Théorème de prolongement de Tietze

Référence : [QZ06].

Théorème 0.1 (de Tietze) *Soit (X,d) un espace métrique. Soit Y un fermé de X. Soit $g_0 : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors g_0 admet un prolongement continu $f_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Démonstration

Étape 1 Montrons le résultat pour les fonctions continues et bornées par 1.
On note $C_b^0(X,\mathbb{R})$ (respectivement $C_b^0(Y,\mathbb{R})$) l'ensemble des applications continues et bornées de X (respectivement Y) dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|$ (respectivement $\|f\|_\infty = \sup_{x\in Y}|f(x)|$).
Soit :

$$\begin{aligned} T : C_b^0(X,\mathbb{R}) &\longrightarrow C_b^0(Y,\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f_{|Y} \end{aligned}$$

l'application restriction à Y.
Montrons que T est presque surjective, ie $\exists \alpha \in]0,1[$ et $C < \infty$ tels que $\forall g \in C_b^0(Y,\mathbb{R})$, $\|g\|_\infty \leq 1$ et $\exists f \in C_b^0(X,\mathbb{R})$ tel que $\|g - T(f)\|_\infty \leq \alpha$ et $\|f\|_\infty \leq C$.
$\rightsquigarrow$ Soit alors $g \in C_b^0(Y,\mathbb{R})$ telle que $\|g\|_\infty \leq 1$. Posons :

$$Y^+ = \left\{x \in Y ; \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1\right\}$$
$$Y^- = \left\{x \in Y ; -1 \leq g(x) \leq -\frac{1}{3}\right\}$$

On pose :

$$f(x) = \frac{1}{3}\frac{dist(x,Y^-) - dist(x,Y^+)}{dist(x,Y^-) + dist(x,Y^+)}$$

Alors $f \in C_b^0(X,\mathbb{R})$ et $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{3}$.
$\rightsquigarrow$ Montrons que $\|T(f) - g\|_\infty \leq \frac{2}{3}$ en distinguant trois cas.

- Cas 1 : $x \in Y^+$, alors $g(x) - f(x) = g(x) - \frac{1}{3} \in [0, \frac{2}{3}]$ car comme $x \in Y^+$, alors $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1$, d'où $0 \leq g(x) \leq \frac{2}{3}$.
- Cas 2 : $x \in Y^-$, alors $g(x) - f(x) = g(x) + \frac{1}{3} \in [-\frac{2}{3}, 0]$.
- Cas 3 : $x \in Y \setminus (Y^+ \cup Y^-)$, alors $|g(x) - f(x)| \leq |g(x)| + |f(x)| \leq \frac{1}{3} + \|f\|_\infty \leq \frac{2}{3}$.

D'où le fait que T soit presque surjective.
$\rightsquigarrow$ D'après le lemme qui suit, comme T est une application linéaire des espaces de Banach $C_b^0(X,\mathbb{R})$ et $C_b^0(Y,\mathbb{R})$ qui est presque surjective, alors T est surjective et plus précisément, elle vérifie que $\forall g \in C_b^0(Y,\mathbb{R})$ tel que $\|g\|_\infty \leq 1$ alors il existe $f \in C_b^0(X,\mathbb{R})$ tel que $g = T(f)$ et $\|f\|_\infty \leq \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1$.
Autrement dit si $g \in C_b^0(Y,\mathbb{R})$ est tel que $\|g\|_\infty \leq 1$, alors g admet un prolongement continu f tel que $\|f\|_\infty \leq 1$.

Étape 2 Montrons que si $|g(x)| < 1$ pour tout $x \in Y$, alors g admet un prolongement continu f tel que $|f(x)| < 1$ pour tout $x \in X$, ie montrons le résultat pour les fonctions continues et strictement bornées par 1.
$\rightsquigarrow$ Soit donc $g \in C_b^0(Y, \mathbb{R})$ telle que $|g(x)| < 1$, on sait d'après l'étape 1 qu'il existe un prolongement continu h de g tel que $|h(x)| \leq 1$ pour tout $x \in X$. Distinguons deux cas :

- Si $|h(x)| < 1$ pour tout $x \in X$, alors on pose $f = h$;
- Sinon, on pose $Z = \{x \in X; |h(x)| = 1\}$ et soit $f = u \times h$ où pour tout $x \in X$:

$$u(x) = \frac{dist(x, Z)}{dist(x, Y) + dist(x, Z)}$$

alors f répond à la question, car $u = 1$ sur Y et ainsi $|f(x)| \leq |h(x)| < 1$ et $f(x) = 0$ si $|h(x)| = 1$ (car $Y \cap Z = \emptyset$).

Étape 3 Conclusion. On considère un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ (par exemple la fonction$u \longmapsto argtg(u)$). Soit $g = \phi \circ g_0$, alors d'après l'étape 2, g admet un prolongement continu f tel que $|f(x)| < 1$ pour tout $x \in X$, ainsi $f_0 = \phi^{-1} \circ f$ constitue un prolongement continu de g_0 sur X.

Lemme utilisé

Lemme 0.1 *Soient E, F des espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ presque surjective, ie $\exists \alpha \in]0, 1[$ et $C < \infty$ tels que pour tout $y \in F$, $\|y\| \leq 1$, il existe $x \in E$ tel que $\|y - T(x)\| \leq \alpha$ et $\|x\| \leq C$. Alors T est surjective et plus précisément pour tout $y \in F$ tel que $\|y\| \leq 1$, il existe $x \in E$ tel que $y = T(x)$ et $\|x\| \leq \dfrac{C}{1-\alpha}$.*

Démonstration $\rightsquigarrow$ On va construire par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que $\|x_n\| \leq C$ et :

$$\|y - T(x_1) - \alpha T(x_2) - \ldots - \alpha^{n-1} T(x_n)\| \leq \alpha^n$$

- x_1 existe bien car T est presque surjective ;
- Supposons $x_1, \ldots, x_n$ construits vérifiant les conditions voulues sur la suite, alors on a :

$$\left\| \frac{y - T(x_1) - \alpha T(x_2) - \ldots - \alpha^{n-1} T(x_n)}{\alpha^n} \right\| \leq 1$$

donc puisque T est presque surjective, on sait qu'il existe $x_{n+1} \in E$ tel que $\|x_{n+1}\| \leq C$ et :

$$\left\| \frac{y - T(x_1) - \alpha T(x_2) - \ldots - \alpha^{n-1} T(x_n)}{\alpha^n} - T(x_{n+1}) \right\| \leq \alpha$$

d'où $\|y - T(x_1) - \alpha T(x_2) - \ldots - \alpha^n T(x_{n+1})\| \leq \alpha^{n+1}$. D'où la construction de la suite voulue.
$\rightsquigarrow$ Posons :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^{n-1} x_n$$

Cette série est absolument convergente dans l'espace de Banach E car :

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^{n-1} \|x_n\| \leq C \times \frac{1}{1-\alpha}$$

Donc en passant à la limite dans la relation vérifiée par la suite x_n, on obtient :

$$\|y - T(x)\| \leq \alpha$$

car $\alpha^n \leq \alpha$ puisque $\alpha \in]0, 1[$.
D'où le résultat.

Références

[QZ06] Hervé Queffelec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2006.