

# The correspondence from Ernesto Cesàro to Francisco Gomes Teixeira

Pedro J. Freitas

Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia and  
Departamento de História e Filosofia das Ciências  
Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa,  
1749-016 Lisboa, Portugal  
pjfreitas@fc.ul.pt

**Abstract:** This paper presents a commented edition of the letters from Ernesto Cesàro to Francisco Gomes Teixeira, a Portuguese mathematician, present in the Coimbra Archive of correspondence sent to Gomes Teixeira.

**Keywords:** Francisco Gomes Teixeira, Ernesto Cesàro, correspondence, History of Mathematics

## Introduction

Francisco Gomes Teixeira (1851-1933) was one of the most important Portuguese mathematicians of the late 19th century and early 20th. Having graduated from the University of Coimbra in 1875, he got his doctorate later in the same year, and, in the next year, started teaching at this university. A few years later, in 1884, he moved to the Polytechnic Academy of Porto, which would later become the University of Porto, in 1911. At this time, he became Rector of the newly established university.

In addition to his scientific works, mostly in analysis, published in both Portuguese and international journals, he innovated in the field of teaching, by writing college manuals with ambitious content, which raised the level of rigour of his time, in Portugal. The manuals were *Curso de Análise infinitesimal, cálculo diferencial* (1887) and *Cálculo integral* (1889) which were edited and extended in later editions.

One may say that Gomes Teixeira's most relevant contribution for the evolution of mathematics in Portugal was the broadening of its scope, from the national to the international level. As a sign of this, we note that he received two prizes from the Royal Academy of Sciences of Madrid, in 1895 and 1897. The second of these prizes was attributed to a treatise on special curves, *Tratado de las curvas especiales notables, tanto planas como alabeadas*, which was later expanded, translated to French, and republished in 1917, after receiving another prize from the French Academy of Sciences. and later republished in an English version, in 1971. For more on his life and work, see for instance Vilhena 1936, Kharlamova 2013 and Alves 2004.

Along with the activity mentioned, there were several aspects which are central to this internationalization of Portuguese mathematics achieved by Gomes Teixeira. One of

these was the foundation, in 1877, of the scientific journal *Jornal de Sciencias Matemáticas e Astronómicas*, which we will simply refer to as JSMA (for more on this journal, see Saraiva 2014).<sup>1</sup>

The Journal benefited greatly from Gomes Teixeira's intense correspondence with some of the most renowned mathematicians of his time. The letters that Gomes Teixeira received are kept in the Archive of the University of Coimbra, which includes more than two thousand letters, indexed and catalogued by Gomes Teixeira himself. As a contribution to the analysis of this estate, this paper focuses on his correspondence with Ernesto Cesàro, one of the most represented authors: there are 11 letters and postcards from Cesàro, some of them photographically reproduced in Alves 2004, which we transcribe here, and comment for the first time.

Ernesto Cesàro (1859-1906) was one of the most notable Italian mathematicians of his time. After graduating from the Gymnasium in Naples in 1872, he studied at the École des Mines in Liège, where he studied mathematics with Catalan and published his first mathematical paper, on arithmetic. He also took the opportunity to visit Paris and attend lectures by Hermite, Darboux and others. Gomes Teixeira had started to correspond with Hermite in 1872, so it is possible that Cesàro might have known about Gomes Teixeira from Hermite.

In 1884, with the help of Cremona, Battaglini and Dini, he gained a scholarship to conduct research at the university of Rome, and published about eighty papers in the next three years, focusing on several topics, but especially number theory and intrinsic geometry, which eventually led to his major work, *Lezione di geometria intrinseca* (Naples, 1896).

It was only in 1887, after taking doctoral exams, that Cesàro was offered the chair of mathematics at Palermo, where he remained until 1891, when he moved back to Naples, to occupy the chair of mathematical analysis.

A collection of selected works by Cesàro has appeared in "Ernesto Cesàro – Opere scelte" (three volumes), published by the Unione Matematica Italiana, Edizioni Cremonese Bologna, 1964-1968.

