1 Noções de Lógica

Ex 1-1 Negue as seguintes proposições:

(a) Todos os alunos desta turma são caloiros.

(b) Há caloiros nesta turma.

(c) Nenhum aluno desta turma é caloiro.

(d) Há pelo menos um aluno não caloiro nesta turma.

(e) O André é caloiro mas a Joana não é.

(f) Se o André é caloiro então a Joana também é.

(g) Ou o André é caloiro ou a Joana não é.

Usando conectivos e quantificadores traduza simbólicamente cada uma das afirmações anteriores.

Ex 1-2 Distinga os silogismos dos paralogismos:

(a) Se não chover vou à praia.
Chove muito.
Logo não vou à praia.

(b) Se não chover vou à praia.
Vou à praia.
Portanto não chove.

(c) Há engarrafamentos sempre que está a chover.
Hoje não há engarrafamentos.
Portanto hoje não está a chover.

(d) Há engarrafamentos sempre que está a chover.
Está a chover.
Logo há engarrafamentos.

Traduza simbólicamente cada um dos silogismos correctos que encontrar.

Ex 1-3 Considere um objecto que pode ser branco ou preto, redondo ou quadrado, pequeno ou grande. Esse objecto é:

(a) redondo se e somente se não fôr branco.

(b) branco se e somente se não fôr grande.

(c) redondo se fôr pequeno e branco.

Qual a sua cor, forma e tamanho?

Ex 1-4 Numa ilha há duas tribos: a tribo dos Mentirosos que mentem compulsivamente, e a tribo dos Verdadeiros[1] que nunca mentem. Um lógico (L) chega a essa ilha e encontra três nativos: a Alice (A), o Ben (B) e o Charlie (C). Passa-se o seguinte diálogo:

(L) Alice, você é Verdadeira ou Mentirosa?
(A) Er migh sur!
(L) Ben, o que é que ela disse?
(B) A Alice disse que era mentirosa. E o Charlie também é mentiroso.
(C) Não! A Alice é Verdadeira.

A que tribo pertence cada um dos três indígenas?

Ex 1-5 Uma gaveta duma cómoda tem 50 meias brancas e 50 meias pretas. Quantas meias se devem tirar, de olhos fechados, de forma a ter de certeza duas meias da mesma cor?

Ex 1-6 O pinhal de Leiria tem um milhão de pinheiros. Cada pinheiro tem no máximo 600 000 agulhas. Mostre que há, no pinhal de Leiria, pelo menos dois pinheiros com o mesmo número de agulhas.

Ex 1-7 Numa carruagem de combóio estão seis pessoas: A, B, C, D, E, F. Cada uma delas é de uma das seguintes localidades: Viseu, Coimbra, Taveiro, Santarem, Milfontes, Abrantes. Sabe-se que

(a) A e o homem de Viseu são médicos.

[1] Problema extraído do livro "Labyrinths of Reason", de William Poundstone.

(b) E e a mulher de Coimbra são professores.

(c) C e a pessoa de Taveiro são engenheiros.

(d) B e F participaram na guerra em África, mas a pessoa de Taveiro nunca foi à tropa.

(e) A pessoa de Milfontes é mais velha que A.

(f) A pessoa de Abrantes é mais velha que C.

(g) Em Santarem B e o homem de Viseu descem do combóio.

(h) No entroncamento C e o homem de Milfontes descem do combóio.

Descubra quem é donde, e qual a respectiva profissão.

Ex 1-8 No planeta Og há quatro tipos de nativos: os verdes, os vermelhos, os do norte e os do sul. Os verdes nortenhos e os vermelhos do sul dizem sempre a verdade, os verdes do sul e os vermelhos do norte mentem sempre.

(a) De noite, sem luz, encontra um nativo. Que pergunta sim-não lhe pode fazer para ficar a saber a sua cor?

((b) Um terráqueo (T) chega a Og e encontra, numa noite muito escura, um nativo (N). Passa-se o seguinte diálogo:

T: Você é vermelho?
T: Você é do sul?
T: Você não responde?
N: Se eu respondesse não às suas duas primeiras perguntas estaria a mentir pelo menos uma vez.

É possível determinar a cor e o hemisfério do nativo?

(c) Num dia claro e luminoso o terráqueo encontrou um nativo que lhe disse: "Sou um verde do norte". O terráqueo pensou um pouco e disse: "Não sei de que hemisfério ele é." De que cor era o nativo?

(d) Dois nativos, A, B, dizem o seguinte.

A: Sou verde do norte.
B: Sou verde.
B: Sou do norte.

Pode deduzir-se o tipo de algum deles?

(e) Um nativo diz: "Se sou verde então sou do sul". Qual é o seu hemisfério e a sua cor?

Ex 1-9 Na ilha de FasiVesi há dois tipos de pessoas. Os Vesis dizem sempre a verdade ou não respondem. Os Fasis mentem sempre ou não respondem. Se uma pergunta é feita de tal forma que, se respondessem, estariam a trair a sua natureza, os habitantes, naturamente, calam-se.

i) Exiba uma pergunta à qual um Fasi possa responder sim ou não, mas à qual um Vesi não pode responder.

ii) Exiba uma pergunta à qual um Vesi pode responder sim ou não mas um Fasi não pode responder.

iii) Exiba uma pergunta à qual um Vesi pode responder não mas não pode responder sim, à qual um Fasi não pode responder.

iv) Exiba uma pergunta à qual um Vesi pode responder sim mas não pode responder não, à qual um Fasi não pode responder.

v) Exiba uma pergunta à qual nem um Fasi nem um Vesi pode responder.

2 Números Reais.

Ex 2-1 Nas alíneas seguintes use os termos *inteiro*, *racional*, *irracional*, para classificar o número dado:

a) $\frac{17}{7}$	b) -6
c) $2.(13) = 2.1313\cdots$	d) $\sqrt{2} - 3$
e) $8^{1/3}$	f) $\pi - 2$
g) $0,125$	h) $9 - \sqrt{9}$
i) $0.(9) = 0.999\cdots$	j) $13\,\frac{2}{7}$

Ex 2-2 Se $x = 0.333\cdots$ então $10\,x - x = 3.333\cdots - 0.333\cdots = 3$. Logo $9\,x = 3$ $\Leftrightarrow$ $3\,x = 1$ $\Leftrightarrow$ $x = 1/3$. Usando o mesmo tipo de argumento represente os seguintes números racionais como fracções de inteiros:

a) $0.3939\cdots = 0.(39)$	b) $0.255255\cdots = 0.(255)$
c) $9.7171\cdots = 9.(71)$	d) $4.66087087\cdots = 4.66(087)$

Ex 2-3 Nos exercícios seguintes substitua o símbolo $*$ por $<, >$ ou $=$ de modo a obter afirmações correctas:

a) $\frac{3}{4} * 0.7$	b) $0.33 * \frac{1}{3}$
c) $\sqrt{2} * 1.414$	d) $4 * \sqrt{16}$
e) $-\frac{2}{7} * -0.285714$	f) $\pi * \frac{22}{7}$

Ex 2-4 Em cada uma das alíneas seguintes encontre uma desigualdade da forma $|x - c| < \delta$ cuja solução seja o intervalo aberto dado:

a) $]-2, 2[$	b) $]-3, 3[$
c) $]0, 4[$	d) $]-3, 7[$
e) $]-4, 0[$	f) $]-7, 3[$

3 Funções reais de variável real.

Ex 3-1 Diga quais das seguintes aplicações são: injectivas, sobrejectivas ou bijectivas:

(a) $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ tal que $f(a) = 1$, $f(b) = 3$ e $f(c) = 1$.

(b) $f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3\}$ tal que $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $f(c) = 1$ e $f(d) = 3$.

(c) $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $f(a) = 1$, $f(b) = 3$ e $f(c) = 4$.

(d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x) = x + 1$.

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$.

(f) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$.

(g) $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ tal que $f(x) = x^2$.

Ex 3-2 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por $f(x) = 2\,|x|$. Determine $f([-2, 0])$ e $f^{-1}([-1, 3])$.

Ex 3-3 Sejam c e f duas variaveis representando a mesma temperatura medida respectivamente em graus Celsius (C) e em graus Fahrenheit (F). A relação entre c e f é linear. O ponto de congelamento da água é de $c = 0^o$C ou $f = 32^o$F. A temperatura de ebulição é de $c = 100^oC$ ou $f = 212^oF$.

(a) Determine a fórmula de conversão da temperatura em graus Fahrenheit para a temperatura em graus Celsius.

(b) Existe alguma temperatura para a qual os valores em graus Celsius e Fahrenheit sejam iguais? Determine-a em caso afirmativo.

(c) A relação entre a temperatura absoluta k, medida em graus Kelvin (K), e a temperatura c, em graus Celsius (C), é linear. Sabendo que $k = 273^o$K quando $c = 0^o$C e $k = 373^o$K quando $c = 100^o$C determine k em função de f.

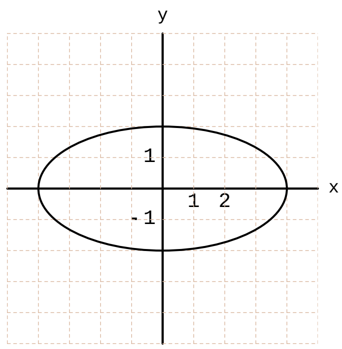
Ex 3-4 Determine se cada curva é o gráfico de uma função $y = f(x)$. Em caso afirmativo,

a) indique o domínio e imagem (contra-domínio) da função f,

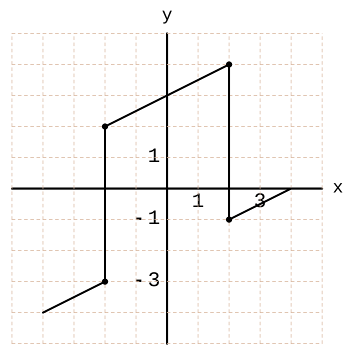
b) determine se f é injectiva.

Sendo f injectiva, identifique o domínio e esboce o gráfico da função inversa, $x = f^{-1}(y)$.

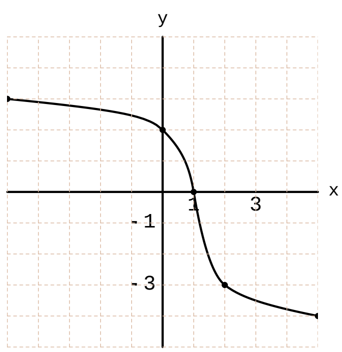
a)



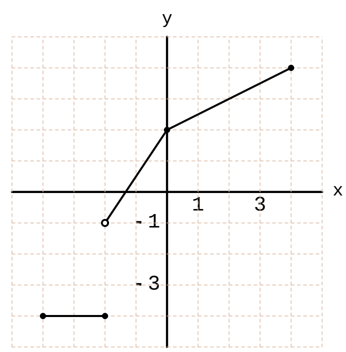
b)



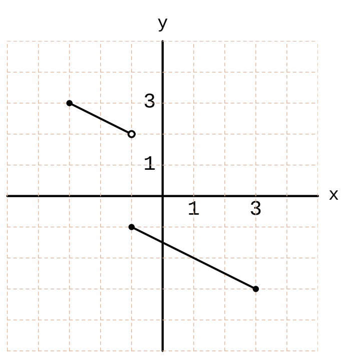
c)



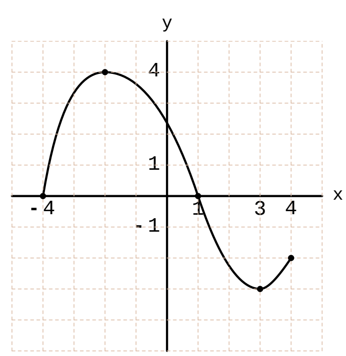
d)



e)

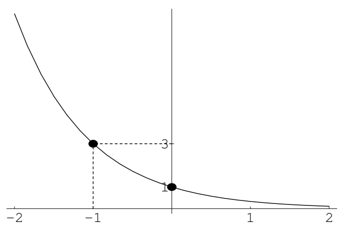


f)

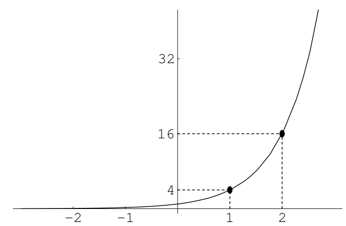


Ex 3-5 Encontre uma fórmula possível para cada uma das funções representadas pelos gráficos seguintes.

