Théorème de Müntz

Références : [Gou08] p.291-292 ([Gou94]).

Énoncé

Théorème 0.1 (Théorème de Müntz) *Soit $(\mathcal{C}, \| \,.\, \|_2)$ l'espace des fonctions continue sur $[0,1]$ muni de la norme L_2.*
Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs strictement croissante.
Alors $E =< (x \longmapsto x^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}^*} >$ est dense dans $\mathcal{C}$ si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{\alpha_n}$ diverge.

Lemmes préliminaires

Lemme 0.1 *Soit E un espace préhilbertien. Soit V un sous-espace de E muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$.*
Soit $x \in E$.
Alors la distance d de x à V (ie $d = \inf_{y\in V} \| x - y \|$) vérifie :

$$d^2 = \frac{G(e_1, e_2, \ldots, e_n, x)}{G(e_1, \ldots, e_n)}$$

Démonstration Soit y la projection orthogonale de x sur V, alors $x = y + z$ avec $y \in V$ et $z \in V^\perp$.
Ainsi $d = \inf_{y\in V} \| x - y \| = \| z \|$.
De plus $\forall i$, $< e_i, y > = < e_i, x - z > = < e_i, x >$ car $z \in V^\perp$ (ie $\forall v \in V$, $< z, v > = 0$) et $\| x \|^2 = \| y \|^2 + \| z \|^2 + 2 < y, z > = \| y \|^2 + \| z \|^2$ (pour la même raison) ; ce qui entraîne :

$$M = \begin{pmatrix} < e_1, e_1 > & < e_1, e_2 > & \ldots & < e_1, e_n > & < e_1, x > \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ < e_n, e_1 > & \ldots & \ldots & < e_n, e_n > & < e_n, x > \\ < x, e_1 > & \ldots & \ldots & < x, e_n > & < x, x > \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} < e_1, e_1 > & < e_1, e_2 > & \ldots & < e_1, e_n > & < e_1, y > \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ < e_n, e_1 > & \ldots & \ldots & < e_n, e_n > & < e_n, y > \\ < y, e_1 > & \ldots & \ldots & < y, e_n > & \| y \|^2 + \| z \|^2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant est linéaire par rapport à sa dernière colonne (car le déterminant est une forme n-linéaire alternée, ie $\det(P_1, \ldots P_n) + \det(P_1, \ldots, Q_n) = \det(P_1, \ldots, P_n + Q_n)$), d'où $\det(M) = \det(P) + \det(Q)$

avec :

$$P = \begin{pmatrix} < e_1, e_1 > & < e_1, e_2 > & \dots & < e_1, e_n > & < e_1, y > \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ < e_n, e_1 > & \dots & \dots & < e_n, e_n > & < e_n, y > \\ < y, e_1 > & \dots & \dots & < y, e_n > & \| y \|^2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} < e_1, e_1 > & < e_1, e_2 > & \dots & < e_1, e_n > & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ < e_n, e_1 > & \dots & \dots & < e_n, e_n > & 0 \\ < y, e_1 > & \dots & \dots & < y, e_n > & \| z \|^2 \end{pmatrix}$$

Or $\det(P) = G(e_1, \dots, e_n, y) = 0$ car $y \in < e_1, e_2, \dots, e_n >$ (ie le rang de P est inférieur ou égal à $n-1$, ie P n'est pas bijective) et $\det(Q) = \| z \|^2 G(e_1, \dots, e_n)$.
D'où $G(e_1, \dots, e_n, x) = \det(M) = \det(Q) = \| z \|^2 G(e_1, \dots, e_n)$, ie :

$$\| z \|^2 = d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

Lemme 0.2 *Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tous $i, j = 1, \dots n$, $a_i + b_j \neq 0$.*
On pose Δ_n le déterminant de Cauchy d'ordre n.
Alors :

$$\Delta_n = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i) \prod_{i<j}(b_j - b_i)}{\prod_{i,j}(a_i + b_j)}$$

Démonstration Supposons tout d'abord que les a_i sont distincts deux à deux et $n \geq 2$. L'existence de la décomposition d'une fraction en éléments simples nous donne : $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$R(X) = \frac{(b_1 - X) \dots (b_{n-1} - X)}{(X + a_1) \dots (X + a_n)} = \frac{\lambda_1}{(X + a_1)} + \dots + \frac{\lambda_n}{(X + a_n)}$$