Franco Palladino and Luciano Carbone, the guardians of Cesàro's legacy, have promoted the study of Cesàro's correspondence. The letters between Cesàro and Marcolongo are analysed in Carbone, Cardone and Palladino 1994 (Marcolongo was also a correspondent of Gomes Teixeira), and letters from Beltrami to Cesàro are studied in Palladino and Tazzioli 1996. More recently, four authors have dedicated published a paper on the correspondence between Cesàro and Catalan: Butzer, Carbone, Jongmans and Palladino (1999), and also between Cesàro and Hermite: Butzer, Carbone, Jongmans and Palladino (2000). This paper wishes to contribute to

---

<sup>1</sup> This journal is now fully digitized and can be found at [www.fc.up.pt/fa/index.php?p=nav&f=html.fbib-Periodico-oa](http://www.fc.up.pt/fa/index.php?p=nav&f=html.fbib-Periodico-oa)

continue this study.

## Letters from Cesàro

We will present and analyse the letters in chronological order, and include the number given by Gomes Teixeira to each letter in the catalogue. The distribution of the letters with time is as follows.

| Year           | 1885 | 1886 | 1887 | 1894 | 1895 | 1896 |
|----------------|------|------|------|------|------|------|
| No. of letters | 4    | 2    | 2    | 1    | 1    | 1    |

As one can see, most of the correspondence took place during Cesàro's most active years, in Rome, just before his doctoral exams and the position in Palermo (1887). A few of these letters are related to the papers Cesàro published in the JSMA, see Cesàro 1885c through Cesàro 1891.

In the text, we refer to some letters and notes Gomes Teixeira wrote to Cesàro. These are available at the "Fondo Cesàro", University "Federico II", Naples.<sup>2</sup>

### March 31, 1885

Letter 51. In this letter, Cesàro refers to a treatment given by Gomes Teixeira to a generalization of Lagrange series — it is possibly the topic of the paper Gomes Teixeira 1885b, published around the same time. He adds some remarks about one of his own papers on isobaric calculus, probably Cesàro 1884 or Cesàro 1885b, which consists of a generalization of results on symmetric polynomials.

He sends a couple of papers for publication in the JSMA, allowing them to be translated to Portuguese, these are probably Cesàro 1885c. However, we should note that every paper Cesàro published in the JSMA is in French, the most common language for foreign authors, including every other Italian author, except Gino Loria, who published in Italian. The issue of language also comes up in the next letter.

Monsieur,

Je suis resté extrêmement satisfait de l'accueil si bienveillant que vous avez fait à mes Notes sur le *Calcul isobarique*. J'aurai prochainement l'occasion de vous communiquer d'autres Notes sur le même sujet : il est probable que j'y traiterai votre remarquable généralisation de la *série de Lagrange*, en

---

<sup>2</sup> <http://pzmath.unibas.it/PRIN/STMAT/index.php/fondicesaro/carteggiocesaro/mittenti/> (consulted in March 2019.)

employant mes propres notations algorithmiques.

Vous voulez bien m'admettre à la collaboration de votre *Journal*, et je vous suis reconnaissant de la confiance que vous avez dans mes travaux. En recevant votre invitation d'écrire quelque article pour le *Journal*, j'ai seulement regretté de ne pouvoir y répondre dignement, à cause de la période de travail extraordinaire, dans laquelle je me trouve : — je me prépare, en effet, aux examens de doctorat.

Aussi, je vous prie d'accueillir avec quelque indulgence les deux petits articles qui suivent, et je vous promets que d'ici à six mois, ils seront suivis par de Notes d'une plus grande importance.

Quant aux articles en question, je consens de bon gré à ce qu'ils soient publiés en *portugais*, si, toutefois, le travail de traduction ne vous cause pas de dérangement. Je désire aussi que l'imprimeur du *Journal* réserve pour moi 30 tirages à part, et je vous prie, à cet effet, de vouloir bien lui communiquer mon adresse, afin qu'il puisse correspondre directement avec moi.

Veillez agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments de respectueuse sympathie

Ernesto Cesàro.<sup>3</sup>

Torre Annunziata, (près de Naples).  
31 Mars, 1885.

## **April 19, 1885**

Letter 50. This is a sequel to the previous letter, with the same topics.

Torre Annunziata, 19 Avril, 1885.

Monsieur,

Je vous remercie de l'accueil que vous faites à mes articles. À peine mes examens seront terminés, je mettrai nouvellement à contribution votre bonté, et j'espère que vous me permettrez de le faire dans une large mesure.