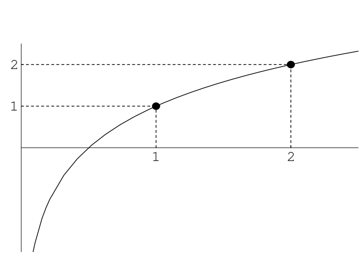
a)



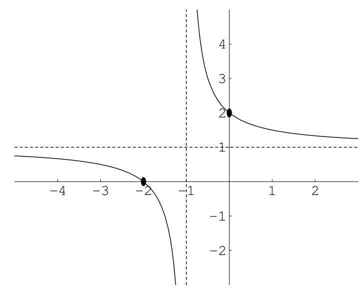
b)



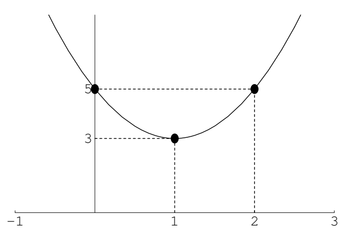
c)



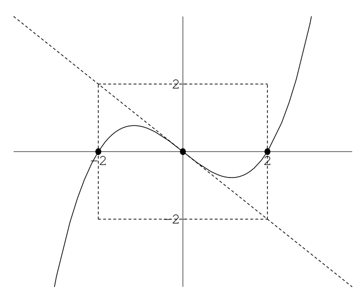
d)



e)



f)



Ex 3-6 Usando a função logarítmo natural, resolva as seguintes equações:

a)	$2 = (1.02)^t$	b)	$120 = 10^t$	c)	$40 = 100\, e^{-t}$
d)	$6^t = 4\, 2^t$	e)	$5\, e^t = 10$	f)	$5\, 2^{-t} = 10\, 3^t$

Ex 3-7 As funções seguintes representam a evolução de diferentes populações de bactérias, ao longo do tempo medido em horas, desde um certo instante inicial $t = 0$.

a)	$P_1(t) = 10\,(1.08)^t$	b)	$P_2(t) = 5\,(1.17)^t$
c)	$P_3(t) = 25\,(0.79)^t$	d)	$P_4(t) = 10\,(0.88)^t$

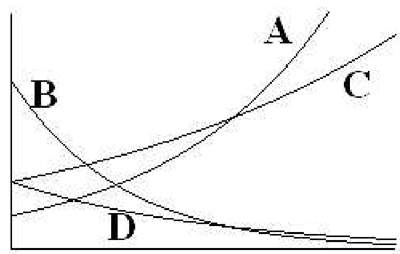
(a) Qual das populações tem a maior taxa de crescimento relativo?

(b) Qual das populações é maior no instante inicial $t = 0$?

(c) Qual das populações tem a maior taxa de crescimento absoluto no instante inicial $t = 0$?

(d) Existem populações decrescendo de tamanho? Se sim, quais?

Ex 3-8 Os gráficos seguintes representam as populações do exercício anterior.



Estabeleça a correspondência entre os gráficos A, B, C e D, e as funções $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ e $P_4(t)$.

Ex 3-9 Considere uma população cuja evolução ao longo do tempo, medido em horas, é descrita por uma função $P(t)$ satisfazendo a seguinte relação:

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = 0.02 \qquad t \geq 0 \ .$$

(a) Interprete a relação acima. Qual a taxa de crescimento percentual, ao ano, desta população?

(b) Supondo que a população tem uma dimensão inicial $P(0) = 1\,250\,000$, e que ela é expressa por uma função exponencial da forma $P(t) = P_0\, a^t$, determine os valores das constantes P_0 e a.

4 Limites

Ex 4-1 Seja a um número real fixo. Determine os limites

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad \text{e}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},$$

sendo

a) $f(x)=5x+2$ b) $f(x)=4x+5x^2$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ d) $f(x)=\sqrt{x+2}$.

Ex 4-2 Estude os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{|x|}{x}$, $a\in\{-2,0\}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^4-1}{x^3-1}$, $a\in\mathbb{R}$

(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$, onde $f(x)=\begin{cases}\sin x^2 & \text{se } x<0\\ \log(1+x) & \text{se } x>0\end{cases}$

(d) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$

(e) $\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)$, onde $f(x)=\begin{cases}3 & \text{se } x \text{ é inteiro}\\ 1 & \text{caso contrário}\end{cases}$

Ex 4-3* Em cada uma das alíneas abaixo, supondo que $f(x)$ satisfaz a desigualdade indicada para todo $x>1$, veja se pode concluir a existência do seguinte limite à direita: $L=\lim_{x\to 1^+} f(x)$, e nesse caso identifique-o.

(a) $|f(x)-2|\le\dfrac{x-1}{x+1}$

(b) $|f(x)+2|\le 2\sqrt{x-1}$

(c) $f(x)+2\ge\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

(d) $|f(x)+2| \leq \dfrac{x+1}{x-1}$

Ex 4-4 Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt{x}}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(2x)}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(2x+1)}{\log x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+1}-(|x|-2)^{1/3})$

Ex 4-5 Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n) tais que $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ e

(a) $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = 0$

(b) $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = 10$

(c) $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = +\infty$

(d) $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = -\infty$

(e) $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n$ não existe.

Ex 4-6 Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n) tais que $u_n \to 0$, $v_n \to +\infty$ e

(a) $\lim_{n\to\infty} u_n\, v_n = a$, com $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

(b) $\lim_{n\to\infty} u_n\, v_n = 0$

(c) $\lim_{n\to\infty} u_n\, v_n = +\infty$

(d) $\lim_{n\to\infty} u_n\, v_n = -\infty$

(e) $\lim_{n\to\infty} u_n\, v_n$ não existe.

Ex 4-7 Usando o teorema das sucessões enquadradas, calcule o limite das seguintes sucessões:

(a) $n!/n^n$

(b) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}$

(c) $(a/n)^n, \; a \in \mathbb{R}$

(d) $\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \cdots + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}$

Ex 4-8 Calcule os seguintes limites

a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 4^n}{5^n + 7^{n+1}}$

c) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})$

d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^{2n} + 4^n}{5^n + 7^{n+1}}$

e) $\lim_{n\to\infty} n - \sqrt{2n+1}\sqrt{n+3}$

f) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n+1}\right)^n$

g) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n+2}$

h) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{3n}$

i) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^n$

j) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

k) $\lim_{n\to\infty} n \sin(n\pi)$

l) $\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n}$

m) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$

n) $\lim_{n\to\infty} n^n$

o) $\lim_{n\to\infty} (n^3 + n)^{1/n}$

p) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$

q) $\lim_{n\to\infty} 3^{-n} \sin(n^4 + n^2 + 3n + 2)$

r) $\lim_{n\to\infty} (3^n + 7^n)^{1/n}$

s) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n-3}{3n+5-5^{1/n}}$

t) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+4}{4^{1/n} + 3n}$

Ex 4-9 Cada sucessão (a_n), em que a_n é definido por uma das seguintes expressões, converge para 0.

a) $a_n = \dfrac{1}{n!}$ b) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ c) $a_n = \dfrac{1}{n^n}$

d) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ e) $a_n = \dfrac{1}{\log n}$

(a) Para cada uma destas sucessões encontre o mais pequeno inteiro N, tal que $|a_n - 0| < 0.001$ para toda a ordem $n \geq N$.

(b) Qual das sucessões acima indicadas converge mais rapidamente para zero?

(c) Compare-as assintóticamente. Identifique os pares de sucessões acima, em que a primeira seja um infinitésimo relativo da segunda.

Ex 4-10* Recordemos que, dadas sucessões de números reais (x_n) e (y_n),

$$x_n = o(y_n) \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0 \quad \text{e} \quad x_n \sim y_n \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1 \,.$$

Para cada uma das sucessões $x_n = e^n\, n^{-3}$, $x_n = n^2 + n^3$ e $x_n = n^2 \log n$, escolha a alternativa correcta:

(A) $x_n \sim n^3$

(B) $x_n = o(n^3)$

(C) $n^3 = o(x_n)$

(D) nehuma das anteriores.

Ex 4-11 Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) Se (x_n) e (y_n) são sucessões divergentes, então a sucessão $(x_n + y_n)$ é divergente.

(b) Se (x_n) e $(y_n + x_n)$ são sucessões convergentes, então a sucessão (y_n) é convergente.

Ex 4-12 Considere a sucessão (a_n) definida por $a_1 = 0.3$, $a_2 = 0.33$, $a_3 = 0.333$, $a_4 = 0.3333$, etc.

(a) Determine o mais pequeno inteiro N tal que $\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < 0.01$ para toda a ordem $n \geq N$.

(b) Determine o mais pequeno inteiro N tal que $\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < 0.001$ para toda a ordem $n \geq N$.

(c) Dado $\epsilon > 0$ determine $p(\epsilon)$ tal que $\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < \epsilon$ para toda a ordem $n \geq p(\epsilon)$.

5 Continuidade.

Ex 5-1

(a) Prove que a sucessão $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ é monótona e convergente.

(b) Prove que o limite $L = \lim u_n$, satisfaz $\frac{1}{2} \leq L \leq 1$.

Ex 5-2 Determine os pontos de continuidade e descontinuidade das funções, onde $I(x)$ representa a parte inteira de x.

(a) $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^2} - 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

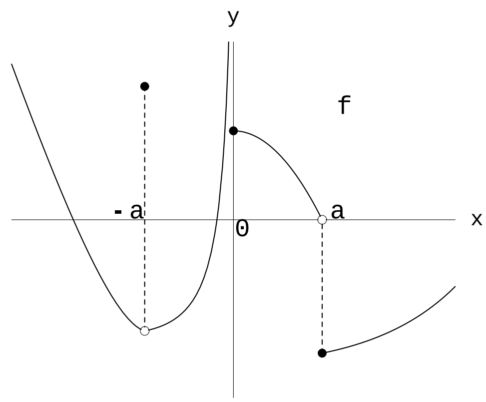
(b) $f(x) = xI(x), \quad x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} (x+1)\, 2^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} - 1 & x < 0 \\ I(x) + x & x \geq 0 \end{cases}$

Ex 5-3* Veja se cada um dos pontos $-a$, 0 e a é um ponto de: continuidade à esquerda, continuidade à direita, descontinuidade removível, descontinuidade de 1ª espécie (i.e. com limites laterais finitos e diferentes), ou descontinuidade de 2ª espécie (i.e.nem removível, nem de 1ª espécie) da função f representada na figura seguinte:



Ex 5-4 Considere as seguintes funções reais de variável real:

(a) $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$

(c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 5x + 4}}{x^2 + 4x + 3}$

(a) Indique, em termos de intervalos, o domínio de cada uma das funções.

(b) Verifique se as funções f, g e h se podem prolongar por continuidade a todo $\mathbb{R}$.

(c) Verifique se a função $h(x)$ se pode prolongar por continuidade ao ponto $x = -1$.

Ex 5-5 Mostre que as seguintes equações têm soluções nos intervalos indicados:

(a) $x = \cos x, \quad x \in [0, \pi/2]$.

(b) $x = -\log x, \quad x \in]0,1]$.

(c) $2 + x = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$.

(d) $x = f(x), \quad x \in [a,b]$ onde $f : [a,b] \to [a,b]$ é uma função contínua com valores no intervalo $[a,b]$.

Ex 5-6* Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tabelada em 5 pontos.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1.2	2.9	0.2	1.2	3.3

(a) Em quais dos seguintes intervalos $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ e $[3,4]$ pode garantir que a equação $1.9 = f(x)$ tem pelo menos uma raíz?

(b) Para cada um dos outros intervalos desenhe o gráfico de uma função contínua, com os valores acima tabelados, onde essa equação não tenha soluções.

Ex 5-7 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que os limites seguintes existem e são finitos:

$$A_+ = \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{e} \quad A_- = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

(a) Dê um exemplo de uma função nestas condições sem máximo nem mínimo.

(b) Dê um exemplo de uma função nestas condições, com $A_+ = A_-$, que não tenha mínimo (respectivamente máximo).

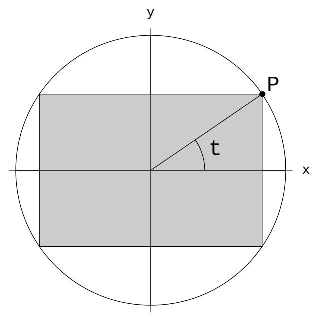
(c) Mostre que qualquer função f nestas condições é limitada.

(d) Mostre que toda a função nas condições acima com $A_+ = A_-$, ou tem máximo ou tem mínimo.

Ex 5-8 Considere a família de todos os rectângulos inscritos no círculo unitário cujos lados são paralelos aos eixos coordenados.

(a) Veja que é possível representar as áreas daqueles rectângulos por uma função $A(t)$ do ângulo $t \in [0, \pi/2]$ que o vértice $P = (\cos t, \sin t)$ no 1º quadrante faz com o semi-eixo positivo das abcissas.

(b) Mostre que a função $A(t)$ tem um máximo. Determine-o.



Ex 5-9

(a) Mostre que a função $f(x) = x^4 + x - 1$ tem pelo menos duas raízes reais.

(b) Seja $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ um polinómio de grau par tal que $a_0 < 0$ e $a_n = 1$. Mostre que $P(x)$ tem pelo menos duas raízes reais.

Ex 5-10 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ x+1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(a) Encontre f^{-1} e esboce o seu gráfico.

(b) Mostre que f e f^{-1} são estritamente crescentes.

(c) As funções f e f^{-1} são contínuas em todos os pontos?

Ex 5-11 Em cada uma das alíneas seguintes esboce o gráfico de uma função f definida em $[0,1]$ e satisfazendo (se possível) as condições dadas:

(a) f contínua em $[0,1]$ com valor mínimo 0 e valor máximo 1.

(b) f contínua em $[0,1[$ com valor mínimo 0 e sem valor máximo.

(c) f contínua em $]0,1[$ assume os valores 0 e 1 mas não assume o valor $\frac{1}{2}$.

(d) f contínua em $[0,1]$ assume os valores -1 e 1 mas não assume o valor 0.

(e) f contínua em $[0,1]$ com valor mínimo 1 e valor máximo 1.

(f) f contínua em $[0,1]$, não constante, não assume valores inteiros.

(g) f contínua em $[0,1]$ não assume valores racionais.