Déterminons les λ_k, pour ce faire on fixe k et on multiplie $R(X)$ par $(x + a_k)$:

$$R(X)(X + a_k) = \lambda_k + (X + a_k) \left(\frac{\lambda_1}{(X + a_1)} + \dots + \frac{\lambda_n}{(X + a_n)} \right)$$

Et on effectue $X = -a_k$:

$$\lambda_k = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i + a_k)}{\prod_{i=1, i\neq k}^{n-1}(a_i - a_k)}$$

Maintenant si on pose $L_1, \dots, L_n$ les lignes de la matrice de Cauchy Δ_n, puisque le déterminant est invariant par ajout à une ligne d'une combinaison linéaire des autres, on a :

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_{n-1} \\ L_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_n} \begin{bmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_{n-1} \\ \sum \lambda_i L_i \end{bmatrix}$$

Ce que nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\lambda_n} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \dots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ R(b_1) & \dots & R(b_n) \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_n} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \dots & & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & R(b_n) \end{bmatrix}$$

On développe le déterminant par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{R(b_n)}{\lambda_n}(-1)^{2n}\Delta_{n-1} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i - b_n)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n + a_i)} \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_i - a_n)}{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i + a_n)} \Delta_{n-1} \end{aligned}$$

Montrons alors par récurrence sur $n \geq 2$ la formule de l'énoncé du lemme sachant que $\Delta_1 = \dfrac{1}{a_1+b_1}$.

- si $n=2$, alors :

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \frac{(b_1-b_2)(a_1-a_2)}{(b_2+a_1)(b_2+a_2)(b_1+a_2)}\Delta_1 \\
&= \frac{(b_1-b_2)(a_1-a_2)}{(b_2+a_1)(b_2+a_2)(b_1+a_2)}\frac{1}{(a_1+b_1)} \\
&= \frac{\prod_{i<j}^2 (a_j-a_i)\prod_{i<j}^2(b_j-b_i)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)}
\end{aligned}$$

  Ce qui correspond au résultat voulu.
- Supposons la relation de l'énoncé vraie au rang $n-1$. Alors :

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i-b_n)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n+a_i)}\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-a_n)}{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i+a_n)}\Delta_{n-1} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i-b_n)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n+a_i)}\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-a_n)}{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i+a_n)}\frac{\prod_{i<j}^{n-1}(a_j-a_i)\prod_{i<j}^{n-1}(b_j-b_i)}{\prod_{i,j}^{n-1}(a_i+b_j)} \\
&= \frac{\prod_{i<j}^{n}(a_j-a_i)\prod_{i<j}^{n}(b_j-b_i)}{\prod_{i,j}^{n}(a_i+b_j)}
\end{aligned}$$

Corps de la démonstration

Étape 1 Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$, soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_N = < (x^{\alpha_i})_{1 \leq i \leq N} >$. Exprimons en fonction des α_i et de m, $\Delta_N(m) = \inf_{f \in E_N} \parallel x^m - f \parallel$ où x^m désigne la fonction : $x \longmapsto x^m$.
Le nombre $\Delta_N(m)$ s'interprète comme la distance (au sens L_2) de x^m à E_N (puisque qu'on considère un inf sur E_N).
Ainsi par définition du déterminant de Gram et du lemme sur ce dernier, on a :

$$\Delta_N(m)^2 = \frac{G(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})}{G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})}$$

Or $\forall a, b$, on a :

$$< x^a, x^b > = \int_0^1 x^a x^b dx = \int_0^1 x^{a+b} dx = \frac{1}{a+b+1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
G(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}) &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2m+1} & \frac{1}{m+\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{m+\alpha_N+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{m+\alpha_N+1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2\alpha_N+1} \end{pmatrix} \\
&= \det \left(\frac{1}{a_i+b_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}
\end{aligned}$$

avec $a_1 = m$, $a_2 = \alpha_1$, …, $a_n = \alpha_N$ et $b_1 = m+1$, $b_2 = \alpha_1 + 1$, …, $b_n = \alpha_N + 1$.
D'où d'après le lemme sur le déterminant de Cauchy :