Je vois fort bien que la langue française est connue au Portugal : c'est pourquoi je vous adresse mes articles et mes lettres en français plutôt qu'en

---

<sup>3</sup> "Ernest Cesàro" in the original text. The same happens in the next two letters.

italien. Si je désire voir mes articles traduits en portugais, c'est:

1.<sup>o</sup> — pour en faciliter la lecture aux lecteurs *ordinaires* de votre *Journal*.

2.<sup>o</sup> — pour diminuer les fautes d'impression, qui sont nombreuses et inévitables lorsqu'il s'agit de composer en langue étrangère.

Dans mon intérêt et dans celui du *Journal*, il y a donc avantage à ce que mes articles soient traduits en portugais — Vous êtes libre, d'ailleurs, de faire comme il vous plaira.

J'ignorais la disposition par laquelle on accorde 30 exemplaires aux auteurs : — ce nombre est plus que suffisant, puis qu'il s'agit d'articles peu importants.

En vous remerciant de nouveau, je vous prie d'agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments respectueux.

Ernesto Cesàro

### August 14, 1885

Letter 49. In this letter, Cesàro continues to mention some of his papers, published or still to be published in the JSMA, probably part of Cesàro 1885c and Cesàro 1886a. He also acknowledges the interest of Gomes Teixeira in some of the papers he published in the *Nouvelles Annales* (Cesàro published ten papers in the *Nouvelles Annales* in 1885) and reciprocates by commenting on one of Gomes Teixeira's results on rational functions, possibly Gomes Teixeira 1885a, which he relates to some of his own results on isobaric calculus, saying he will include them in future work.

Finally, Cesàro announces the publication of a book, *Excursions arithmétiques à l'infini*, about asymptotic results in number theory, asking Gomes Teixeira to present it in Portugal. Cesàro expected this work to establish a new direction in the subject, trusting it would earn him a reputation (as it happened, he became better known for his *Lezione di geometria intrinseca*, 1896). Gomes Teixeira acknowledges the reception of this work in a letter, dated December 18, 1885, and publishes a review in the bibliography section of JMSA, vol 7, pp. 15-16.

Monsieur,

J'ai reçu votre lettre, et j'y répons à l'instant. J'apprends avec un vif plaisir que vous donnerez hospitalité à mes *Remarques* III et IV, dans votre *Journal*. Je ne tarderai pas à vous en envoyer la *suite*.

Je suis très-flatté de l'attention que vous avez bien voulu accorder à l'un de

mes articles des *Nouvelles Annales*, et j'espère que vous soyez tout aussi indulgent pour mes autres articles. Je vous enverrai, sous peu, trois nouvelles *Notes* d'arithmétique que l'on va publier dans la livraison de Mai-Juin du *Journal de Battaglini*.

Je rédige, en ce moment, une Mémoire «*Sur les fondements de l'analyse partitive*». Je ne manquerai pas d'y insérer les résultats que vous venez de me communiquer sur la *décomposition des fractions rationnelles*. Je vous serai toujours très-obligé quand vous voudrez avoir la bonté de me faire connaître vos travaux, concernant le Calcul *isobarique*. Je me bornerai à vous faire observer que mes notations isobariques actuelles sont insuffisantes pour représenter vos fonctions  $X$ , à moins que les  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  soient égaux entre eux. Si l'on veut rester dans le cas général, il faut faire usage de l'*extension* dont j'ai dit quelques mots à la fin de l'une de mes *Notes des Nouvelles Annales*.

Actuellement, je corrige les épreuves d'un ouvrage d'arithmétique intitulé «*Excursions arithmétiques à l'infini*». À peine il aura paru, je vous enverrai un exemplaire, et je vous demanderai d'en dire quelques mots dans les Journaux de votre pays. Je dois vous avouer que j'entends confier à cette ouvrage le soin de me créer une réputation. Je suis convaincu, dès maintenant, que vous resterez satisfait de mon travail, et que vous ne manquerez pas d'apprécier à leur juste valeur les vues entièrement nouvelles, que j'ai accumulés dans un nombre relativement restreint de pages, en traçant, — fort sommairement, il est vrai —, une route *vierge* à la difficile *Science des Nombres*.

Veillez agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments de respectueuse sympathie

Ernesto Cesàro.

Torre Annunziata, 14 Août, 1885.