(h) f contínua em $[0,1]$ assume um valor máximo, um valor mínimo e todos os valores intermédios.

(i) f contínua em $[0,1]$ assume apenas dois valores distintos.

(j) f contínua em $]0,1[$ assume apenas três valores distintos.

(k) f não contínua em $]0,1[$ tem por imagem um intervalo aberto e limitado.

(l) f não contínua em $]0,1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado.

(m) f contínua em $]0,1[$ tem por imagem um intervalo ilimitado.

(n) f contínua em $[0,1]$ tem por imagem um intervalo ilimitado.

(o) f não contínua em $[0,1]$ tem por imagem o intervalo $[0,+\infty[$.

(p) f contínua em $[0,1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado.

6 Composição de funções.

Ex 6-1 Caracterize as funções compostas $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$, sendo:

a) $f(x) = 2x^2 - x$ e $g(x) = 3x + 2$
b) $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(x) = x^2$
c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

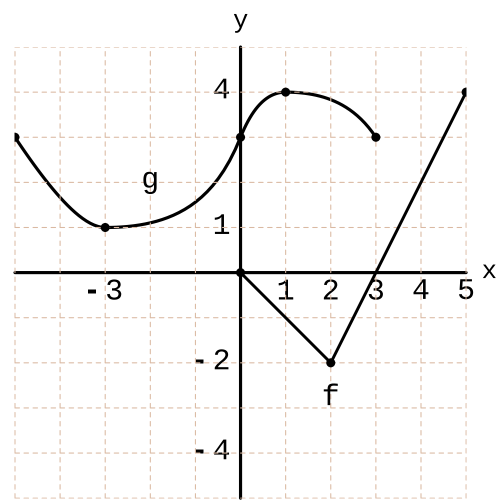
Ex 6-2 Use a tabela em baixo para avaliar cada uma das expressões seguintes:

a) $f(g(1))$ b) $g(f(1))$ c) $f(f(1))$
d) $g(g(1))$ e) $(g \circ f)(3)$ f) $(f \circ g)(6)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

Ex 6-3 Use os gráficos de f e g, esboçados na figura em baixo, para avaliar cada uma das expressões seguintes, ou explicar porque não está definida:

a) $f(g(1))$ b) $g(f(0))$ c) $(f \circ g)(0)$
d) $(g \circ f)(5)$ e) $(g \circ g)(-3)$ f) $(f \circ f)(4)$



Ex 6-4 Seja $\mathcal{B}$ a classe formada por todas as funções a seguir enumeradas:

(a) as funções constantes.

(b) as potências de expoente natural $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P_n(x) = x^n$.

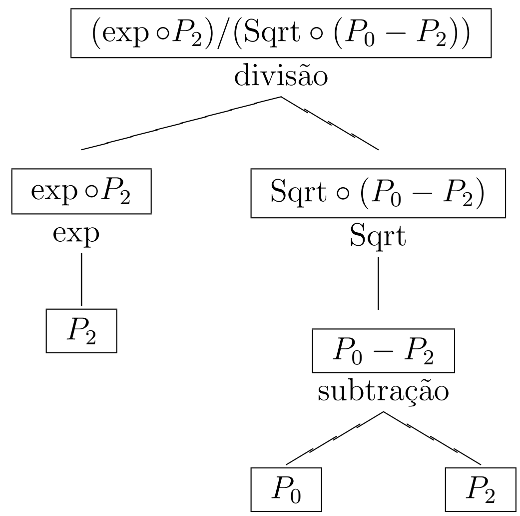
(c) a função raíz quadrada, $\mathrm{Sqrt} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\mathrm{Sqrt}(x) = \sqrt{x}$.

(d) a função exponencial, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e a sua inversa o logarítmo neperiano, $\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

(e) as funções trignométricas seno e coseno: $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Vamos dizer que uma função é $\mathcal{B}$-elementar se puder ser obtida a partir de funções em $\mathcal{B}$ à custa das operações de adição, subtracção, multiplicação, divisão e composição de funções.

(a) Mostre que a função $f = (\exp\circ P_2)/(\mathrm{Sqrt}\circ(P_0 - P_2))$ é $\mathcal{B}$-elementar baseado na seguinte árvore generativa:



Obtenha uma expressão explícita para $f(x)$ e determine o seu domínio.

(b) Mostre que cada uma das funções a seguir é $\mathcal{B}$-elementar. Para cada uma, obtenha o domínio e a sua árvore generativa.

$g(x) = 1 - 2\,x + x^2$ $\qquad$ $h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$i(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{e^x}$ $\qquad$ $j(x) = \frac{x}{\sin x} + \frac{\sin x}{x}$

$k(x) = \log\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ $\qquad$ $\ell(x) = \cos\left(x + \frac{1}{\log x}\right)$

Ex 6-5* Sendo $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos(x)$ e $h(x) = \sqrt{x}$, qual das seguintes expressões: $\dfrac{f\circ g}{h}$, $f\circ\dfrac{g}{h}$, $\dfrac{g\circ f}{h}$ ou $\dfrac{g}{h}\circ f$, repesenta a função

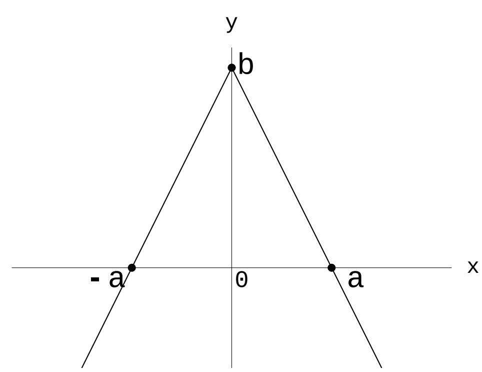
$$u(x) = \frac{e^{\cos(x)}}{\sqrt{x}}\ ?$$

Ex 6-6 Determine g tal que $f\circ g = F$, sabendo que:

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad F(x) = a^2x^2 + \dfrac{1}{a^2x^2}$

(b) $f(x) = x^3, \quad F(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^4}\right)^2$

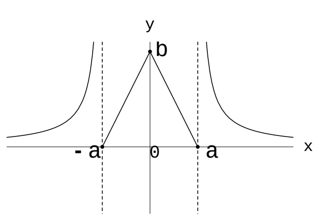
Ex 6-7 A figura seguinte representa o gráfico de uma função real de variavel real $f(x)$

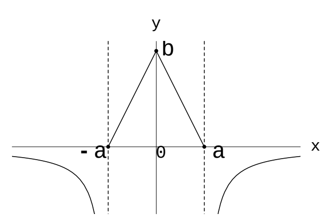


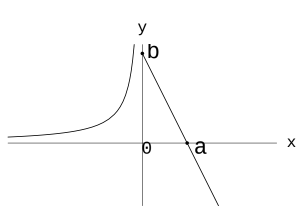
Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

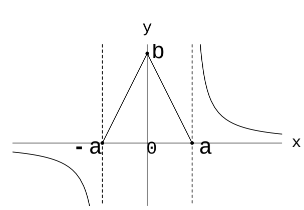
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ x^{-1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

qual dos gráficos abaixo que representa a função $g \circ f$?

a) 

b) 

c) 

d) 

Descreva funções f tais que a composição $g \circ f$ corresponda a cada um dos outros três gráficos.

Ex 6-8 Considere a função $f(x) = \sin x$, definida no intervalo $x \in [0, 2\,\pi]$. Esboce o gráfico de cada uma das funções seguintes e indique o respectivo domínio:

a) $|f(x)|$
b) $f(-x)$
c) $-f(-x)$
d) $f(x) + 1$
e) $f(x + 1)$
f) $f(2x)$
g) $2\,f(x)$

Resolva o mesmo problema para as funções $g(x) = x^2$ definida em $\mathbb{R}$ e para $h(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $x \in]0, +\infty[$.

Ex 6-9 Suponha dado o gráfico $y = f(x)$. Escreva uma equação para o gráfico que se obtem de $y = f(x)$ pela transformação descrita em cada alínea:

a) translação vertical 2 unidades para cima.

b) translação vertical 2 unidades para baixo.

c) translação horizontal 2 unidades para a esquerda.

d) translação horizontal 2 unidades para a direita.

e) reflexão em torno do eixo dos xx.

f) reflexão em torno do eixo dos yy.

g) expansão vertical por um factor 2.

h) contracção vertical por um factor 2.

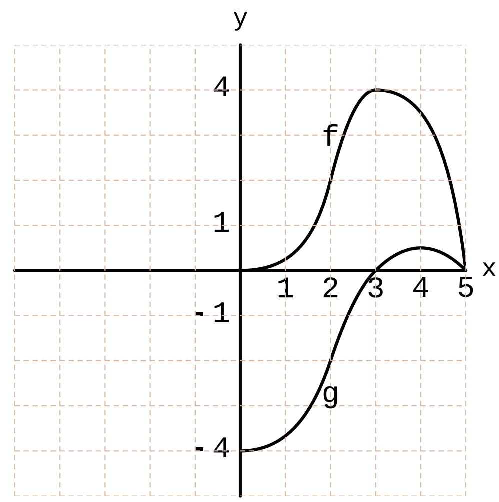
i) expansão horizontal por um factor 2.

j) contracção horizontal por um factor 2.

Ex 6-10 Estenda os gráficos das funções f e g ao intervalo $[-4, 0]$, sabendo que:

a) tanto f como g são funções pares,

b) as funções f e g são ímpares.



Ex 6-11 Determine se são pares, ímpares, ou nem pares nem ímpares as funções seguintes:

a) $f(x) = 2\,x^5 - 3\,x^2 + 2$ b) $f(x) = 2\,x^3 - x^7$
c) $f(x) = \cos(x^2)$ d) $f(x) = 1 + \sin x$

Ex 6-12 Seja $g\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

e $f(x) = x + 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Verifique que

$$\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)\ .$$

Este resultado contradiz o teorema da função composta (para funções contínuas)? Justifique.

7 Indução e Recursividade.

Ex 7-1 Prove, recorrendo ao método de indução matemática, que:

(a) $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $1+2^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(c) $2^{n-1} \leq n!$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Ex 7-2 Considere a sucessão

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$$

(a) Calcule os três primeiros termos da sucessão.

(b) Prove por indução que

  (1) $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

  (2) (u_n) é crescente.

(c) Prove que (u_n) é convergente e determine o limite.

Ex 7-3 Considere a equação recursiva,

$$x_n = x_{n-1} + a\,n\,, \quad \text{para todo o} \ \ n \geq 1\,.$$

Encontre uma expressão algébrica para x_n em função de x_0, a e n.

Ex 7-4* Seja (a_n) uma sucessão definida por

$$x_1 = 3 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = -\frac{1}{4}\,a_n \quad \text{se} \ \ n \geq 1\,.$$

(a) Prove, por indução que $a_n = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

(b) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Ex 7-5* Seja (x_n) uma sucessão definida recursivamente por

$$x_0 = 1/9 \quad \text{e} \quad x_n = 3\,x_{n-1} \quad \text{se} \;\; n \geq 1\,.$$

(a) Encontre uma expressão explícita para x_n.

(b) Calcule $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Ex 7-6* Considere a sucessão (a_n) cujos primeiros quatro termos vêm indicados na tabela seguinte.

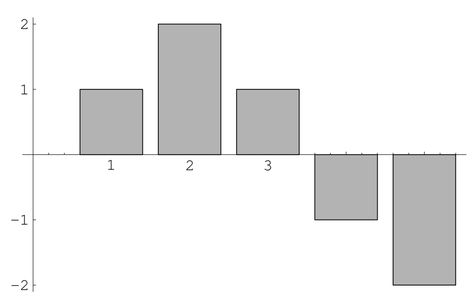
$n =$	0	1	2	3
$a_n =$	-5	-2	1	2

Seja (x_n) uma outra sucessão satisfazendo a seguinte equação recursiva

$$x_{n+1} = x_n + a_n\ .$$

Sabendo que $x_4 = -6$, determine x_0.

Ex 7-7* Considere a sucessão (a_n) cujos primeiros cinco termos vêm indicados no seguinte gráfico de barras verticais.

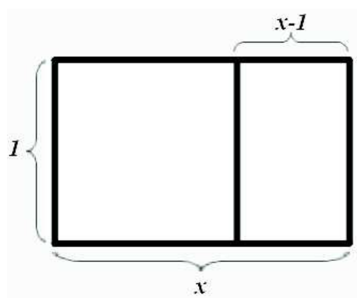


Seja (x_n) uma outra sucessão satisfazendo a seguinte equação recursiva

$$x_{n+1} = x_n + a_n \ .$$

Sabendo que $x_5 = 3$, determine x_0.

Ex 7-8 Chama-se *proporção de um rectângulo* à razão entre os comprimentos dos seus lados maior e menor. A razão de um rectângulo é sempre um número maior ou igual a um. Chama-se *razão de oiro* à proporção de um rectângulo que possa ser decomposto num quadrado e noutro rectângulo exactamente com a mesma proporção.



(a) Mostre que a razão de oiro λ é solução da equação

$$x = 1 + \frac{1}{x} \ .$$

(b) Veja que as raízes desta equação são $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618034\cdots$ e $-\lambda^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618034\cdots$.

