Série génératrice et équation diophantienne

Référence : [FGN09] p.194-196.

Proposition 0.1 *Soient $a_1, \ldots, a_k$ des entiers naturels strictement positifs et premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \geq 1$, on note u_n le nombre de k-uplets $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $a_1x_1 + \ldots + a_kx_k = n$. Alors :*

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{a_1 \ldots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Démonstration

$\rightsquigarrow$ Pour $1 \leq i \leq k$, considérons les séries formelles $\sum_{x_i \in \mathbb{N}} X^{a_i x_i}$ et considérons le produit de Cauchy de ces k séries, le coefficient de X^n dans ce produit de Cauchy est :

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}^k; a_1x_1+\ldots+a_kx_k=n} 1 = u_n$$

On a donc :

$$f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n X^n = \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{x_i=0}^{+\infty} X^{a_i x_i} \right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - X^{a_i}}$$

La série formelle $f(X)$ est la série génératrice de la suite u_n. C'est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines a_1-ièmes, …, a_k-ièmes de l'unité. Le pôle 1 est de multiplicité k et tous les autres sont de multiplicités $< k$. En effet, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers $u_1, \ldots, u_k$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = 1$$

Ainsi si ω est une racine de l'unité de multiplicité k, ie telle que $\omega^{a_1} = \omega^{a_2} = \ldots = \omega^{a_k} = 1$, alors on a :

$$\omega = \omega^{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i} = \prod_{i=1}^{k} (\omega^{a_i})^{u_i} = 1$$

$\rightsquigarrow$ On note $P = \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$ l'ensemble des pôles de f avec $\omega_1 = 1$. Il existe alors des constantes complexes c_{ij} pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq k-1$ et α telles que :

$$f(X) = \frac{\alpha}{(1-X)^k} + \sum_{1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq k-1} \frac{c_{ij}}{(\omega_i - X)^j}$$

$\rightsquigarrow$ Pour $\omega \in P$ et $j \in \mathbb{N}$, la fonction $X \longmapsto \dfrac{1}{(\omega - X)^j}$ est développable en série formelle, ses coefficients s'obtiennent en dérivant $j-1$ fois le développement en série formelle de la fonction $X \longmapsto \dfrac{1}{\omega - X}$. On a donc :

$$\frac{1}{\omega - X} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{X}{\omega}} = \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{X}{\omega} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{\omega^{n+1}}$$

Donc pour $j \leq k-1$, on a :

$$\frac{(j-1)!}{(\omega - X)^j} = \sum_{n=j-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-j+1)!} \frac{X^{n-j+1}}{\omega^{n+1}}$$

ie

$$\frac{1}{(\omega - X)^j} = \sum_{n=j-1}^{+\infty} \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} \frac{X^{n-j+1}}{\omega^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!n!} \frac{X^n}{\omega^{n+j}} = \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+j-1}^n \frac{X^n}{\omega^{n+j}}$$

$\rightsquigarrow$ On déduit de ce qui précède en prenant les coefficients de X^n dans les différents développements en séries formelles que :

$$u_n = \alpha C_{n+k-1}^n + \sum_{2 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq k-1} c_{ij} C_{n+j-1}^n \omega_i^{-(n+j)}$$

On remarque que le premier terme est équivalent quand n tend vers l'infini à :

$$\alpha \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

via la formule de Stirling, car :

$$\begin{aligned} \frac{(n+k-1)!}{n!} &\sim \sqrt{2\pi(n+k-1)} \left(\frac{n+k-1}{e}\right)^{n+k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n \\ &= \sqrt{\frac{n+k-1}{n}} \left(\frac{n+k-1}{n}\right)^n (n+k-1)^{k-1} e^{-(k-1)} \\ &= \sqrt{1 + \frac{k-1}{n}} + \left(1 + \frac{k-1}{n}\right)^n + (n+k-1)^{k-1} e^{-(k-1)} \sim n^{k-1} \end{aligned}$$

car $\left(1 + \frac{k-1}{n}\right)^n \longrightarrow e^{k-1}$ et $\sqrt{1 + \frac{k-1}{n}} \longrightarrow 1$.
On remarque que tous les autres termes de la somme sont négligeables devant n^{k-1} (car $j < k$), on a donc :

$$u_n \sim \alpha \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Il reste donc plus qu'à déterminer α, pour cela on multiplie $f(X)$ par $(1-X)^k$, puis on remplace X par 1, ce qui nous donne :

$$(1-X)^k f(X) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1-X}{1-X^{a_i}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 + X + \ldots + X^{a_i - 1}}$$

Et par conséquent, α vaut donc :

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^{a_i - 1}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{a_1 \ldots a_k}$$

D'où le fait que :

$$u_n \sim \frac{1}{a_1 \ldots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Références

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux x-ens analyse 2*. Cassini, 2009.