P.S. — Je ne sais si je vous ai déjà communiqué, au sujet de mes deux premières *Remarques*, les *Errata* qui suivent:

page 20, ligne 7, au lieu de *proposé*, lisez: *proposée*

“ 21, “ 6, au lieu de *por*, lisez: *pour*

“ 22, “ 6, au lieu de  $\frac{1+x^3}{1-x^3} + x^9$ , lisez:  $\frac{1+x^3}{1-x^3} x^9$

**December 12, 1885**

Postcard 278. The book Cesàro announced in the previous letter is now edited, and he

sends a copy to Gomes Teixeira, asking him to present it to the Lisbon Academy of Sciences — a postcard from Gomes Teixeira, dated April 1886 confirms this presentation. He sends a memory on polyhedra, asking to be published in Italian, and noting that because of the number of figures it was not published in Italy. The memory was called *Forme poliedriche regolari e semi-regolari in tutti gli spazzi* and was published as a book by the Lisbon Academy of Sciences in 1886 (see Saraiva 2008).

Monsieur,

En vous remerciant pour le n.<sup>o</sup> 4 du *Jornal*, qui vient d'arriver, je saisis l'occasion pour vous annoncer l'envoi de mes «Excursions arithmétiques à l'infini», et je me permets, *dans mon intérêt*, d'appeler votre attention sur les derniers chapitres de cet ouvrage. Je vous ai expédié aussi, dans ces derniers temps, beaucoup d'articles, extraits du Journal de Battaglini et des Actes des *Lincei* : — je souhaite vivement que tout cela soit arrivé à destination. Le grand nombre de mes productions, petites et grandes, m'oblige à leur chercher de nouveaux débouchés. Aussi, je vous serais infiniment obligé si vous vouliez me faire l'honneur de présenter à l'académie de Lisbonne un de mes manuscrits : c'est un petit *Mémoire* sur les *polyèdres*, dédié à M. Cremona. Seulement, je vous préviens qu'il y a, en cela, deux inconvénients: — 1.<sup>o</sup> le mémoire est écrit en italien, et je désire qu'il soit publié en cette langue. — 2.<sup>o</sup> il contient une dizaine de *figures*, qui m'ont créé des obstacles pour la publication dans les Sociétés et Académies de mon pays. — Quoi qu'il en soit, j'espère dans votre autorité.

Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments bien respectueux,

E. Cesàro

Torre Annunziata, 12 déc., 1885.

### October 29, 1886

Postcard 275. This is a small note (on a postcard) communicating that Cesàro got a post in Palermo and asking for a work of Gomes Teixeira about development of functions in continued fractions, which he presented as a student in Coimbra — in fact, his very first scientific work, Gomes Teixeira 1871.

Torre Annunziata, 29 Octobre, 1886.

Monsieur,

Je suis heureux de vous annoncer ma nomination à professeur ordinaire de

haute algèbre à Palerme. — Je prendrai possession de ma chaire le 15 Novembre : — je vous prie donc de donner les ordres nécessaires pour que, à partir de cette date, le “Jornal” me soit adressé à l’université de Palerme, (Sicile).

En terminant, quelques “*remarques*” sur les fractions continues, j’apprends que vous vous êtes occupé, en 1871, d’un sujet ayant quelque affinité avec une de mes “*remarques*”. — Aussi, je vous serais extrêmement obligé si vous vouliez m’indiquer le moyen de consulter votre “*Desenvolvimento das funcções em fracção continua*”. —

Veillez agréer, Monsieur, l’expression de mes sentiments très-distingués.

E. Cesàro.

### **November 20, 1886**

Postcard 280. Cesàro thanks Gomes Teixeira for the note about continued fractions, complains about not getting news about the publication of his book by the Lisbon Academy of Sciences, and mentions two papers he had sent to Gomes Teixeira. They are mentioned in JMSA, vol 7 (p. 144), in the bibliography section, with a reference to the “*Giornale de Battaglini*”, vol 24, where they were published.

Torre Annunziata, 20 Nov., 86

Monsieur,

J’ai reçu le Mémoire Sur les fractions continues, et je vous en remercie vivement : — je me propose d’en faire mon profit dans la petite “*Note*” que je suis en train de rédiger. — Je suis étonné de ne pas recevoir les *épreuves* de mon Mémoire de Lisbonne. Si vous connaissez les causes de cette interruption, vous m’obligeriez beaucoup en me les communiquant. — J’espère que vous ayez reçu mon article sur le “*diamant brisé*” et ma petite *Note* de thermodynamique. — Veillez agréer, Monsieur, l’expression de mes sentiments les plus distingués.