(c) Mostre que quaisquer que sejam os números a, $b \in \mathbb{R}$, a sucessão

$$x_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n ,$$

satisfaz a equação recursiva

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \ , \quad \text{para todo o } \ n \geq 2 \ .$$

(d) Determine os coeficientes a e b de modo que a sucessão da alínea anterior satisfaça as condições iniciais $x_0 = x_1 = 1$. Como relaciona a sucessão obitda com a sucessão de Fibonacci?

(e) Mostre que a sucessão de Fibonacci, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $f_0 = f_1 = 1$, satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ .$$

Ex 7-9 Considere o número de oiro $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618034\cdots$, e a sucessão (r_n) definida recursivamente por $r_1 = 1$, e

$$r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}} \,, \quad \text{para } \ n > 1 \ .$$

Mostre que:

(a) Sendo f_n a sucessão de Fibonacci, $r_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}$, para todo o $n \geq 1$.

(b) Para todo o $n \geq 1$, $r_n \geq 1$.

(c) Para todo o $n \geq 1$,
$$|r_n - \lambda| \leq \frac{1}{\lambda} |r_{n-1} - \lambda| \ .$$
Sugestão: $|r_n - \lambda| = \left|1 + \frac{1}{r_{n-1}} - 1 - \frac{1}{\lambda}\right| \leq \left|\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{\lambda}\right|$.

(d) Para todo o $n \geq 1$,
$$|r_n - \lambda| \leq \frac{1}{\lambda^{n+1}} \ .$$

(e) $\lim_{n\to\infty} r_n = \lambda$.

Ex 7-10 Uma pequena ilha está ligada ao continente através de uma ponte rodoviária. A tabela seguinte mostra os fluxos φ_n de entrada de automóveis na ilha em cada hora[2], entre as 8h e as 16h.

n-ésima hora	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16
fluxo φ_n	7	8	12	6	-7	-10	-15	-3

[2] Para cada hora n entre as 9h e as 16h, o fluxo φ_n representa o número de veículos que entram, menos os que saiem, entre as $n-1$ e n horas.

Relacione os fluxos φ_n com o número de veículos, V_n, presentes na ilha à hora n. Sabendo que $V_{12} = 52$ automóveis, determine o número de carros que se encontravam na ilha:

(a) às 8 horas.

(b) às 16 horas.

Ex 7-11 Um tanque com a capacidade de $5000\,m^3$ continha $221\,m^3$ de água no instante em que começa a encher. A água é debitada no tanque a um caudal que vai diminuindo hora a hora, até que o reservatório fique completamente cheio. Sabemos que durante a $n-$ésima hora, contada a partir do instante em que o tanque começa a encher, a água é debitada a um caudal constante de $100 - n$ metros cúbicos por hora. Determine então:

(a) uma equação recursiva para o volume de água, V_n, no tanque ao fim de n horas.

(b) uma expressão algébrica para a quantidade de água $V_n - V_0$, que é debitada no reservatório durante as n primeiras horas.

(c) se as primeiras 100 horas chegam, ou não, para encher o tanque, e, em caso afirmativo, ao fim de quantas horas fica cheio o reservatório.

Ex 7-12 Considere uma sucessão (x_n) satisfazendo a equação recursiva

$$x_{n+1} - 2\,x_n + x_{n-1} = a_n \;, \qquad \text{para } n > 1 \;,$$

onde x_n descreve a posição de um móvel sobre um eixo, medida em metros ao fim de n segundos, e a_n a aceleração, em metros por segundo quadrado, no instante n. Imagine-se a controlar o movimento através da aceleração[3] a_n cujo valor pode escolher em cada instante sem exceder o limite de 5 metros por segundo quadrado, i.e. $|a_n| \leq 5 \;\; m/s^2$, para todo o $n = 1, 2, 3, \cdots$. Supondo que $v_0 = 30 \;\; m/s$ ($= 108 \;\; Km/h$), veja se é possivel

(a) parar o móvel em 4 segundos. Qual o tempo mínimo para conseguir parar o móvel?

[3] A aceleração a_n no instante n corresponde à variação $v_{n+1} - v_n$ entre a velocidade no segundo imediatamente anterior a n, $v_n = x_n - x_{n-1}$ (m/s), e a velocidade no segundo posterior, $v_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ (m/s).

(b) parar o móvel em menos de 30 metros. Qual a distância mínima para conseguir parar o móvel?

Supondo $v_0 = 0\ (m/s)$, qual

(a) a distância máxima que consegue percorrer em 4 segundos?

(b) o tempo mínimo para percorrer os primeiros 50 metros?

Ex 7-13 Neste problema usaremos números naturais para medir, a intervalos de duas décadas, um período de 200 anos que começa em 1820. A variavel x_n representará o número de habitantes de um país no ano $1820 + 20\,n$. A tabela seguinte mostra as taxas de crescimento populacional[4], que suporemos constantes em cada um dos dez períodos de 20 anos. A taxa τ_n reporta-se ao intervalo de tempo entre os anos $1820 + 20\,(n-1)$ e $1820 + 20\,n$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
τ_n	0.092	0.087	0.078	0.065	0.049	0.033	0.02	0.011	0.006	0.003

(a) Encontre uma equação que defina recursivamente a sucessão (x_n) em função das taxas τ_n, e utilize-a para obter uma expressão algébrica para x_n em função de x_0 e das taxas τ_n.

(b) Se as taxas τ_n fossem constantes a sucessão x_n seria uma progressão geométrica. Justifique a afirmação e diga qual a razão da progressão.

(c) Usando a tabela acima determine o número de habitantes no ano 2020, sabendo que o país tinha 500 000 habitantes no ano de 1820.

Ex 7-14 Considere as sucessões $\{a_n\}$ definidas recursivamente por

(a) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \qquad (n \geq 1)$

(b) $a_1 = 0 \qquad a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 1}{a_n + 3} \qquad (n \geq 1)$

(c) $a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} \qquad (n \geq 1)$

Mostre que cada uma das sucessões $\{a_n\}$ converge e determine o seu limite.

[4] Define-se a *taxa de crescimento populacional* como o número de novos habitantes na população por ano e por habitante.

8 Derivadas e Diferenciabilidade.

Ex 8-1 Para cada uma das funções apresentadas determine a sua derivada formando o quociente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

e tomando o limite quando h tende para 0.

a)	$f(x) = c$	b)	$f(x) = 4\,x + 1$
c)	$f(x) = 2\,x^3 + 1$	d)	$f(x) = 1/(x+3)$
e)	$f(x) = x^3 - 4\,x$	f)	$f(x) = 1/\sqrt{x}$

Ex 8-2 Em cada uma das alíneas o limite dado representa a derivada de uma função f num certo ponto c. Determine f e c em cada caso.

a)	$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 - 1}{h}$	b)	$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-2+h)^3 + 8}{h}$
c)	$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$	d)	$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

Ex 8-3 Encontre equações para as rectas tangente e normal ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ sendo

a)	$f(x) = 5\,x - x^2$	e	$a = 4$
b)	$f(x) = 1/x^2$	e	$a = -2$

Ex 8-4 Determine os coeficientes A, B e C de modo que a curva

$$y = A\,x^2 + B\,x + C$$

passe pelo ponto $(1, 3)$ e seja tangente à recta $4\,x + y = 8$ no ponto $(2, 0)$.

Ex 8-5 Determine condições em a, b, c e d que garantam que o gráfico de

$$p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d\,, \qquad a \neq 0$$

tenha

(a) exactamente duas tangentes horizontais.

(b) exactamente uma tangente horizontal.

(c) nenhuma tangente horizontal.

Ex 8-6 Determine os pontos onde a tangente à curva:

a) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, é horizontal.

b) $y = -\cos x + \dfrac{1}{3}\cos^3 x$, é horizontal.

c) $y = \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)$, é perpendicular à recta $y - \sqrt{2}\,x = 1$.

d) $y = \arcsin\dfrac{x}{3}$, é paralela à recta $y = \frac{1}{3}x + 3$.

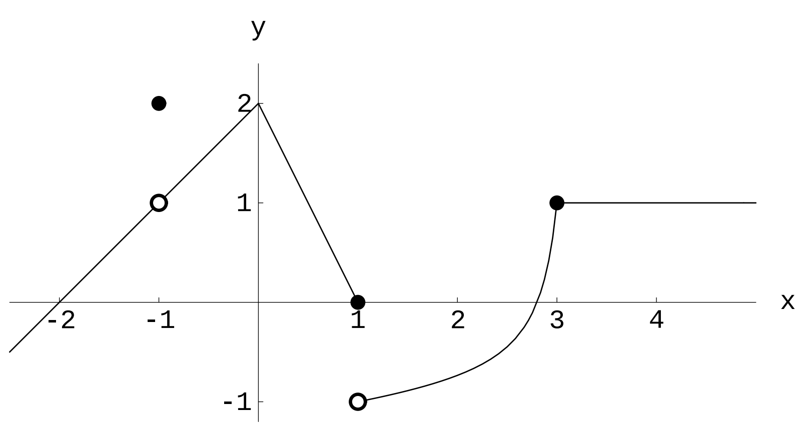
Ex 8-7 Encontre um polinómio quadrático $P(x)$ tal que $P(1) = 3$, $P'(1) = -2$ e $P''(1) = 4$.

Ex 8-8* Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R} - \{0, 2\}$. Estude a continuidade e diferenciabilidade de f nos pontos $a = 0$ e $a = 2$, conhecida a seguinte tabela de limites laterais:

	$f(a)$	$f(a^+)$	$f(a^-)$	$f'(a^+)$	$f'(a^-)$
$a = 0$	2	2	2	-1	-1
$a = 2$	-1	0	-1	0	0

onde $f(a^\pm) = \lim_{x\to a^\pm} f(x)$ e $f'(a^\pm) = \lim_{x\to a^\pm} f'(x)$.

Ex 8-9 Considere uma função com o seguinte gráfico



(a) Em que pontos f não é contínua? Em cada caso veja se é uma descontinuidade removível, uma descontinuidade por salto, ou nenhum dos casos anteriores.

(b) Em que pontos f é contínua mas não diferenciável?

Ex 8-10 Para cada uma das funções seguintes

a) $f(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2\,x^3 + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e $c = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ (x+1)^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$ e $c = -1$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x \leq 2 \\ 2\,x - 2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ e $c = 2$

1) Discuta a continuidade de f no ponto c.

2) Determine

$$f_-{}'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

e

$$f_+{}'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

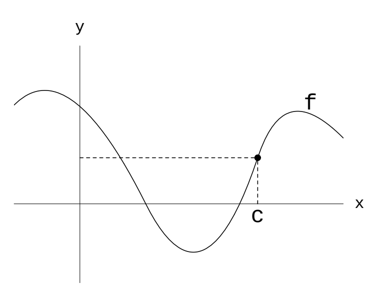
3) Diga se f é diferenciável no ponto c.

Ex 8-11 Sabendo que f é uma função diferenciável, seja g a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \leq c \\ f'(c)(x-c) + f(c) & \text{se} \quad x > c \end{cases}$$

(a) Mostre que g é diferenciável em c. Qual é o valor de $g'(c)$?

(b) Supondo que o gráfico de f é



esboce o gráfico de g.

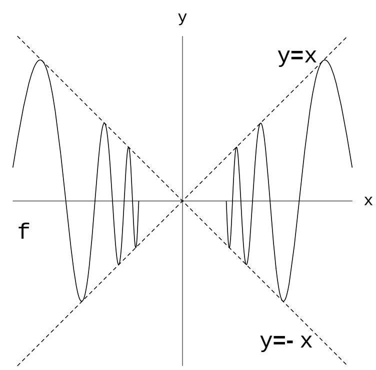
Ex 8-12 Sejam

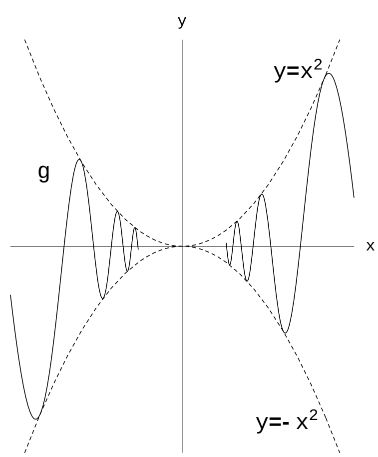
$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Os gráficos de f e g são representados nas figuras seguintes:





(a) Mostre que f e g são ambas contínuas em 0.

(b) Mostre que f não é diferenciavel em 0.

(c) Mostre que g é diferenciavel em 0 e indique $g'(0)$.

Ex 8-13 Seja $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \le 0 \\ 0 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que $g'(0)$ e $g''(0)$ existem ambos e determine os seus valores.

(b) Determine $g'(x)$ e $g''(x)$ para todo o x.

(c) Mostre que $g'''(0)$ não existe.

(d) Esboce o gráfico de g.

Ex 8-14 Sendo

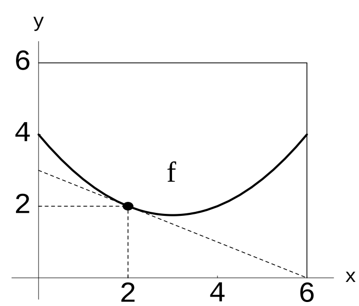
a) $y = (x+1)(x+2)$ b) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$

c) $y = \dfrac{x^2-3}{x}$ d) $y = 7\,x^3 - 6\,x^5$

Calcule

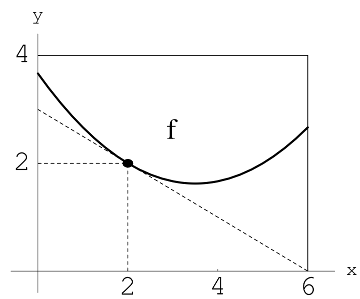
1. $\dfrac{dy}{dx}$ 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 3. $\dfrac{d}{dx}\left(y\,\dfrac{dy}{dx}\right)$

Ex 8-15* A figura seguinte representa o gráfico de uma função $f(x)$ e da recta tangente a esse gráfico no ponto $(x,y) = (2,2)$.



