Exercice 1 (*Extrait du sujet 2012*)

Une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est dite polynomiale s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[T]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N} : f(n) = P(n)$.
Une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est dite quasi-polynomiale s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ et des polynômes $P_0, \ldots, P_{N-1} \in \mathbb{C}[T]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N} : f(n) = P_{r_N(n)}(n)$ où $r_N(n)$ désigne le reste de la division euclidienne de n par N.
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soient $m_1, \ldots, m_d \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{cases} u_n = \mathrm{Card}\left(\left\{(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d ; \displaystyle\sum_{i=1}^{d} m_i k_i = n\right\}\right), \\ v_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i. \end{cases}$$

1. Démontrer que la somme et le produit de deux fonctions quasi-polynomiales sont des fonctions quasi-polynomiales.
2. (a) Déterminer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $d = 1$.
   (b) L'application $n \longmapsto v_n$ est-elle quasi-polynomiale dans ce cas ?
3. Pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, on pose $U_i = \sum_{k\in\mathbb{N}} T^{km_i}$ et on définit la série formelle :
   $$U = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n T^n \in \mathbb{Z}[[T]].$$
   (a) Écrire U à l'aide des séries formelles U_i.
   (b) Déterminer le produit $U \times \prod_{i=1}^{d}(1 - T^{m_i})$.
4. On définit la série formelle $V = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n T^n$. Trouver une relation entre les séries formelles V et U.

La dérivée d'une série formelle $F = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^n$ est la série formelle $F' = \sum_{n\geq 1} n a_n T^{n-1}$. On pourra utiliser sans preuve la formule $(F_1F_2)' = F_1'F_2 + F_1F_2'$ pour des séries formelles F_1 et F_2. Les dérivées successives d'une série formelle F sont obtenues en posant $F^{(0)} = F$ et en définissant $F^{(k+1)}$ comme la dérivée de la série $F^{(k)}$.

5. On pose $G = \sum_{n\in\mathbb{N}} T^n$.
   (a) Trouver une relation entre les séries formelles G^2 (carré de la série G) et G'.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Trouver une relation entre les séries G^{k+1} et $G^{(k)}$.
   (c) Trouver des expressions explicites pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où on a les égalités $m_1 = \ldots = m_d = 1$. Montrer dans ce cas particulier que la fonction $n \longmapsto v_n$ est polynomiale.