Adivinhe um polinómio

Pede-se a uma pessoa que escolha um polinómio arbitrário $P(t)$ de coeficientes inteiros não negativos. É possivel, pedindo-lhe o valor desse polinómio em dois argumentos inteiros, determinar qual o polinómio?

Solução:

Peça à pessoa que pensou no polinómio de grau n $P(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i\, t^i$ o seu valor para o argumento $t=1$, $x=P(1)$. Qualquer número $y>x=\sum_{i=0}^{n} a_i$ é estritamente superior a todos os coeficientes de $P(t)$. Peça em seguida o valor de $P(t)$ no argumento $t=y$, $\quad z=P(y)$ e represente z na base y, $z=\sum_{i=0}^{m} b_i\, y^i$. Os dígitos desta representação são recursivamente determinados pelas relações:

$$\begin{cases} b_0 &= \mathrm{mod}(z,y) \\ q_0 &= \mathrm{quoc}(z,y) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} b_{i+1} &= \mathrm{mod}(q_i,y) \\ q_{i+1} &= \mathrm{quoc}(q_i,y) \end{cases}$$

onde $\mathrm{mod}(z,y)$ e $\mathrm{quoc}(z,y)$ representam respectivamente o resto e o quociente da divisão inteira de z por y. A recursão termina logo que $b_i=0$ e $q_i=1$. Tem-se então $\sum_{i=0}^{m} b_i\, y^i = z = P(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, y^i$, e como $0 \le a_i \le y-1$, para cada $i=0,1,\ldots,n$, a unicidade de representação do inteiro z na base y mostra que $n=m$ e $a_i=b_i$ para cada $i=0,1,\ldots,n$. O polinómio $P(t)$ fica assim completamente determinado.