Sendo $g(x) = f(x^2 - x)$, qual o valor da derivada $g'(2)$?

Ex 8-16* A figura seguinte representa o gráfico de uma função $f(x)$ e da recta tangente a esse gráfico no ponto $(x,y) = (2,2)$.



Sendo $g(x) = f(x) - [f(x)]^2$, qual o valor da derivada $g'(2)$?

Ex 8-17 Sabendo que $h(0) = 3$ e $h'(0) = 2$, determine $f'(0)$ em cada alínea

a) $f(x) = x\,h(x)$ b) $f(x) = h(x) + \dfrac{1}{h(x)}$

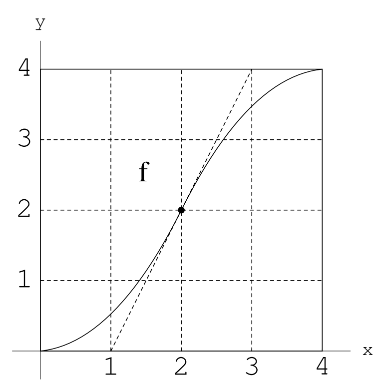
Ex 8-18 Mostre que cada uma das funções seguintes é injectiva na região indicada e determine a derivada $\frac{dx}{dy}$, onde $x = f^{-1}(y)$, expressa em função de y.

a) $y = f(x) = x^2 + 1$ $x \in]0, +\infty[$

b) $y = f(x) = x^3 + 3\,x + 2$ $x \in \mathbb{R}$

c) $y = f(x) = 2 - \cos(3\,x)$ $x \in]0, \pi/3[$

Ex 8-19* Seja $f : [0, 4] \to [0, 4]$ a função diferenciável em baixo à esquerda.



(a) Desenhe o gráfico da sua inversa $g = f^{-1}$.

(b) Determine a derivada de $g = f^{-1}$ no ponto $x = 2$.

Ex 8-20 Encontre os valores de c, caso existam, para os quais a tangente ao gráfico de

$$f(x) = x/(x+1)$$

no ponto $(c, f(c))$ seja paralela à recta que passa pelos pontos $(1, f(1))$ e $(3, f(3))$.

Ex 8-21 Considere a função

$$f(x) = (x^2 - 4)\, x$$

e determine, justificando:

(a) um intervalo onde a função satisfaça as condições do teorema de Rolle.

(b) o(s) ponto(s) do referido intervalo que verificam a tese do Teorema de Rolle.

Ex 8-22 Prove que f satisfaz as condições do teorema de Rolle e indique no intervalo dado os números c tais que $f'(c) = 0$.

(a) $f(x) = x^3 - x; \qquad [0, 1].$

(b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8; \qquad [-2, 2].$

(c) $f(x) = \sin x; \qquad [0, 2\pi].$

Ex 8-23

(a) Aplicando o Teorema de Rolle demonstre que a equação

$$x^3 - 3x + b = 0$$

não pode ter mais do que uma solução no intervalo $[-1, 1]$ qualquer que seja o valor de b.

(b) Indique para que valores de b, existe exactamente uma solução da equação em $[-1, 1]$.

Ex 8-24 Prove que $x^2 = x \sin x + \cos x$ tem apenas duas soluções reais.

Ex 8-25

(a) Prove que a equação $4x^3 + 6x = 1$ não tem zeros em $]-1, 0[$.

(b) Prove que a equação $x^4 + 3x^2 - x = 2$ tem um único zero em $]-1, 0[$.

Ex 8-26 Seja $f(x)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que, $f(2) = -f(4) = 1$. Considere a função $g(x) = xf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Prove que a equação $g'(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz positiva.

(b) Prove que existe $x \in]0, 2[$ tal que $g'(x) = 1$.

Ex 8-27 Prove que f satisfaz as condições do teorema do valor médio e indique no intervalo dado os números c que satisfazem a conclusão do teorema.

(a) $f(x) = x^2; \qquad [1, 2]$.

(b) $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x; \qquad [1, 4]$.

(c) $f(x) = x^3; \qquad [0, 8]$.

Ex 8-28 Prove que na parábola

$$y = Ax^2 + Bx + C\,, \quad \text{com} \quad A \neq 0 \quad \text{e} \quad A, B, C \in \mathbb{R}\,,$$

a corda que une os pontos de abcissas $x = a$ e $x = b$ é paralela à tangente no ponto de abcissa $x = \frac{a+b}{2}$, quaisquer que sejam a, $b \in \mathbb{R}$.

Ex 8-29 Aplicando o Teorema do valor médio prove que:

(a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ para todo o $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$ para todo o $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) $\dfrac{x-a}{x} < \log \dfrac{x}{a} < \dfrac{x-a}{a}$, $0 < a < x$.

(d) $\tan x > x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ex 8-30 Considere a função $f(x)$ tal que $|f'(x)| \leq k$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Prove que,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{para todo o } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ex 8-31 Verifique as desigualdades, estudando o sinal da derivada de uma função adequada:

a) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, $\quad x > 0$.

b) $x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x$, $\quad x > 0$.

c) $\dfrac{2}{\pi} x < \sin x < x$, $\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

d) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$, $\quad x > 0$.

Ex 8-32 Existe alguma função diferenciável f que satisfaça as seguintes condições, $f(0) = 2$, $f(2) = 5$ e $f'(x) \leq 1$ no intervalo $]0, 2[$? Justifique.

Ex 8-33 Existe alguma função diferenciável f tal que:

$$f(x) = 1 \iff x = 0, 2, 3$$

$$\text{e} \quad f'(x) = 0 \iff x = -1,\ 3/4,\ 3/2\ ?$$

Justifique.

Ex 8-34* Seja $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciavel tal que

(a) $f(0) = 0$ e $f'(0) = 2$.

(b) $f(6) = 0$.

(c) $f''(x) < 0$, para todo $x \in [0, 6]$,

Justifique porque é válida cada uma das afirmações seguintes:

a) $f'(x) = 0$, tem uma única raíz em $[0, 6]$, que corresponde a um máximo da função f.

b) $f(x) < 2\,x$, para todo $0 < x \leq 6$.

Ex 8-35* Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciavel tal que

(a) $f''(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(0) = f'(0) = 0$ e $f(1) = 2$.

Justifique porque é válida cada uma das afirmações seguintes:

a) $f'(x) > 0$, para todo $x > 0$

b) $f'(x) < 0$, para todo $x < 0$

c) A equação $f(x) = 1$ tem uma única raíz no intervalo $[0, 1]$

d) $f(x) > 0$, para todo $x \neq 0$

e) $f'(1) > 2$

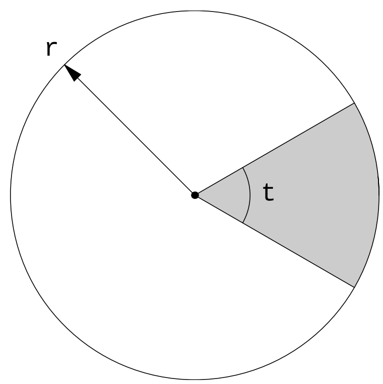
f) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

9 Aplicações do Cálculo Diferencial.

Ex 9-1 Encontre a taxa de variação da área de um quadrado em função do comprimento d da sua diagonal. Qual a taxa quando $d = 4$?

Ex 9-2 As dimensões de um rectângulo variam de modo a sua área permanecer constante. Encontre a taxa de variação da sua altura h em função da sua largura ℓ.

Ex 9-3 A área de um sector circular de raio r e ângulo t, medido em radianos, é dada pela fórmula $A = \frac{1}{2}\,r^2 t$.



(a) Supondo que o raio r permanece constante encontre a taxa de variação de A em função de t.

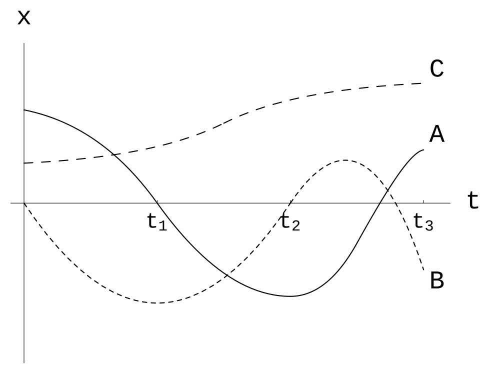
(b) Supondo que o ângulo t não varia encontre a taxa de variação de A em função de r.

(c) Supondo que a área A permanece constante encontre a taxa de variação de t em função de r.

Ex 9-4 Um objecto move-se ao longo de um eixo de coordenadas sendo a sua posição no instante $t \geq 0$ dada por $x(t)$. Em cada uma das alíneas seguintes encontre a posição, velocidade e aceleração no instante t_0.

a) $x(t) = 4 + 3\,t - t^2,\quad t_0 = 5$
b) $x(t) = t^3 - 6\,t,\quad t_0 = 2$
c) $x(t) = \dfrac{2\,t}{t+3},\quad t_0 = 3$
d) $x(t) = (t^2 - 3\,t)(t^2 + 3\,t),\quad t_0 = 2$

Ex 9-5 Objectos A, B e C movem-se na vertical ao longo do eixo dos xx. As suas posições desde o instante $t = 0$ até $t = t_3$ estão representadas nos gráficos da figura seguinte:



Em cada alínea encontre o objecto que:

(a) inicia o movimento mais acima.

(b) termina o movimento mais acima.

(c) tem maior velocidade, em valor absoluto, no instante t_1.

(d) mantem o sentido do movimento durante o intervalo de tempo $[t_1, t_3]$.

(e) inicia o movimento subindo.

(f) termina o movimento a descer.

(g) inverte o sentido do movimento no instante t_2.

(h) acelera durante o intervalo de tempo $[0, t_1]$.

(i) desacelera (trava) durante o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$.

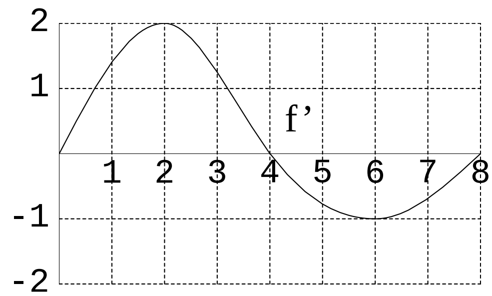
(j) inverte o sentido do movimento no intervalo de tempo $[t_2, t_3]$.

Ex 9-6 Um objecto move-se ao longo de um eixo vertical, eixo dos xx, sendo a sua posição no instante $t \geq 0$ dada por $x(t)$. Em cada alínea determine o(s) intervalo(s) de tempo, se existirem, durante os quais o objecto satisfaz a condição dada.

a)	$x(t) = t^4 - 12\,t^3 + 28\,t^2$,	move-se para cima.
b)	$x(t) = t^3 - 12\,t^2 + 21\,t$,	move-se para baixo.
c)	$x(t) = 5\,t^4 - t^5$,	acelera.
d)	$x(t) = 6\,t^2 - t^4$,	trava.
e)	$x(t) = t^3 - 6\,t^2 + 15\,t$,	move-se para baixo travando.

f)	$x(t) = t^3 - 6\,t^2 + 15\,t,$	move-se para cima travando.
g)	$x(t) = t^4 - 8\,t^3 + 16\,t^2,$	move-se para cima acelerando.
h)	$x(t) = t^4 - 8\,t^3 + 16\,t^2,$	move-se para baixo acelerando.

Ex 9-7* Uma função $x = f(t)$ descreve o movimento de um objecto sobre o eixo dos xx, no intervalo de tempo $t \in [0, +\infty[$. O gráfico da sua derivada, $f'(t)$, vem representado na figura em baixo.



Classifique o sentido, e o caracter acelerado/desacelerado, do movimento em cada um dos intervalos de tempo $[0, 2]$, $[2, 4]$, $[4, 6]$ e $[6, 8]$.

Ex 9-8 Escreva a fórmula de Taylor, para as seguintes funções:

a)	$f(x) = \log x,$	potências de $(x - 1)$, resto de ordem 3.
b)	$g(x) = \dfrac{1}{1 - x},$	potências de x, resto de ordem 1.
c)	$h(x) = \cos x,$	potências de $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, resto de ordem 1.
d)	$j(x) = e^{x^2},$	potências de x, resto de ordem 3.

Ex 9-9 Considere as funções $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$ e $g(x) = \ln(1 + x^2)$.

(a) Escreva as suas fórmulas de Taylor com potências de x e resto de ordem 3.

