Prolongement de la fonction Γ d'Euler

Références : [QZ06] et [BMP05] p.82-83 ([Rud98]).

Théorème 0.1 *Considérons la fonction Γ d'Euler définie sur $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} ; \Re(z) > 0\}$ par :*

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \end{aligned}$$

Alors Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Démonstration

Étape 1 : Γ est bien définie. Montrons que Γ est holomorphe sur $\mathcal{P}$.
On pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{(z-1)\log(t)} dt$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$. On a :
- $\forall z \in \mathcal{P}$, la fonction $t \longmapsto e^{-t} t^{z-1}$ est intégrable ;
- à $t > 0$ fixé, la fonction $z \longmapsto e^{z \log(t)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$;
- soit K un compact de $\mathcal{P}$, alors $\Re(z) \in [\epsilon, M]$ pour $z \in K$ où $\epsilon > 0$ et donc :

$$\begin{aligned} |e^{-t} e^{(z-1)\log(t)}| &\leq e^{(\epsilon-1)\log(t)} = \frac{1}{t^{(1-\epsilon)}} \quad \text{si } 0 \leq t \leq 1 \,; \\ |e^{-t} e^{(z-1)\log(t)}| &\leq t^{M-1} e^{-t} \quad \text{si } t \geq 1. \end{aligned}$$

Ainsi d'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, Γ est holomorphe sur $\mathcal{P}$, ce qui justifie le fait que Γ ait un sens et soit bien définie.

Étape 2 : une formule pour Γ. Montrons que $\forall z \in \mathcal{P}$:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Découpons l'intégrale en deux :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

On souhaite donc exprimer le premier terme sous la forme d'une série. Développons alors l'exponentielle :

$$e^{-t} t^{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

Appliquons maintenant le théorème de Fubini (appliqué à la mesure produit de la mesure de Lebesgue et de la mesure de comptage). Pour cela il suffit de montrer que :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} |\frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}| dt < +\infty$$

Or pour $t > 0$, on a $|t^z| = |t^{\Re(z)+i\Im(z)}| = |t^{\Re(z)}||t^{i\Im(z)}| = t^{\Re(z)}$, ainsi pour $t \in]0,1]$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\frac{(-1)^n}{n!}||t^{n+z-1}| = t^{\Re(z)-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t t^{\Re(z)-1}$$

Comme $\Re(z) > 0$, la fonction $t \longmapsto e^t t^{\Re(z)-1}$ est intégrable sur $]0,1]$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}\end{aligned}$$

D'où sur $\mathcal{P}$,

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

Étape 3 : la méromorphie de la somme. Montrons que :

$$f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et que ses pôles sont les entiers négatifs et sont simples.
On applique pour ce faire le théorème de méromorphie sous le signe somme :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : z \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n!(n+z)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle simple l'entier $-n$;
- soit K un compact de $\mathbb{C}$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D(0,N)}$. Pour $n > N$, la fonction f_n n'a pas de pôle dans K.
  De plus, $\forall z \in K$, on a $|z+n| \geq n - |z| \geq n - N$, par conséquent $|f_n(z)| \leq \dfrac{1}{n!(n-N)}$ pour tout $z \in K$ et la série $\sum_{n>N} f_n$ est donc normalement convergente sur K.

Ainsi d'après le théorème de méromorphie, f est bien une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles simples sont les eniters négatifs.

Étape 4 : conclusion. Si on applique le théorème d'holomorphie sous le signe intégral pour $t \geq 1$, on obtient que $z \longmapsto \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Ainsi d'après l'étape 2, l'application :

$$z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1]^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

établit un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ de Γ. Et le théorème de prolongement analytique entraîne que cette fonction est l'unique prolongement analytique de Γ sur l'ouvert connexe $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$.

Lemmes utilisés

Lemme 0.1 (Théorème d'holomorphie sous le signe intégral) *Soit ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \omega \times X \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :*

- *$\forall z \in \omega$, la fonction $x \longmapsto f(z,x)$ est dans $L^1(X)$;*
- *$\exists N \subset X$ tel que $\mu(N) = 0$ et tel que $\forall x \notin N$, la fonction $z \longmapsto f(z,x)$ est holomorphe sur ω ;*
- *pour tout compact $K \subset \omega$, il existe $g \in L^1$ positive et indépendante de z telle que $|f(z,x)| \leq g(x)$ $\forall z \in K$ et $\forall x \notin N$.*

Alors la fonction $F(z) = \int f(z,x)d\mu(x)$ est holomorphe dans ω et

$$F'(z) = \int \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)d\mu(x)$$

Lemme 0.2 (Théorème de méromorphie sous le signe somme) *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphes sur U telle que pour tout compact $K \subset U$, il existe $N_K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K et que $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K.*
Alors la somme de cette série est méromorphe sur U et on peut dériver terme à terme.