$$\begin{aligned}
G(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}) &= \frac{\prod_{i<j}(a_j-a_i)\prod_{i<j}(b_j-b_i)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)} \\
&= \frac{(\alpha_1-m)(\alpha_2-m)\dots(\alpha_N-m)\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)^2}{(2m+1)(m+\alpha_1+1)\dots(m+\alpha_N+1)(\alpha_1+m+1)\dots(\alpha_N+m+1)\prod_{i,j}(\alpha_i+\alpha_j+1)} \\
&= \frac{\prod_i(\alpha_i-m)^2\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)^2}{(2m+1)\prod_i(m+\alpha_i+1)\prod_{i,j}(\alpha_i+\alpha_j+1)}
\end{aligned}$$

De la même façon, on trouve que :

$$G(x^{\alpha_1},\dots,x^{\alpha_N})=\frac{\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)^2}{\prod_{i,j}(\alpha_i+\alpha_j+1)}$$

Donc :

$$\Delta_N(m)^2=\frac{\prod_i(\alpha_i-m)^2}{(2m+1)\prod_i(m+\alpha_i+1)}$$

Ainsi :

$$\Delta_N(m)=\frac{1}{\sqrt{2m+1}}\prod_i\left|\frac{\alpha_i-m}{m+\alpha_i+1}\right|$$

Étape 2 Soit $E=<(x^{\alpha_i})_{i\in\mathbb{N}^*}>$. Montrons que E est dense dans $\mathcal{C}$ si et seulement si la série $\sum_n\frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

(⇒) On suppose que E est dense dans $\mathcal{C}$. Il existe $m>0$ tel que $\alpha_n\neq m$, pour tout n.
Or la fonction $x^m\in\mathcal{C}=\overline{E}$ donc la suite $(\Delta_N(m))_{N\in\mathbb{N}^*}=d(x^m,E)^2\longrightarrow 0$, ie :

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\prod_{i=1}^N\left|\frac{\alpha_i-m}{m+\alpha_i+1}\right|=0 \tag{1}$$

ie :

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\prod_{i=1}^N\frac{\alpha_i-m}{m+\alpha_i+1}=0 \tag{2}$$

On distingue alors deux cas :

- Si la suite (α_n) est majorée, alors la série $\sum_n\frac{1}{\alpha_n}$ est immédiatement divergente (car alors $\forall n,\ |\alpha_n|<M$, ie $\frac{1}{|\alpha_n|}>\frac{1}{M}$ et la série de terme général $\frac{1}{M}$ est divergente).
- Sinon, ie $\alpha_n\longrightarrow\infty$. Soit alors $N_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N_0$, $\alpha_n>m$, alors $\forall n\geq N_0$:

$$u_n=\log\frac{\alpha_n-m}{\alpha_n+m+1}=\log\left(1-\frac{2m+1}{\alpha_n+m+1}\right)\sim-\frac{2m+1}{\alpha_n}$$

  Or $\sum u_n$ diverge (d'après (2)), donc $\sum\frac{1}{\alpha_n}$ diverge aussi.

(⇐) On suppose que la série $\sum\frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il suffit de montrer que $\forall m\in\mathbb{N}$, $x^m\in\overline{E}$ (puisque les polynômes sont denses dans les fonctions continues).
Soit donc $m\in\mathbb{N}$. Distinguons de nouveau deux cas pour montrer que l'équation (2) est vérifiée.

- Si la suite (α_n) est majorée, alors :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^N\frac{|\alpha_i-m|}{\alpha_i+m+1}&\leq\prod_{i=1}^N\frac{1+\alpha_i}{\alpha_i+m+1}\\&=\prod_{i=1}^N\left(1-\frac{1}{\alpha_i+m+1}\right)\\&\leq\left(1-\frac{1}{\sup_i(\alpha_i+m+1)}\right)^N\\&\longrightarrow 0\end{aligned}$$

  Donc l'équation (1) est vérifiée.
- Sinon l'equivalent de la suite u_n montre que la série $\sum u_n$ diverge vers $-\infty$, d'où le fait que (2) est vérifiée.

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre*. Ellipses, 1994.

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse*. Ellipses, 2008.