E. Cesàro.

### **February 7, 1887**

Letter 1155. In this letter we find the first reference do Matyáš Lerch (1860-1922), a Czech mathematician, with extensive work on mathematical analysis and number theory. Lerch was of the authors that most contributed to the JSMA and, unsurprisingly,



also one of the most prolific correspondents of Gomes Teixeira, having sent him more than 50 letters. Cesàro comments on one of these letters, published in the JSMA, namely Lerch 1886, with a paper of his own, Cesàro 1889. In the next letter, he thanks Gomes Teixeira for having established contact between them.

There is also a remark about a paper by a certain José Manuel Rodrigues (another contributor to the JSMA) for publication by the *Accademia dei Lincei*, considered unfit for publication by the referees. Gomes Teixeira himself thought the paper was faulty, according to his own remark on the catalogue of letters in the archive, where he acknowledges that he sent it without having studied it in detail (see Vilhena 1936, p. 273).

Monsieur,

La lettre de M. Lerch m'a inspiré la petite Note que vous trouverez ci-joint, et que je serais heureux de voir publier [sic] dans votre "Jornal". J'ai quelques autres petits articles à vous offrir ; mas les occupations professionnelles me tiennent, en ce moment, fort empêché.

J'ai quelque chose à vous communiquer relativement au Mémoire de M. Rodrigues ; mais je ne puis vous le dire qu'en vous priant de n'en rien faire connaître à la personne intéressée, jusqu'à ce que l'affaire soit parfaitement éclaircie. — Il paraît donc que, contrairement à ce que l'on devait espérer d'un mathématicien comme M. Rodrigues, son Mémoire contient quelques fautes graves, et que les Commissaires Siacci et Cerruti n'aient pas osé, par délicatesse, le lui dire ouvertement : ils ont imaginé, alors, le prétexte que vous savez. — Un professeur de l'université de Rome à qui j'ai parlé de la chose, et qui m'a fait savoir tout cela, en me priant du secret, s'est chargé, sur ma prière, de me communiquer une copie de la relation. — Je m'empresserai de vous en envoyer une traduction, afin de voir ce qu'il y aura à faire dans l'intérêt de M. Rodrigues.

Veillez agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments les plus distingués.

E. Cesàro.

Palerme, 7 Février, 1887.

### **May 9, 1887**

Postcard 1156. The note refers to two papers by Cesàro published in the JSMA, Cesàro 1886c and Cesàro 1887, which were sent by letter to Gomes Teixeira. There is also a remark about Lerch: after Cesàro's interest in his work, published on the JSMA, Gomes

Teixeira established contact between the two mathematicians, which Cesàro acknowledges and thanks. Finally, there is a request about news regarding university life, for publication in an Italian university paper. Gomes Teixeira replies on June 28, stating that he will send the Coimbra university yearbook.

Monsieur,

Pour cause de maladie, je réponds avec retard à votre lettre du 16 Avril. Il est entendu que ma deuxième appendice paraîtra dans le N.º 1 du vol. VIII, comme *suite* à ma lettre du N.º 6 du vol. VII.\* Je vous remercie vivement de votre recommandation à M. Coelho : l'impression du "*mémoire*" marche, maintenant, fort bien. Je vous remercie également de m'avoir mis en communication avec M. Lerch. Je vous serais bien reconnaissant si vous vouliez me communiquer, de temps en temps, quelques nouvelles relatives au mouvement universitaire en Portugal, et aux questions scolaires qu'on y agite. Je tiens à les faire connaître dans un journal universitaire italien, qui vient d'être fondé à Bologne.

Veuillez agréer, Monsieur, avec mes remerciements anticipés, l'expression de mes sentiments les plus distingués.

Palerme, 9 Mai, 1887.

(\*) Je serais, cependant, bien content si vous pouviez *unifier* les deux articles dans le tirage à part.

### March 21, 1894

Postcard 1157. This is a short note in which Cesàro claims priority in a result published in the JSMA, referring to it as an easy consequence of his results in Cesàro 1885a.