Lemme 0.3 (Prolongement analytique) *Soit U un ouvert connexe. Si deux fonctions coïncident sur un ensemble $D \subset U$ ayant un point d'accumulation dans U, alors elles sont égales sur U.*

Lemme 0.4 (Fubini) *Soient $(X, \mathcal{S}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{F}, \lambda)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit f une fonction sur $X \times Y$ mesurable relativement à $\mathcal{S} \times \mathcal{F}$. Alors :*

1. *si $0 \leq f \leq +\infty$ et si l'on pose pour $x \in X$ et $y \in Y$:*

$$\phi(x) = \int_Y f_x d\lambda \qquad \psi(y) = \int_X f^y d\mu$$

la fonction ϕ est alors mesurable relativement à $\mathcal{S}$ et la fonction ψ est mesurable relativement à $\mathcal{F}$, de plus :

$$\int_X \phi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi d\lambda$$

2. *si f est une fonction à valeurs complexes et si l'on pose*

$$\phi^*(x) = \int_Y |f|_x d\lambda \quad \text{et} \quad \int_X \phi^* d\mu < +\infty$$

dans ce cas $f \in L^1(\mu \times \lambda)$;

3. *si $f \in L^1(\mu \times \lambda)$, $f_x \in L^1(\lambda)$ pour presque tout $x \in X$ et $f^y \in L^1(\mu)$ pour presque tout $y \in Y$; les fonctions ϕ et ψ définies presque partout par les relations précédentes appartiennent respectivement à $L^1(\mu)$ et $L^1(\lambda)$, enfin la relation sur les intégrales est exacte.*

Remarque : La relation avec les intégrales peut aussi s'écrire :

$$\int_X d\mu(x) \int_Y f(x,y) d\lambda(y) = \int_Y d\lambda(y) \int_X f(x,y) d\mu(x)$$

ce sont ce qu'on appelle les intégrales itérées de f.
La conjonction de (2) et (3) fournit un résultat souvent utile : si f est mesurable relativement à $\mathcal{S} \times \mathcal{F}$ et si :

$$\int_X d\mu(x) \int_Y |f(x,y)| d\lambda(y) < +\infty$$

les deux intégrales itérées sont alors définies et égales.

Rappels :

Définition 0.1 (Méromorphie, holomorphie, analyticité, développable en série entière) *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est :*

- *développable en série entière en un point $a \in U$ s'il existe $r > 0$ et $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tels que le disque $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ soit inclus dans U et que sur ce disque on ait :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

On dit que f est égale à la somme de la série entière $z \longmapsto \sum a_n (z-a)^n$ sur le disque de centre a et de rayon r ;
- *analytique sur U, si f est développable en série entière en tout point de U ;*
- *holomorphe sur U si en tout point $a \in U$,*

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

admet une limite quand $z \longrightarrow a$.
Si elle existe, cette limite est notée $f'(a)$;
- *méromorphe sur U s'il existe $\mathcal{P}$ un ensemble de points isolés de U (appelés pôles de f) tel que f est analytique sur $U \setminus \mathcal{P}$ et si $\forall p \in \mathcal{P}$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ vérifiant $f(z) \simeq b(z-p)^{-n}$ quand $z \longrightarrow p$.*

Définition 0.2 (Mesure produit) *Soient* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *et* $(Y, \mathcal{F}, \lambda)$ *deux espaces mesurés* σ*-finis. Soit* $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{F}$*, on pose :*

$$(\mu \times \lambda)(Q) = \int_X \lambda(Q_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y) d\lambda(y)$$

où $Q = \{(x, y); f(x, y) \in V\}$ *pour tout ouvert* V *et* $Q_x = \{y; f_x(y) \in V\}$*.*
On appelle $\mu \times \lambda$ *la mesure produit des mesures* μ *et* λ*. De fait* $\mu \times \lambda$ *est une mesure* σ*-finie.*

Références

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif agrégation.* HK, 2005.

[QZ06] Hervé Queffelec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2006.

[Rud98] Walter Rudin. *analyse réelle et complexe.* Dunod, 1998.