distingués dans G, alors $G \simeq H \times K$;*
2. *Si H est distingué dans G, alors il existe $\phi : K \longrightarrow Aut(H)$ tel que $G \simeq H \rtimes_\phi K$.*

Lemme 0.2 *Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe distingué dans G. Alors :*

$$|G| = |H| \times |G/H|$$

Références

[Ale99] Michel Alessandri. *Thèmes de géométrie.* Dunod, 1999.

[Aud06] Michèle Audin. *Géométrie.* EDP Sciences, 2006.