(b) Usando a alínea anterior calcule:

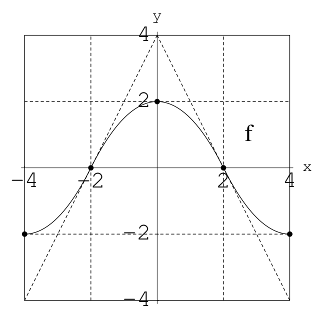
$$\lim_{x \to 0} \frac{-x^2 + \operatorname{arctg} x^2}{\ln(1 + x^2)}$$

Ex 9-10 Utilize o desenvolvimento de Taylor para determinar:

(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$

(b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos x - \sqrt{2}}{2\sin x - \sqrt{2}}$

Ex 9-11* Considere a seguinte função $f(x)$, que supomos ser duas vezes diferenciável no intervalo $[-4, 4]$.



(a) Ache os desenvolvimentos de Taylor de $f(x)$ nos pontos $x = -2$ e $x = 2$.

(b) Calcule os limites

$$\lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x+2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2}$$

Ex 9-12 Considere a função $f(x) = ae^x + be^{-x}$ com $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

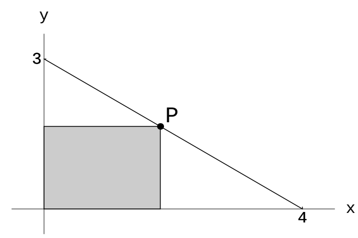
(a) Mostre que: se $f(x)$ tem um extremo local então $ab > 0$.

(b) Supondo $ab > 0$, indique justificando em que condições esse extremo é máximo ou mínimo. Em cada um dos casos estude o sentido da concavidade do gráfico de $f(x)$.

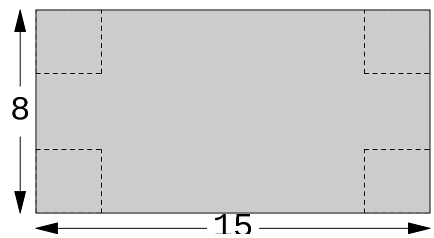
Ex 9-13 Encontre o maior valor possível do produto xy com $x > 0$, $y > 0$ e $x + y = 40$.

Ex 9-14 Encontre as dimensões de um rectângulo com perímetro 24 e, área máxima.

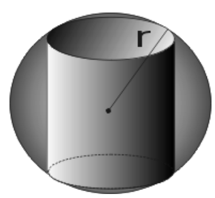
Ex 9-15 Determine as coordenadas de P que tornam máxima a área do rectângulo da figura abaixo.



Ex 9-16 Num rectângulo de cartão com dimensões 8×15 recorte quatro quadrados iguais, um em cada canto, (veja a figura em baixo). A peça em forma de cruz assim obtida, é dobrada numa caixa aberta. Quais são as dimensões dos quadrados a recortar se queremos que o volume da caixa resultante seja máximo?



Ex 9-17 A figura mostra um cilindro circular inscrito numa esfera de raio R. Determine as dimensões do cilindro de modo a que o seu volume seja máximo.



Ex 9-18 Calcule os seguintes limites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}, a, b > 0$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-\log x)}{\log(1-x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x^6 + 3x^5)^{\frac{1}{3}} - x(1+x)$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right)$

j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{e^{\frac{\log x}{x}} - 1}$

Ex 9-19 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) = e^{-x}(\cos x - 2\sin x) \quad \text{e} \quad g(x) = e^{-2x}(\sin x - \cos x)\ .$$

(a) Mostre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

(b) Mostre que não existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Sugestão: Considere as sucessões $x_n = 2n\pi$ e $y_n = \alpha + 2n\pi$, onde $\tan\alpha = 1/2$.

(c) Mostre que existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(d) Isto contradiz a Regra de Cauchy dos limites?

Ex 9-20 Qual o erro efectuado no cálculo do seguinte limite, usando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to1} \frac{6x}{2} = 3$$

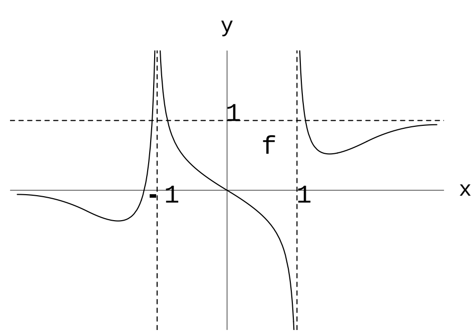
(O limite inicial é -4).

Ex 9-21 Determine $f'(0)$ sendo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciavel, com segunda derivada, g'', contínua, satisfazendo $g(0) = g'(0) = 0$ e $g''(0) = 17$.

Ex 9-22 O gráfico da função f é dado pela seguinte figura:



(a) Determine:

$$\lim_{x\to -1} f(x),\ \lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to 1^+} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x) \quad e \lim_{x\to -\infty} f(x).$$

(b) Escreva as equações das assíntotas verticais, ao gráfico de f, se as houver.

(c) Escreva as equações das assíntotas horizontais, ao gráfico de f, se as houver.

Ex 9-23* Seja $f(x)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ tal que $f(x) < 1$ para todo $x \neq 1$. Sabendo que $x = 1$, $y = 1$ e $y = x + 1$ são assíntotas ao gráfico de $f(x)$, quanto valem os seguintes limites?

(a) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ (b) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (c) $\lim_{x\to -\infty} f'(x)$
(d) $\lim_{x\to +\infty} f'(x)$ (e) $\lim_{x\to 1} f(x)$

Ex 9-24 Represente graficamente as funções:

(a) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

(b) $f(x) = \sin x - \cos x$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(d) $f(x) = xe^{-x}$

(e) $f(x) = \dfrac{\log^2 x}{x}$

(f) $f(x) = e^x \sin x$

(g) $f(x) = \dfrac{10}{1+\sin^2 x}$

Ex 9-25 Estude as seguintes funções, determinando o domínio, as assíntotas, máximos, mínimos, sentidos das concavidades e pontos de inflexão. Represente graficamente as funções.

a) $f(x) = x^3 - x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = x^2 e^{-x}$

d) $f(x) = x \log x$

e) $f(x) = \sin x + \cos x$

f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

g) $f(x) = x^2 (x-1)^3$

h) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

i) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

j) $f(x) = x^2 \log |x|$

k) $\arcsin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

Ex 9-26 Represente o gráfico da função f contínua que satisfaz as seguintes condições. Indique quando existem assíntotas ao gráfico.

(a) $f(3) = 0, \quad f(0) = 4, \quad f(-1) = 0, \quad f(-2) = -3;$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$$

$$\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \text{se } x < -2, \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > -2 \text{ e } x \neq 1, \\ f''(x) < 0 & \text{se } x > 1 \text{ ou se } x < -4, \\ f''(x) > 0 & \text{se } -4 < x < 1. \end{array}$$

(b) $f(0) = 0, \quad f(3) = f(-3) = 0;$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

$f''(x) < 0$ para todo o $x \neq \pm 1$.

Ex 9-27* Considere uma função duas vezes diferenciável $f(x)$ satisfazendo as seguintes condições:

(a) $f(-3) = -1, \quad f(0) = -2, \quad$ e $\quad f(3) = 0,$

(b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad$ e $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1,$

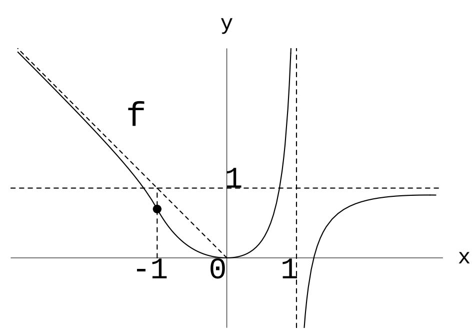
(c) $f''(x) > 0$ se $|x| < 3 \quad$ e $\quad f''(x) < 0$ se $|x| > 3$

(d) $f'(x) < 0$ se $x < 0 \quad$ e $\quad f'(x) > 0$ se $x > 0$

(1) Desenhe o gráfico de $f(x)$.

(2) Considere o movimento de um móvel descrito pela função $f(x)$. Em cada intervalo de tempo $]-\infty, -3]$, $[-3, 0]$, $[0, 3]$ e $[3, +\infty[$, classifique esse movimento como sendo acelerado ou desacelerado.

Ex 9-28* Considere a seguinte função:



Complete a tabela com a variação dos sinais da primeira e segunda derivada da função $f(x)$. Os dez campos devem ser preenchidos com os seguintes sinais: "$-\infty$", "$-$", "0", "$+$" e "$+\infty$". Cada entrada representa o sinal, ou limite, da função $f(x)$ no ponto, ou intervalo, respectivo.

x	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	$+\infty$
$f'(x)$	-1		$-$				$+\infty$		
$f''(x)$	0		0		$+$		$\pm\infty$		0

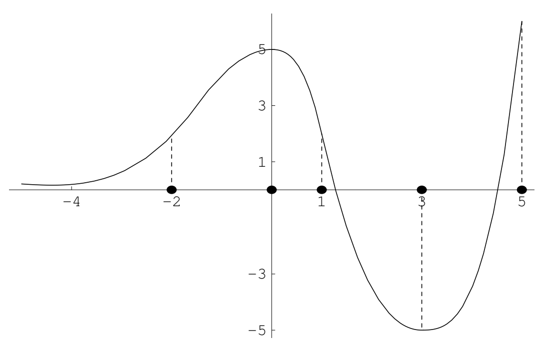
Ex 9-29* Seja $f(x)$ uma função diferenciável no intervalo $[0,8]$, decrescente no intervalo $[2,6]$ e crescente nos intervalos $[1,2]$ e $[6,8]$. A concavidade da função está virada para baixo no intervalo $[0,4]$, virada para cima em $[4,8]$. Faça o esboço do gráfico da sua derivada, $f'(x)$, no intervalo $[0,8]$.

Ex 9-30 Aplique o método de Newton para encontrar a terceira aproximação, x_2, da raíz de cada uma das equações em baixo, partindo da aproximação inicial x_0.

(a) $x^3+x+1=0$, $x_0=-1$
(b) $x^3-x^2-1=0$, $x_0=1$
(c) x^4-20 , $x_0=2$
(d) $x^7-100=0$, $x_0=2$

Ex 9-31 Para cada aproximação inicial, determine gráficamente o que acontece se o método de Newton fôr aplicado à função a seguir desenhada.

(a) $x_0=-2$ (b) $x_0=0$ (c) $x_0=1$
(d) $x_0=3$ (e) $x_0=5$



10 Integrais e Primitivas.

Ex 10-1 Determine a primitiva F da função f que satisfaz a condição indicada, em cada um dos casos seguintes:

a) $f(x) = \sin 2x,$ $F(\pi) = 3.$

b) $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1,$ $F(0) = 3.$

c) $f(x) = 3\sqrt{x+3} + 1,$ $F(-1) = 3.$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x},$ $F(2) = 3.$

Ex 10-2 Primitive as funções seguintes, indicando um intervalo onde essa primitivação seja válida:

a) $\sqrt{3x} + \sqrt{\frac{x}{3}}$ b) $3\sin x + 2x^3$

c) $(1 + \sqrt{x})^2$ d) $\dfrac{x^2}{1 + x^3}$

e) 3^{x+1} f) $x\, e^{-x^2}$

g) $e^x \sin e^x$ h) $\dfrac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}$

i) $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$ j) $\dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}$

k) $\dfrac{x}{1 + x^4}$ l) $x\sqrt{1 + x^2}$

m) $\dfrac{\sqrt[3]{\log x}}{x}$ n) $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

o) $\dfrac{x}{\sqrt{1 - 2x^4}}$ p) $\dfrac{1}{2 + 3x^2}$

q) $\operatorname{tg} x$ r) $\dfrac{\log x^3}{x}$

s) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ t) $\dfrac{1}{1+e^x}$

u) $\dfrac{x^3}{x+1}$ v) $\sin^3 x + \cos^4 x$

w) $\operatorname{tg}^2 x$ x) $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

y) $\dfrac{1}{x \log x}$ z) $a^x e^x$

Ex 10-3 Utilize o método de primitivação por partes, ou outro, para primitivar as seguintes funções, indicando os respectivos intervalos de primitivação:

a) $x \cos x$ b) $x^2 \cos x$ c) xe^x
d) $e^x \sin x$ e) $x^2 e^x$ f) $x \log x$
g) $x \operatorname{arctg} x$ h) $\log x$ i) $\log(2x+3)$
j) $\operatorname{arctg} x$ k) $\arcsin x$

Ex 10-4 Primitive as seguintes funções, indicando um intervalo onde esta primitivação seja válida;

a) $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3}$ b) $\dfrac{x^5}{x^2-1}$ c) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)^2}$

d) $\dfrac{x}{x^2+2x+3}$ e) $\dfrac{1}{x^4-1}$ f) $\dfrac{2x-3}{(x^2+1)^2}$

Ex 10-5 Use o método de mudança de variável, ou outro, para primitivar as funções seguintes, em intervalos a determinar:

a) $x\sqrt{1+x}$ b) $\dfrac{x}{\sqrt{2-3x}}$ c) $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

d) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}$ e) $\sqrt{\dfrac{5+x}{5-x}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$

g) $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x}$	h) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$	i) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
j) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	k) $\dfrac{x}{x-\sqrt{1+x}}$	l) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
m) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$	n) $x\sin(x^2)$	o) $\dfrac{e^{2x}+2e^{3x}}{1-e^x}$
p) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$	q) $\dfrac{1}{\sin x + \cos x}$	

Sugestões para as substituições a efectuar:

a) $u=\sqrt{1+x}$	b) $u=\sqrt{2-3x}$	c) $u=\sqrt{x}$
d) imediata	e) $u=\sqrt{\frac{5+x}{5-x}}$	f) $u=\sqrt{e^x-1}$
g) $u=\cos x$	h) $x=\tan u$, $(\sinh u)$	i) imediata
j) $x=\sec u$, $(\cosh u)$	k) $u=\sqrt{1+x}$	l) $u=\sqrt[6]{x}$
m) $x=2\sin u$	n) imediata	o) $u=e^x$
p) $x=\sin u$	q) $u=\tan(x/2)$	

Ex 10-6* Determine as expressões $u(x)$ e $v(x)$ de modo a tornar correcta a seguinte fórmula de primitivação por partes

$$\int u(x)\, f'(x)\, dx = v(x)\, f(x) + \int 4\, x^3\, f(x)\, dx \quad .$$

Ex 10-7* Determine a função $u(x)$ de modo a tornar correcta a seguinte aplicação da regra de integração por substituição:

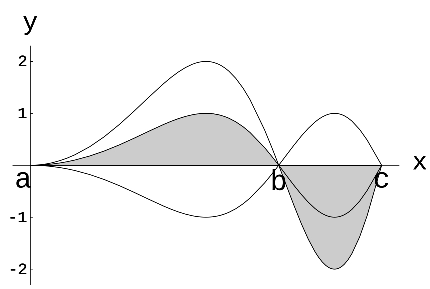
$$\int_2^3 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_5^8 f(u(x))\,du\ .$$

Ex 10-8 Considere a função $f(x) = \sin x$.