Torre Annunziata, 21 Mars, 1894

Monsieur,

La question traitée par M. Vivanti dans sa note "Sur une équation aux différences finies et partielles" (*Jornal de Sciencias*, 1894) se trouve toute résolue dans la note "Dérivés des fonctions de fonctions" (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1885). On lit, en effet, dans le §14 de cette note, que la  $p$ ème dérivé de la fonction  $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$  est

$$(-1)^p p! \sum_{i=1}^{i=p} \frac{C_{p-1,i-1}}{i! x^{p+i}} \varphi^{(i)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Il suffit de faire  $\varphi(x) = e^x$  pour retrouver les résultats de M. Vivanti.

Agréez, Monsieur, l'expression de mes sentiments distingués.

E. Cesàro.

### June 15, 1895

Letter 41. This letter is a short invitation for Gomes Teixeira to be part of a Committee in charge of organizing an homage to Battaglini (1826-1894), a notable innovator of the Italian university system and one of the founders and editors of the *Giornale di matematiche*.

Monsieur,

La Faculté de Mathématiques de l'université de Naples vient de se constituer en Comité provisoire pour honorer la Mémoire de M. Battaglini, et j'ai été chargé de vous demander votre concours. C'est pourquoi je m'adresse à vous, Monsieur, en vous priant vivement, au nom de tous mes Collègues, de vouloir bien nous autoriser à mettre votre nom parmi ceux des Membres du Comité définitif.

Veuillez agréer, Monsieur l'expression de mes sentiments les plus distingués,

E. Cesàro

### December 27[?], 1896

Letter 52. After thanking Gomes Teixeira for having sent his Calculus course, Cesàro presents a result about an asymptotic law for integers (in the same vein as the ones in the book *Excursions arithmétiques à l'infini*, already mentioned). Gomes Teixeira had sent a letter on November 14, 1896, asking about the clothoid,<sup>4</sup> a curve he wanted to include in his treatise on remarkable and special curves. Cesàro confirms that the name *clothoid* was coined by himself, as a reference to Clotho, one of the three Greek Fates. Gomes Teixeira includes this curve in his treatise Gomes Teixeira 1905, pp. 397-403, using the name given by Cesàro. The paper by Cornu referred to in the letter is Cornu 1874.

---

<sup>4</sup> This curve is nowadays known as the Euler spiral or the Cornu spiral. It was studied by Bernoulli, Euler, Fresnel and Cornu.

The letter ends in a rather dramatic tone: Cesàro fears that might have to leave Italy permanently, but none of the consulted biographies, Togliatti 1980 or Mac Tutor's, registers any special event around this year.

Naples, 27[?] Déc, 1896  
(Via Sapienza, 23)

Monsieur,

Vous voudrez m'excuser si n'ai pas répondu plus tôt à votre aimable lettre. Une foule d'occupations, et même de soucis<sup>(\*)</sup>, m'en ont empêché. Je vous remercie de l'honneur que vous m'avez fait en me chargeant de présenter à l'académie la nouvelle édition de votre beau "Cours de Calcul" ainsi qu'une brochure "sur le développement, etc.". Je vous remercie aussi, en mon nom et au nom de l'académie, pour le don que vous avez voulu bien nous faire. Je vous envoie aujourd'hui, en vous priant d'en agréer l'hommage, une petite note "sur la distribution des nombres premiers", qui contient, entre autres choses, la démonstration de cette intéressante loi *asymptotique*: "Tout nombre admet autant de *non-résidus* quadratiques *premiers*, inférieurs à un carré quelconque, que de *résidus* quadratiques *premiers*, inférieurs au carré suivant."

Quant à la *clothoïde* c'est bien moi que l'ai baptisé lorsque j'en ai découvert la curieuse propriété *caractéristique* que voici: "le centre de gravité de tout arc est en ligne droite avec les centres de courbure aux points extrêmes". — Je crois que le premier à considérer la clothoïde a été M. Cornu, qui s'en est servi (pour la représentation graphique des phénomènes de diffraction) dans une note insérée au "Journal de Physique" de je ne sais plus quelle année. Il définit la courbe par les coordonnées cartésiennes orthogonales (intégrales de Fresnel)

$$x = \int_0^s \cos \frac{\pi s^2}{2} , \quad y = \int_0^s \sin \frac{\pi s^2}{2} ,$$

dont on déduit immédiatement

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \cos \frac{\pi s^2}{2} \\ \frac{dy}{ds} &= \sin \frac{\pi s^2}{2} \end{aligned} \right| \varphi = \pi \frac{s^2}{2} , \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} = \pi s,$$

et, par suite,  $s\rho = \text{constante}$  [sic], ce qui est *ma définition*.

