# Théorème de Féjer

Référence : [Gou08] p.286-288.

### Énoncé

**Théorème 0.1 (Féjer)** *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique.*
*On pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$ les coefficients de Fourier de $f$.*
*On pose également pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$ et $C_n = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k$.*
*Alors la suite $(C_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur $\mathbb{R}$.*

### Démonstration

**Étape 1** Démonstration d'un lemme.

**Lemme 0.1** *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique.*
*On pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{S_n}(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ et $\widetilde{C_n} = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \widetilde{S_n}$.*
*Alors pour tout $\alpha \in ]0, \pi[$, la suite $(\widetilde{C_n})_n$ converge uniformément vers $0$ sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$.*

**Résultats préliminaires**

- $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \mathbb{Z}^* \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

- Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{S_n}(t)dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a aussi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{C_n}(t)dt &= \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{S_n}(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= \frac{n+1}{n+1} = 1 \end{aligned}$$

**Démonstration du lemme** Pour démontrer le lemme, nous allons tout d'abord calculer $\widetilde{S_n}$, qui est le noyau de Dirichlet.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, soit $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
\widetilde{S_n}(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} e^{ix(k-n)} \\
&= e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\
&= e^{-inx} \frac{e^{ix\frac{2n+1}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{ix\frac{2n+1}{2}} - e^{-ix\frac{2n+1}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= e^{-inx} \frac{e^{inx} e^{i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{\sin(x(n+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{x}{2})} \\
&= \frac{\sin(x(n+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

Or on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{(k+\frac{1}{2})ix} &= e^{i\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \\
&= e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{ix(n+1)} - 1}{e^{ix} - 1} \\
&= e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{ix\frac{n+1}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{ix\frac{n+1}{2}} - e^{-ix\frac{n+1}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= e^{ix\frac{n+1}{2}} \frac{\sin(x(\frac{n+1}{2}))}{\sin(\frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

Maintenant déterminons une expression de $\widetilde{C_n}$, en passant à la partie imaginaire, $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
\widetilde{C_n}(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \widetilde{S_k}(x) \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \Im\left(\sum_{k=0}^{n} e^{(k+\frac{1}{2})ix}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin(x(\frac{n+1}{2}))}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2
\end{aligned}$$

Ainsi si $\alpha \in ]0, \pi[$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [-\pi, \pi]$ tel que $|x| > \alpha$, on a :

$$\widetilde{C_n}(x) \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2(\frac{\alpha}{2})}$$

D'où la convergence uniforme de $\widetilde{C_n}$ vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$ (via passage au sup sur $x$).

**Étape 2** Déduisons-en la convergence uniforme de $C_n$ vers $f$.
Déterminons tout d'abord une expression de $S_n$ en fonction de $\widetilde{S_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} c_k(f) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} e^{ikx} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widetilde{S_n}(x-t) dt \end{aligned}$$

Déterminons à présent une expression de $C_n$ en fonction de $\widetilde{C_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widetilde{S_k}(x-t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \widetilde{S_k}(x-t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widetilde{C_n}(x-t) dt \end{aligned}$$

Ainsi $C_n$ s'écrit comme le produit de convolution de $f$ avec $\widetilde{C_n}$ et en effectuant le changement de variable : $\phi : [x+\pi, x-\pi] \ni t \longmapsto x - t \in [-\pi, \pi]$, on obtient :

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-t) \widetilde{C_n}(t)(-dt) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t) \widetilde{C_n}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \widetilde{C_n}(t) dt \end{aligned}$$

par $2\pi$-périodicité de $f$ et de $\widetilde{C_n}$.

**Lemme 0.2** *Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

**Démonstration du lemme** Comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est en particulier sur $[-2\pi, 2\pi]$. Ainsi d'après le théorème de Heine, $f$ est uniformément continue sur $[-2\pi, 2\pi]$, ie :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in [-2\pi, 2\pi], |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Maintenant soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| < \alpha$. Alors il va exister $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 2k\pi \in [-2\pi, 2\pi]$ et $y + 2k\pi \in [-2\pi, 2\pi]$, d'où $|f(x+2k\pi) - f(y+2k\pi)| = |f(x) - f(y)| < \epsilon$, par $2\pi$-périodicité de $f$. D'où l'uniforme continuité sur $\mathbb{R}$.

Utilisons ce lemme, puisque $f$ est continue et $2\pi$-périodique, alors $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, ie :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Soit $M$ un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$ (il existe car $f$ est continue et $2\pi$-périodique, donc la restriction de $f$ à $[0, 2\pi]$ est continue sur le compact $[0, 2\pi]$, donc bornée sur ce compact et par périodicité $f$

est donc bornée sur $\mathbb{R}$). Alors $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
|C_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\widetilde{C_n}(t)dt - f(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{C_n}(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| \quad \text{d'après la 3ième rmq préliminaire ;} \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{C_n}(t)||f(x-t) - f(x)|dt
\end{aligned}$$

Or $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ donc on peut séparer l'intégrale en deux selon si $|x-t-x| = |t| < \alpha$ ou non, ie :

$$\begin{aligned}
|C_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\alpha} |\widetilde{C_n}(x)||f(x-t) - f(x)|dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} |\widetilde{C_n}(x)||f(x-t) - f(x)|dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\alpha} |\widetilde{C_n}(x)|\epsilon dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} |\widetilde{C_n}(x)| 2M dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\epsilon \int_{|t|<\alpha} \widetilde{C_n}(x)dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} |\widetilde{C_n}(x)| 2M dt \\
&\leq \epsilon + \frac{2M}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} |\widetilde{C_n}(x)|dt
\end{aligned}$$

car $\widetilde{C_n}$ est positive d'après l'étape 1.
De plus $\widetilde{C_n}$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$, donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$, $|\widetilde{C_n}(t)| < \epsilon$.
D'où :

$$|C_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + \frac{M}{\pi}\epsilon$$

D'où la convergence uniforme de $C_n$ vers $f$ (via passage au sup sur $x$).

# Références


[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse.* Ellipses, 2008.