(a) Calcule os integrais $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,dx$, e $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi} f(x)\,dx$ e interprete o resultado em termos de áreas.

(b) Calcule a área da região limitada pelo gráfico de f e o eixo dos xx, para $x \in [-\pi/2, \pi]$.

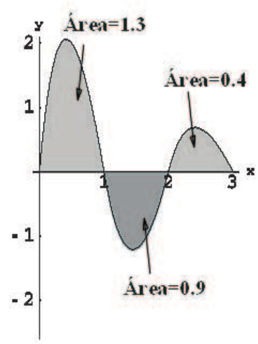
Ex 10-9* Na figura seguinte estão representados os gráficos das funções diferenciaveis $f(x)$, $2f(x)$ e $-f(x)$ que têm zeros nos pontos a, b e c.



Determine valores de α e β de modo que

$$\text{área total sombreada} = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_b^c f(x)\,dx\ .$$

Ex 10-10* Determine o valor de cada um dos três integrais da função em baixo.



$(a)\ \int_2^3 f(x)\,dx \qquad (b)\ \int_0^2 f(x)\,dx \qquad (c)\ \int_3^1 f(x)\,dx$

Ex 10-11 Calcule a derivada das seguintes funções, definidas em $\mathbb{R}$ ou em $]0,+\infty[$;

a) $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ b) $F(x) = \int_0^{x^3} e^t\,dt$

c) $F(x) = \int_{x^2}^0 \sin t\,dt$ d) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \log t\,dt$

e) $F(x) = \int_{1/x}^x \cos(t^2)\,dt$

Ex 10-12 Sejam

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se} \quad -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x < 3 \\ 2x-5 & \text{se} \quad 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \int_{-1}^x f(t)\,dt \qquad \text{para todo} \quad x \in [-1,5]\ .$$

(a) Determine a expressão que define $g(x)$.

(b) Esboce os gráficos de f e g.

(c) Diga onde é:

(1) f contínua.

(2) f diferenciável.

(3) g diferenciável.

Ex 10-13 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(0) = 0$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. Representando por g a função inversa de f, defina-se:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} g(t)\,dt - xf(x).$$

(a) Calcule a derivada de F.

(b) Qual o valor de $F(x)$? Interprete este resultado geometricamente.

Ex 10-14 Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função integrável tal que $f(a+b-x)=f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

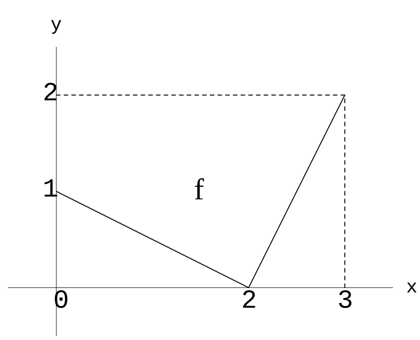
(a) Qual o significado geometrico da relação acima?

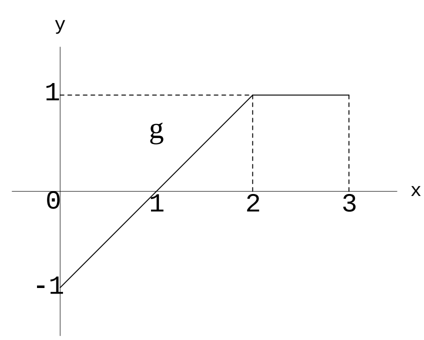
(b) Veja qua a função
$$g(x)=x\,f(x)-\frac{a+b}{2}\,f(x)$$
satisfaz $g(a+b-x)=-g(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

(c) Qual o significado geometrico desta nova relação?

(d) Prove que
$$\int_a^b xf(x)\,dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

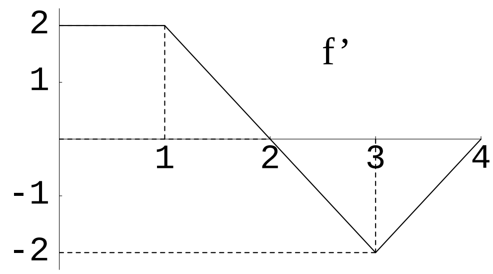
Ex 10-15* Sejam $F(x)$ e $G(x)$ respectivamente primitivas das funções $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[0,3]$. Os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ vêm representados nas figuras seguintes.





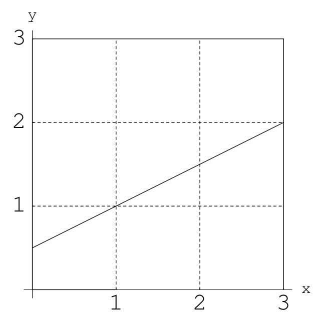
Determine as variações $F(3)-F(0)$ e $G(3)-G(0)$.

Ex 10-16* Seja $f(x)$ uma função diferenciavel no intervalo $[0,3]$ cuja derivada tem o seguinte gráfico



Desenhe o gráfico da função $f(x)$.

Ex 10-17* Seja $F(x) = \int_0^x h(t)\,dt$, onde $h : [0,3] \to \mathbb{R}$ é a função na figura em baixo.



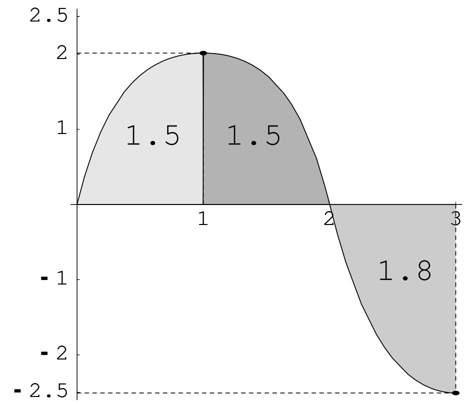
Calcule:

(a) $\dfrac{F(3)-F(1)}{3-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}$

Ex 10-18* Seja $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciavel. Calcule $f(\pi)$, sabendo que $f(0) = 2$ e que

$$\int_0^\pi \left(f'(x)\cos x - f(x)\sin x \right)\, dx = 4\ .$$

Ex 10-19* Seja $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ a seguinte função diferenciavel, definida no intervalo $[0,3]$.



Na figura estão assinaladas três regiões limitadas entre o gráfico de f e o eixo dos xx, que correspondem a abcissas nos intervalos $[0, 1]$, $[1, 2]$ e $[2, 3]$ respectivamente. A área de cada uma destas regiões vem inscrita no seu interior.

Considere a função $F : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_2^x f(t)\, dt\ .$$

(a) Determine os valores de $F(x)$ nos pontos $x = 0$, 1 e 2.

(b) Estude a monotonia e concavidades do gráfico de $F(x)$.

(c) Desenhe o gráfico de $F(x)$.

11 Aplicações do Cálculo Integral.

Ex 11-1 Um ponto percorre o eixo dos xx com aceleração $a(t) = 12 - 8t$ (m/s^2) em cada instante t. Sabendo que ocupava a posição $x = 0$ (m) no instante $t = 0$ (s) e tinha velocidade 0 (m/s) nesse instante, calcule:

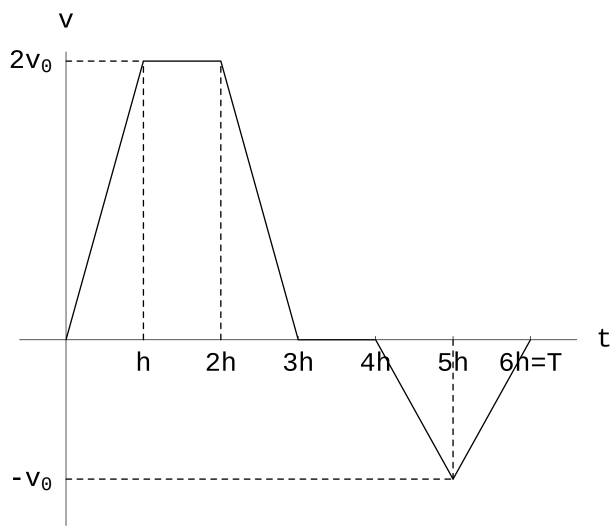
(a) A sua velocidade no instante $t = 2$ (s).

(b) A sua posição no instante $t = 3$ (s).

(c) A velocidade máxima, em valor absoluto, durante todo o movimento e o instante em que essa velocidade foi atingida.

(d) Excluindo o instante inicial $t = 0$ (s), o ponto esteve parado em algum instante?

Ex 11-2 Um objecto move-se ao longo de um eixo de coordenadas x. O seu movimento é descrito por uma função $x = x(t)$ no intervalo de tempo $[0, T]$. Sabendo que a posição no instante inicial é $x(0) = 0$ e que a lei das velocidades deste movimento é descrita pelo seguinte gráfico:



determine:

(a) os intervalos de tempo onde o objecto está respectivamente: parado, em movimento uniforme, em movimento acelerado e em movimento desacelerado;

(b) os deslocamentos efectuados nestes intervalos de tempo;

(c) as distâncias percorridas nos mesmos intervalos de tempo;

(d) a posição no instante final $t = T$ e o deslocamento total;

(e) a lei do movimento $x(t)$. Esboce o seu gráfico.

Ex 11-3 * Um móvel desloca-se segundo um eixo de coordenadas com uma lei de velocidades descrita por $v(t) = t^2 - 4\,t$ em metros por segundo. Sabendo que a posição inicial do móvel no instante $t = 0$ é $x_0 = 12$ metros, qual a sua posição ao fim de 3 segundos ?

Ex 11-4 Determine a área da região limitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos xx quando:

a) $f(x) = 2 + x^3$, $x \in [0, 1]$.

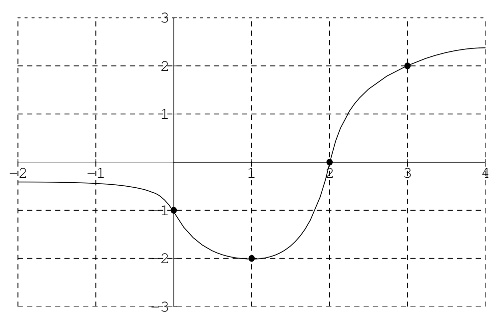
b) $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $x \in [3, 8]$.

c) $f(x) = x^2(3 + x)$, $x \in [0, 8]$.

d) $f(x) = \cos x$, $x \in [\pi/6, \pi/3]$.

e) $f(x) = (x + 2)^{-2}$, $x \in [0, 2]$.

Ex 11-5 * Considere a região A limitada pelas curvas $y = f(x)$, $x = 0$ e $y = 2$, onde $f(x)$ é a função no gráfico em baixo.



(a) Identifique a região A na figura acima.

(b) Represente a área desta região através de um integral envolvendo $f(x)$.

Ex 11-6 Em cada uma das alíneas seguintes esboce o gráfico da função f e determine a área da região limitada por ele e pelo eixo dos xx,

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 3-x & \text{se} \quad 1 < x \le 3 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x} & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 4-x^2 & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Ex 11-7 Em cada um dos seguintes casos, represente a região limitada pelas curvas dadas e determine a sua área.

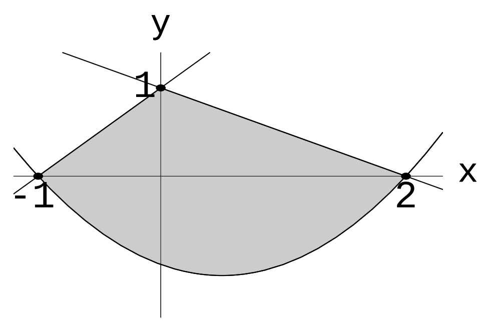
a) $y = 1 + \cos x$, $y = 1$, para $0 \le x \le \pi/2$

b) $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$

c) $y = 6x - x^2$ e $y = 2x$

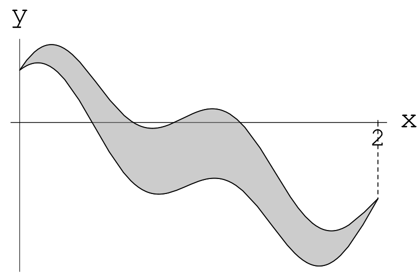
d) $y = \cos x$ e $y = 4x^2 - \pi^2$

Ex 11-8* Considere a região da figura seguinte, limitada entre as duas rectas desenhadas e a parábola $y = \alpha\,(x+1)\,(x-2)$.