---

<sup>5</sup> <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cesaro.html> (consulted in April, 2019.)

Je saisis cette occasion, Monsieur, pour vous prier d'agréer mes meilleures souhaits pour la nouvelle année, en même temps que l'expression de mes sentiments les plus distingués.

Cesàro.

(\*) dont vous permettrez de vous entretenir un de ces jours; car il s'agit de mon avenir, qui exige absolument mon éloignement *perpétuel* de l'Italie.

## Conclusions

Analysing these letters, we can find several points of contact between the two mathematicians, some of them becoming deeper as time went by. The most relevant, probably, are the scientific topics. Cesàro initially sent some papers for publication in the JSMA, commenting that they are not very important. However, both the importance and the length of the papers grew with time, as attested by the one about Lerch's letter. Moreover, Cesàro did pay attention to the articles published in the JSMA, as one can see by the reference to Lerch's letter and his claim of priority in one of the postcards.

Both mathematicians commented on each other's work. Cesàro thanked Gomes Teixeira for his work on continued fractions, and Gomes Teixeira welcomed Cesàro's contributions, namely the papers for the JSMA and the work on the clothoid.

Along with these, there is some personal proximity, revealed in the way Gomes Teixeira established contact between Cesàro and Lerch, and several short notes on Cesàro's personal life, such as exams he took, the positions at the university and even a possibility of having to leave Italy for good, which ended up not happening. We also note the invitation to Gomes Teixeira to engage in a Committee honoring Battaglini and the request for news regarding the university movements in Portugal.

Also, Cesàro took great interest, on a number of occasions, on the dissemination of his work in the Portuguese mathematical milieu, either in the publication of papers or in communications to the Academy of Sciences of Lisbon, as with the book *Excursions arithmétiques à l'infini*, or with his perplexity on not receiving proofs of the memory *Forme poliedriche regolari e semi-regolari in tutti gli spazzi*. This insistence may reflect the need to establish his name as a mathematician, or the difficulty Cesàro had on finding a permanent position in Italian academia — even though he had already published around eighty works by 1887, he still had to devote some time to the doctorate exams and to finding a university post.

This analysis of the correspondence from Cesàro to Gomes Teixeira is, to the best of our knowledge, the second in-depth study of the material in the archive of the correspondence received by Gomes Teixeira (the first one being a study of the correspondence from Hermite, accepted for publication at the *Revue d'histoire des*

*mathématiques*).

## Acknowledgements

The author wishes to thank Luís Saraiva, Henrique Leitão, João Queiró and António Leal Duarte for many contributions and exchanges of opinions.

Thanks also to the Archive of the University of Coimbra for the kind cooperation in the access to the letters, and to the Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT, I.P.) for funding, through project UID/HIS/00286/2019.

## Bibliography

- ALVES, MARIA DA GRAÇA (2004), *Francisco Gomes Teixeira: o homem, o cientista, o pedagogo*, PhD Thesis. Braga, Universidade do Minho.
- BUTZER PAUL, CARBONE LUCIANO, JONGMANS FRANÇOIS AND PALLADINO FRANCO (1999), *Les relations épistolaires entre Eugene Catalan et Ernesto Cesàro*, «Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique» (6) 10, pp. 223-271.
- BUTZER PAUL, CARBONE LUCIANO, JONGMANS FRANÇOIS AND PALLADINO FRANCO (2000), *Les relations épistolaires entre Charles Hermite et Ernesto Cesàro* «Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique» (6) 11, pp. 377-417
- CARBONE LUCIANO, CARDONE GIUSEPPE AND PALLADINO FRANCO (1994), *The correspondence between Ernesto Cesàro and Roberto Marcolongo*, «Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli», (4) 61, pp. 123-188.
- CESÀRO ERNESTO (1884), *Algorithme isobarique*, «Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale» 3, pp. 561-579. <<http://eudml.org/doc/100006>> (consulted in April 2019.)
- CESÀRO ERNESTO (1885a), *Dérivées des fonctions de fonctions*. «Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale» 4, pp. 41-55. <<http://eudml.org/doc/100079>> (consulted in April 2019.)
- CESÀRO ERNESTO (1885b), *Notes sur le calcul isobarique*, «Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale» 4, pp. 59-78. <<http://eudml.org/doc/100114>> (consulted in April 2019.)
- CESÀRO ERNESTO (1885c), *Remarques arithmétiques (I, II and III)*, «Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas», 6, pp. 17-23 and 91-95.

