Exercice 1 (*Extrait du sujet 2012*)

1. Soient p et q des entiers strictement positifs et premiers entre eux. On pose $x = \dfrac{p}{q}$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_n = \operatorname{Card}\left(\mathbb{Z} \cap [0, nx]\right) - nx,$$
pour $n \in \mathbb{N}$ est une suite périodique dont on déterminera la période.
2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. On pose $A = (a, b)$ et $B = (c, d) \in \mathbb{Z}^2$. On note $[A, B]$ le segment de $\mathbb{R}^2$ d'extrémités A et B. Démontrer que :
$$\operatorname{Card}\left([A, B] \cap \mathbb{Z}^2\right) = \operatorname{pgcd}(c - a, d - b) + 1.$$

Dans la suite de cette partie, on munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle et de la mesure usuelle, c'est-à-dire celle obtenue en faisant le produit des mesures de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On appelle polygone de $\mathbb{R}^2$ l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points. Si X est une partie de $\mathbb{R}^2$, on note ∂X sa frontière, c'est-à-dire $\overline{X} \setminus X^0$ où $\overline{X}$ désigne l'adhérence de X et X^0 son intérieur. Soit $\mathcal{P}$ un polygone de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\mathcal{P}$ est un polygone à sommets entiers s'il est l'enveloppe convexe d'une partie finie de $\mathbb{Z}^2$.
Soit $\mathcal{P}$ une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. On note $V(\mathcal{P})$ son aire. On dit que la partie $\mathcal{P}$ vérifie la formule de Pick, si elle vérifie la formule :
$$\operatorname{Card}(\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^2) = V(\mathcal{P}) + \frac{1}{2}\operatorname{Card}(\partial\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^2) + 1.$$

3. (a) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$ et $c < d$. Le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ vérifie-t-il la formule de Pick ?
   (b) Soient a, b des entiers non nuls. Le triangle obtenu comme enveloppe convexe des points $(0, 0)$, $(a, 0)$ et $(0, b)$ vérifie-t-il la formule de Pick ?
4. (a) Démontrer qu'un polygone est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Soit $\mathcal{P}$ un polygone d'intérieur non vide. Démontrer que l'intérieur de $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{P}$.
5. Soient $\mathcal{P}_1$ (respectivement $\mathcal{P}_2$) un polygone, enveloppe convexe d'une partie finie S_1 (respectivement S_2) de $\mathbb{Z}^2$. On suppose que les intérieurs de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont non vides et que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est un segment $[A, B]$ où A et B sont des éléments distincts de $S_1 \cap S_2$.
   (a) Démontrer l'égalité $[A, B] = \partial\mathcal{P}_1 \cap \partial\mathcal{P}_2$.
   (b) Démontrer que $\mathcal{P}_1$ est contenu dans l'un des demi-plans fermés de frontière la droite (AB).
   (c) On suppose que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ vérifient la formule de Pick. Démontrer qu'il en est de même pour $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$.
   (d) On suppose que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ vérifient la formule de Pick. Que peut-on dire pour $\mathcal{P}_2$?
6. Soit $\mathcal{P}$ un polygone à sommets entiers et d'intérieur non vide. Soit S un ensemble de cardinal minimal dont $\mathcal{P}$ est l'enveloppe convexe. On note N le cardinal de S.
   (a) Soit $A \in S$. Démontrer que A n'est pas barycentre à coefficients positifs de points de $S \setminus \{A\}$.
   (b) Soient A, B, C, D quatre points distincts de S. Soient (α, β, γ) le système de coordonnées barycentriques de D dans le repère affine (A, B, C) tel que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Démontrer qu'un et un seul des nombres α, β, γ est strictement négatif.
   (c) On suppose $N \geq 3$. Démontrer qu'on peut choisir une bijection $i \longmapsto A_i$ de $\{1, \dots, N\}$ sur S de sorte que A_1 soit le seul point de S dans un des deux demi-plans ouverts de frontière la droite (A_2A_3) (il est recommandé de faire un dessin).
   (d) On suppose $N \geq 4$. Soit M un point de $\mathcal{P}$ qui n'appartient pas à l'enveloppe convexe de $\{A_2, \dots, A_N\}$. Démontrer que M appartient à l'enveloppe convexe de $\{A_1, A_2, A_3\}$ (on pourra éventuellement écrire M comme barycentre à coefficients positifs des points $A_1, \dots, A_k$ avec k minimal).
   (e) Démontrer que $\mathcal{P}$ est la réunion de $N - 2$ triangles dont les sommets appartiennent à S et dont les intérieurs sont non vides deux à deux disjoints.