Determine α de modo que a área sombreada seja igual a 15.

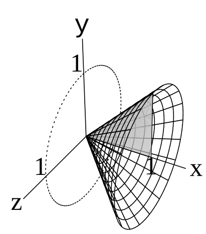
Ex 11-9* Na figura seguinte estão representados os gráficos das funções $f(x)$ e $f(x) + 2\,x - x^2$ no intervalo $[0, 2]$.

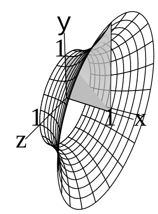


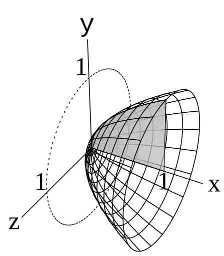
Qual o valor da área da região sombreada?

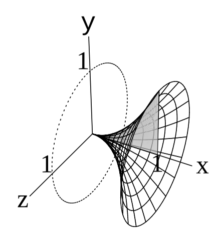
Ex 11-10* Qual das seguintes figuras representa o sólido de revolução cujo volume é calculado pelo integral

$$\int_0^1 \pi\, x\, dx \ \ ?$$

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

Descreva regiões correspondentes às restantes figuras, e exprima os seus volumes através de integrais. Calcule esses quatro volumes.

Ex 11-11* Seja A a região plana limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt[4]{x}$. Considere o sólido gerado por rotação da região A em torno do eixo dos xx. Represente o seu volume através de um integral, e calcule-o.

Ex 11-12 Desenhe a região limitada pelas curvas e, determine o volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo dos xx.

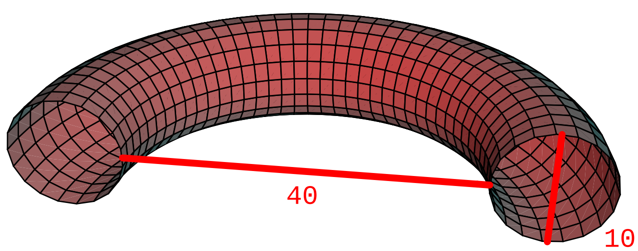
a) $y = x\,, y = 0\,, x = 1$ b) $y = x^3\,, y = 8\,, x = 0$
c) $y = x^2\,, y = 2 - x$

Ex 11-13 Desenhe a região limitada pelas curvas e, determine o volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo dos yy.

a) $y = 2x\,, y = 4\,, x = 0$ b) $x = y^3\,, x = 8\,, y = 0$

c) $x = y^2\,, x = 2 - y^2$

Ex 11-14 Uma bóia cheia de ar, tem uma secção circular de 5 centímetros de raio e um buraco para o corpo, também circular, com 40 centímetros de diâmetro. Calcule o volume de ar contido na bóia, supondo desprezível a sua espessura.



Ex 11-15 Considere a elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,(a, b > 0)$.

(a) Representе, através de um integral, a área da elipse e calcule-a.

(b) Represente, através de um integral, o volume do elipsoíde de revolução gerado pela rotação da elipse em torno de um dos seus eixos e calcule-o. Deduza, do resultado obtido, a fórmula do volume da esfera.

Ex 11-16 Encontre os comprimentos das seguintes curvas:

a) $y = x^2 - \dfrac{\log x}{8}\,,$ $1 \leq x \leq 3\,.$

b) $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2\,x}\,,$ $\frac{1}{2} \leq x \leq 1\,.$

c) $y = e^x\,,$ $0 \leq x \leq 1\,.$

Ex 11-17 Determine as soluções dos seguintes problemas:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \sin(3x)$, $\quad y(\pi) = 1$.

b) $\dfrac{dy}{dx} = \cosh(2x)$, $\quad y(0) = 2$.

c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $\quad \lim_{x \to +\infty} y(x) = 2$.

d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x}$, $\quad y'(1) = 1$ e $y(1) = 0$.

Ex 11-18 Determine as soluções das seguintes equações diferenciais.

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ $\quad$ b) $\dfrac{dy}{dx} + y \cos x = 0$

c) $\dfrac{dy}{dx} = e^y \cos x$ $\quad$ d) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2y + \sin 2y}{3x^2}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = -2\,y$ $\quad$ f) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \tan x$

Ex 11-19* Sabendo que $Q(t) = C\, e^{k\,(t-1)}$ é solução do problema de valor inicial

$$\frac{dQ}{dt} = -5\,Q \qquad Q(1) = 30 ,$$

determine o valor das constantes C e k.

Ex 11-20 Para cada uma das alíneas do exercício anterior determine a solução que obedece à seguinte condição inicial.

a) $y(1) = 2$ $\quad$ b) $y(\pi) = 2$

c) $y(0) = -2$ $\quad$ d) $x(\pi) = \pi^{1/3}$

e) $y(0) = 3$ $\quad$ f) $y(0) = 1$

Ex 11-21 Um depósito contem 100 litros de salmoura cuja concentração no instante $t = 0$ minutos é de 2.5 gramas de sal por litro. Uma salmoura contendo 2 gramas de sal por litro é lançada no tanque à velocidade de 5 litros por minuto, e a mistura (tornada uniforme por agitação) corre do tanque na mesma proporção. Designamos por $q(t)$ a quantidade de sal dissolvido no tanque no instante t.

(a) Qual a quantidade inicial, $q(0)$, de sal no depósito?

(b) Quantos gramas de sal por minuto entram no tanque? Observe que esta velocidade é constante.

(c) Quantos gramas de sal por minuto saiem do tanque? Observe que esta velocidade depende da quantidade de sal no tanque $q(t)$ em cada instante t.

(d) Escreva a derivada $\dfrac{dq}{dt}$ em função das velocidades das duas alíneas anteriores.

(e) Resolva a equação diferencial obtida na alínea anterior para ver quantos gramas de sal existem no depósito em cada instante t.

(f) Qual a quantidade de sal no depósito ao fim de uma hora?

Ex 11-22 No estudo do crescimento de uma população é costume utilizarem-se variaveis contínuas em vez da simples contagem do número de indivíduos. Uma variavel real x pode por exemplo medir a densidade da população (n^o de indivíduos por unidade de área), ou então medir a massa total da população (em gramas ou kilogramas), ou pode ainda medir o número de milhares de indivíduos dessa mesma população. Considere uma função $x = x(t)$ que descreva a evolução da população ao longo do tempo t. A derivada $x'(t)$ mede a velocidade (instantânea) de crescimento da população, i.e. o "número" de novos indivíduos por unidade de tempo. Ao cociente $x'(t)/x(t)$ é costume chamar-se a *taxa de crescimento* da população. Serve para medir a contribuição média de cada indivíduo, por unidade de tempo, para o crescimento da população. As leis de crescimento de populações postulam como varia a taxa de crescimento da população em função do próprio tamanho, $x(t)$, da população. Cada lei de crescimento vem expressa na forma de uma equação diferencial. Para cada uma das duas leis de crescimento seguintes:

I. A *lei de crescimento exponencial*, que postula uma taxa de crescimento constante $a > 0$, i.e. independente do tamanho x da população,

II. A *lei de crescimento logística*, que postula uma taxa de crescimento que decresce linearmente com o tamanho x da população, i.e. da forma $a - b\,x$, com $a > 0$ e $b > 0$ (o coeficiente a mede a taxa de crescimento quando a população é muito pequena; por sua vez o termo $-b\,x$ mede o efeito negativo de competição entre indivíduos que vai aumentando com o tamanho da população),

(a) Escreva a equação diferencial correspondente,

(b) Resolva-a sujeita à condição inicial $x(0) = x_0$,

(c) Descreva o comportamento assintótico da solução, i.e. quando $t \to +\infty$. Este comportamento depende do tamanho inicial da população, $x(0) = x_0$?

Ex 11-23* A variável t mede o tempo em minutos contado a partir de um instante inicial $t = 0$ em que um corpo aquecido a uma temperatura de 50 graus Celsius é deixado ao ar livre para arrefecer. Sabendo que ao fim de t minutos a taxa de variação da temperatura do corpo é de $-3\,e^{-\frac{t}{30}}$ graus Celsius por minuto, determine:

(a) A temperatura do corpo ao fim de uma hora.

(b) A temperatura limite do corpo quando $t \to +\infty$.

Ex 11-24 A lei de arrefecimento de Newton diz que: *a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura do corpo e da temperatura média ambiente.* Cada corpo tem a sua constante de proporcionalidade $k > 0$ específica. Seja Q uma variavel com o valor da temperatura de um corpo num meio ambiente mantido à temperatura constante A. A evolução da temperatura desse corpo ao longo do tempo será então descrita por uma função $Q = Q(t)$ da variavel tempo t.

(a) Escreva a equação diferencial em $Q(t)$ que traduz a lei de arrefecimento de Newton.

(b) Ache a solução $Q(t)$ desta equação sujeita à condição inicial $Q(0) = Q_0$.

(c) Um corpo é colocado num quarto aquecido a uma temperatura constante de 30^oF. Depois de 10 minutos, a temperatura do corpo é de 0^oF, e ao fim de 20 minutos a temperatura do corpo é de 15^oF. Qual a temperatura inicial do corpo?

(d) Uma barra de metal a uma temperatura inicial de 20^oC é colocada num recipiente com água a ferver (100^oC). A água continua a ferver e 20 segundos mais tarde a temperatura da barra é de 30^oC. Qual a temperatura da barra no final do primeiro minuto. Quanto tempo demorará até a barra atingir os 98^oC?

Ex 11-25 A variavel $0 \leq x \leq 1$ representa a proporção de indivíduos infectados com uma determinada doença contagiosa numa certa comunidade, enquanto $y = 1-x$ representa a proporção de indivíduos saudáveis, mas susceptíveis à doença, na mesma comunidade. Supondo que os indivíduos se movem livremente o número de contactos entre indivíduos infectados e saudáveis, suscetíveis de provocar o contágio da doença, é proporcional ao produto $x\,y = x\,(1-x)$. Queremos analisar a evolução da proporção $x = x(t)$ ao longo do tempo. A derivada $x'(t)$ mede a taxa de contágio, i.e. a proporção de novos indivíduos infectados por unidade de tempo.

(a) Traduza numa equação diferencial a lei epidemiológica que postula ser a taxa de contágio proporcional ao número de contactos entre indivíduos infectados e saudáveis. Cada doença tem a sua constante de proporcionalidade (que é positiva) específica, característica do seu grau de infeciosidade.

(b) Ache a solução $x(t)$ desta equação sujeita à condição inicial $x(0) = x_0$ com $0 < x_0 < 1$, i.e. determine a proporção de indivíduos doentes no instante t, supondo que no instante $t = 0$ a proporção de indivíduos doentes é x_0.

(c) Calcule

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) \;.$$

Interprete este resultado.

Ex 11-26 Um investidor aplica um capital C_0 a uma taxa de juros fixa de $\kappa\%$ ao ano. Por uma questão de simplicidade vamos referir-nos à taxa de juros como sendo o parâmetro $\alpha = \kappa/100 \in [0, 1]$. A variável t representará o tempo, medido em anos, e a função $C(t)$ o capital acumulado pelo investidor ao fim de t anos.

(a) Esboce o gráfico da função $C(t)$.

(b) Suponha que os juros vencem no final de cada ano (juros simples), e que o tempo de investimento t é medido por um número inteiro ($t = 0, 1, 2, \ldots$) de anos. Escreva uma equação recursiva que relacione $C(t+1)$ com $C(t)$. Use esta equação para chegar à fórmula

$$C(t) = C_0\,(1+\alpha)^t \;, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

(c) Suponha agora que o ano é dividido em p partes iguais (as prestações), e que os juros vencem ao fim de cada prestação (juros compostos). Neste caso o tempo de investimento t é medido em números fraccionários ($t = \frac{0}{p}, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots$). Escreva uma nova equação recursiva que relacione $C(t+1/p)$ com $C(t)$, e use-a para chegar à fórmula

$$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)^{p \cdot t} , \qquad t = \frac{0}{p}, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots$$

(d) Mostre que $\displaystyle \lim_{p \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)^{p \cdot t} = e^{\alpha t} , \qquad \forall t \in \mathbb{R} .$

(e) Suponha finalmente que os juros vencem instantâneamente (juros compostos contínuos). Veja que

$$C(t) = C_0 \, e^{\alpha t} , \qquad t > 0 .$$

(f) Mostre que, no último caso (juros compostos contínuos), a função capital $C(t)$ é solução da equação diferencial

$$C' = \alpha \, C .$$

Num modelo de juros compostos contínuos, a taxa de variação relativa do capital $C(t)$, $C'(t)/C(t)$, é constante, e igual à taxa de juros α.

(g) Para um capital inicial de 1 milhão de euros, $C_0 = 10^6$, calcule o capital acumulado ao fim de 3 anos, a uma taxa de juros fixa de 5% ao ano:

(1) No modelo de juros simples.

(2) No modelo de juros compostos, com 12 prestações ao ano.

(3) No modelo de juros compostos contínuos.