`Notation:` Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$ et soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On note $A(E)$ l'image de E par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

Définition 0.1 *Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$. On appelle figure polaire de E, notée E^*, la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par :*

$$E^* = \{y \in \mathbb{R}^n; \forall x \in E, \langle x, y\rangle \leq 1\}.$$

`Notation:` O le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$.

Définition 0.2 *Une partie E de $\mathbb{R}^n$ est dite O-symétrique si elle est globalement invariante par la symétrie centrale affine de centre O.*

Définition 0.3 *On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}^n$ est un corps convexe si elle est convexe et d'intérieur non vide.*

Soit K un corps convexe compact de $\mathbb{R}^n$ contenant O dans son intérieur.

Exercice 1

Soient K_0 et K_1 deux parties convexes de $\mathbb{R}^n$. Soit θ un réel dans $[0, 1]$. Montrer que K_θ est convexe, où :

$$K_\theta = (1-\theta)K_0 + \theta K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; \exists (x_0, x_1) \in K_0 \times K_1, x = (1-\theta)x_0 + \theta x_1\}.$$

Exercice 2

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(A(K))^* = {}^tA^{-1}(K^*)$.

Exercice 3

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on pose : $I_x = \{\lambda \in \mathbb{R}_+; x \in \lambda K\}$.

1. Montrer que I_x est un intervalle fermé non majoré de $\mathbb{R}_+$.
2. On pose $j_K(x) = \inf I_x \in \mathbb{R}_+$. Soit ∂K la frontière de K. Montrer que :

$$x \in K \Leftrightarrow j_K(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad x \in \partial K \Leftrightarrow j_K(x) = 1.$$

Exercice 4

1. Expliciter K^*, j_K et j_{K^*} dans les cas suivantes :
   (a) K est le disque unité euclidien de $\mathbb{R}^2$;
   (b) K est le carré $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$;
   (c) K est un parallélogramme de centre O.
2. Montrer que K^* est un corps convexe, compact, contenant O dans son intérieur et que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad j_{K^*}(y) = \max\{\langle x, y\rangle, x \in K\}.$$

3. On suppose que K est O-symétrique. Montrer que j_K et j_{K^*} sont des normes. Que peut-on dire de $(\mathbb{R}^n, j_K)$ et de $(\mathbb{R}^n, j_{K^*})$?

Exercice 5

On note p_K la projection sur le convexe compact K.

1. Soit $a \notin K$. Soit H l'hyperplan passant par $p_K(a)$ et orthogonal à la droite passant par a et $p_K(a)$. Montrer qu'il existe une équation de H de la forme :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, u\rangle = 1\},$$

   pour un certain vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle a, u\rangle > 1$ et tel que pour tout $x \in K$, $\langle x, u\rangle \leq 1$.
2. Montrer que $(K^*)^* = K$.

Exercice 6

Soit pr_H une projection (affine) de $\mathbb{R}^n$ d'image l'hyperplan affine H et de direction quelconque D (une droite affine) non parallèle à H. On munit l'espace affine d'un repère (non nécessairement orthogonal) tel que H soit l'hyperplan d'équation $x_n = 0$ et D la droite d'équation $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$. Montrer qu'il existe ϕ_K et ϕ^K des applications de $pr_H(K)$ dans $\mathbb{R}$ respectivement convexe et concave telles que :

$$K = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in pr_H(K) \quad \text{et} \quad \phi_K(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \phi^K(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Définition 0.4 *On appelle ellipsoïde (centré en O) la boule unité pour une forme quadratique définie positive de $\mathbb{R}^n$. Cela revient au même de se donner une matrice A symétrique définie positive et de considérer le sous-ensemble $E(A)$ de $\mathbb{R}^n$ des x tels que $\langle x, Ax\rangle \leq 1$.*

`Notation:` $\mathcal{E}$ l'ensemble des ellipsoïdes.

Exercice 7

Soit A une matrice symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice B symétrique définie positive telle que $B^2 = A^{-1}$. En déduire qu'un ellipsoïde est l'image de la boule unité euclidienne par une application linéaire.

Exercice 8

Montrer que l'application $A \longmapsto (\det A)^{-1/2}$ de l'ensemble des matrices symétriques définies positives dans $\mathbb{R}_+^*$ est strictement convexe.

Exercice 9

Soit K un corps convexe compact O-symétrique de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $v \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_{K,v}$ des ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$ ayant un volume supérieur à v et inclus dans K est une partie compacte de $\mathcal{E}$.
2. En déduire qu'il existe un unique ellipsoïde E_K de $\mathbb{R}^n$ inclus dans K de volume maximal pour cette propriété.