Exercice 1 (*Extrait du sujet 2007*)

Une cubique sur un corps $\mathbb{K}$ est l'ensemble Γ des points $M = (x, y) \in \mathbb{K}^2$ annulant un polynôme du troisième degré :

$$P(X,Y) = aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + dY^3 + eX^2 + fXY + gY^2 + hX + iY + j$$

à coefficients dans $\mathbb{K}$. Dans toute la suite P est supposé non nul.

1. Dans cette question, on prend Γ la cubique définie par le polynôme $P = X^3 - Y \in \mathbb{R}[X,Y]$.
   (a) La tracer à main levée.
   (b) Démontrer que toute droite coupe Γ en exactement un ou trois points en comptant leur multiplicité éventuelle et que, lorsqu'il existe trois points d'intersection notés $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$:
   $$x_A + x_B + x_C = 0.$$

   On note Ω le point de coordonnée $(0,0)$ de Γ. Pour tout couple (A,B) de points de Γ, on considère le troisième point C d'intersection avec Γ de la droite AB (ou de la tangente en A à Γ si $B = A$), puis le troisième point d'intersection $A * B$ de la droite ΩC avec Γ. Ceci définit sur Γ une loi multiplicative $*$.

   (c) Démontrer que $(\Gamma, *)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
2. Reprendre la question 1. pour $P = X^3 - 3XY - 1 \in \mathbb{R}[X,Y]$ et $\Omega = (1,0)$ en précisant à quel groupe usuel est isomorphe $(\Gamma, *)$ dans cet exemple.
3. On étudie dans la suite des cubiques du plan projectif. On considère un polynôme non nul à trois variables :
   $$\overline{P}(X,Y,Z) = aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + dY^3 + eX^2Z + fXYZ + gY^2Z + hXZ^2 + iYZ^2 + jZ^3.$$
   La cubique associée est l'ensemble Γ des points du plan projectif dont les coordonnées homogènes (X,Y,Z) vérifient $\overline{P}(X,Y,Z) = 0$. Démontrer que l'intersection de Γ avec toute droite du plan projectif est constituée d'exactement un ou trois points, en comptant toujours les multiplicités éventuelles.
4. Dans cette question, on considère $P = Y^3 - X^2 - Y^2$ et le polynôme homogène associé $\overline{P} = Y^3 - X^2Z - Y^2Z$.
   (a) Dans cette question, on se place dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ et on considère la courbe γ d'équation $y^3 = x^2 + y^2$ privée du point $(0,0)$. En choisissant un paramétrage de γ (par exemple en coordonnées polaires), étudier cette courbe et la tracer, en précisant l'allure des branches infinies s'il en existe.

   Dans la suite de la question 4, on considère dans le plan projectif la cubique Γ d'équation $Y^3 - X^2Z - Y^2Z = 0$ privée du point de coordonnées $(0,0,1)$. On choisit pour Ω le point à l'infini $(1,0,0)$ et on définit le composé $A * B$ de deux points quelconques de Γ comme en 1.

   (b) Montrer que Γ admet comme paramétrage :
   $$\begin{cases} X = \cos\theta; \\ Y = \sin\theta; \\ Z = \sin^3\theta. \end{cases}$$
   où θ décrit $\mathbb{R}$.
   Si A et B sont deux points de Γ, caractériser le point C tel que $C = A * B$.
   (c) Démontrer que $(\Gamma, *)$ est isomorphe à un groupe usuel qu'on précisera.