CESÀRO ERNESTO (1886a), *Remarques arithmétiques (IV)*, «Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas», 7, pp. 3-6.

CESÀRO ERNESTO (1886b), *Extraits d'une lettre a M. d'Ocagne*, «Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas», 7, pp. 28-39.

CESÀRO ERNESTO (1886c), *Remarques sur la théorie des séries*, «Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas», 7, pp. 171-177.

CESÀRO ERNESTO (1887), *Remarques sur la théorie des séries*, «Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas», 8, pp. 15-16.

CESÀRO ERNESTO (1889), *Remarques sur divers articles concernant la théorie des séries*, «Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas», 9, pp. 26-32. (Reprinted from *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3rd series, 7, 1888)

CESÀRO ERNESTO (1891), *Nouvelles remarques sur divers articles concernant la théorie des séries*, «Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas», 10, 57-71. (reprinted from *Nouvelles Annales* 3rd series, 9, 1890)

CORNU A. (1874), *Méthode nouvelle pour la discussion des problèmes de diffraction dans le cas d'une onde cylindrique*. «J. Phys. Théor. Appl.», 3 (1), pp. 5-15. <<http://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00237010>> (consulted in May 2019.)

KHARLAMOVA VERA (2013), *F. G. Teixeira e a comunidade matemática europeia nos séculos XIX-XX*, PhD Thesis, Aveiro, Universidade de Aveiro. <<http://hdl.handle.net/10773/12875>> (consulted in April 2019.)

LERCH MATHIAS (1886), *Remarque sur la théorie des séries*, «Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas», 7, pp. 79-80.

GOMES TEIXEIRA, FRANCISCO (1905), *Tratado de las curvas especiales notables*, Madrid, Imprenta de la "Gaceta de Madrid".

GOMES TEIXEIRA, FRANCISCO (1885a), *Sur la détermination de la partie algébrique de l'intégrale des fonctions rationnelles*. «Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei», Rome, 4th series, I, pp. 97-98.

GOMES TEIXEIRA, FRANCISCO (1885b), *Sur une limite relative aux polynômes de Legendre, Extra. d'une lettre adr. à M. Lerch à Prague*. «Compte-rendues de la Soc. R. d. Sc. de Bohème», 30 oct. 1885, pp. 16-20.

GOMES TEIXEIRA, FRANCISCO (1871), *Desenvolvimento das funções em frações contínuas*. Coimbra, Imprensa da Universidade.

PALLADINO FRANCO AND TAZZIOLI ROSSANA (1996) *Letters of Eugenio Beltrami to Ernesto Cesàro*, «Archive for History of Exact Science» 49 (4), pp. 321-353.

SARAIVA LUÍS (2008), *Mathematics in the Memoirs of the Lisbon Academy of Sciences in the 19th century*, «Historia Mathematica» 35, pp. 302-326.

SARAIVA LUÍS (2014), *A decisive journal in Portuguese mathematics: Gomes Teixeira's Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas (1877-1905)*", in *L'émergence de la presse mathématique en Europe au 19ème siècle*, pp. 67-95, edited by C. Gerini and N. Verdier, Milton Keynes, College Publications.

TOGLIATTI EUGENIO (1980), *Cesàro, Ernesto*, in *Dizionario Biografico degli Italiani*, vol. 24. <[http://www.treccani.it/enciclopedia/ernesto-cesaro\\_\(Dizionario-Biografico\)>](http://www.treccani.it/enciclopedia/ernesto-cesaro_(Dizionario-Biografico)>) (consulted in April, 2019.)

VILHENA HENRIQUE DE (1936), *O Prof. Doutor Francisco Gomes Teixeira (elogio, notas, notas de biografia, bibliografia, documentos)*. Lisboa.