Problema dos Cem

Há 100 prisioneiros. Numa sala, em fila, há cem caixas sem tampa, todas iguais. Cada uma tem um rótulo exterior com o nome de um preso (não há repetições de nomes). Dentro de cada uma há um papel com um nome de um prisioneiro (não tem de ser o mesmo do rótulo).

Cada preso entra sozinho na sala, à vez, e pode espreitar num máximo de 50 *caixas. Depois vai directo para a solitária, nunca mais comunica com nenhum outro. Quando visita a sala das caixas não pode tocar em nada, só pode observar.*

Quando os cem presos terminam este processo, se todos viram o seu próprio nome num papel dentro de uma caixa, todos são soltos. Se pelo menos um prisioneiro não viu o seu nome, morrem todos.

Se todos espreitarem em 50 caixas à sorte, a probabilidade de sobreviverem é $1/2^{100}\ldots$ *mas há melhor. Como devem proceder?*

Pode supor-se que os presos se reunem uma vez, antes deste jogo começar.

Solução:

As cem caixas com as etiquetas exteriores e os nomes interiores representam uma permutação dos 100 prisioneiros. Esta permutação associa a cada prisioneiro o companheiro cujo nome está dentro da sua caixa, aquela tem o seu nome na etiqueta exterior. Os prisioneiros devem escolher o seguinte procedimento:

Cada prisoneiro abre a caixa com o seu nome e vê o nome que lá está dentro. Se não fôr o seu, abre a caixa com esse nome e repete este procedimento até encontrar o seu nome, ou chegar à fatídica 50ª caixa sem o encontrar.

É sabido que toda a permutação se decompõem em ciclos. A regra acima corresponde a cada prisioneiro descobrir o ciclo da permutação dada que contém o seu nome, que aparecerá inevitavelmente depois de abrir um número de caixas igual ao comprimento desse ciclo. Se a permutação encoberta não tiver nenhum ciclo de comprimento maior que 50 estarão salvos, pois todos os presos acharão o seu nome abrindo no máximo esse número de caixas. Caso contrário estão condenados.

Admitindo que a permutação inicial é escolhida aleatoriamente vamos agora determinar a probabilidade de esta não conter ciclos de comprimento maior que 50. Denotamos por S_n o grupo simétrico de ordem n, das permutações do conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Consideremos o conjunto

$$\mathcal{M}_n = \{ \, (\, (n_1, p_1), \, \ldots, \, (n_k, p_k) \,) \; : \; n_1 p_1 + \ldots + n_k p_k = n, \;\; p_1 < \ldots < p_k \, \} \, ,$$

onde k, n_i e p_i são inteiros maiores ou iguais a 1. Cada permutação de n elementos determina um elemento $\theta = (\, (n_1, p_1), \, \ldots, \, (n_k, p_k) \,) \in \mathcal{M}_n$, tal que a permutação se decompõem em $N = n_1 + \ldots + n_k$ ciclos, com n_i ciclos de comprimento p_i, para cada $i = 1, \ldots, k$. Vamos dizer que θ é o tipo da permutação. Designamos por $\mathcal{M}_n[\theta]$ o conjunto das permutações de S_n de tipo θ. Vale a seguinte fórmula para o número de permutações com n_i ciclos de comprimento p_i.

$$(1) \qquad | \, \mathcal{M}_n[\, (n_1, p_1), \, \ldots, \, (n_k, p_k) \,] \, | = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k! \, p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}}$$

Dado $p \in \mathbb{N}$, seja $N(n, p)$ o número de permutações em S_n com pelo menos um ciclo de comprimento p. Afirmamos que se $p > n/2$ então $N(n, p) = n!/p$. Com efeito, se $p > n/2$ cada permutação tem no máximo um ciclo de comprimento p, pelo que

$$
\begin{aligned}
N(n,p) &= \sum_{\substack{p_1<\ldots<p_k \\ n_1p_1+\ldots+n_kp_k=n-p}} \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!\,p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k}p^1} \\
&= \frac{n!}{p\,(n-p)!} \sum_{\substack{p_1<\ldots<p_k \\ n_1p_1+\ldots+n_kp_k=n-p}} \frac{(n-p)!}{n_1!\ldots n_k!\,p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k}} \\
&= \frac{n!}{p\,(n-p)!}\,|S_{n-p}| = \frac{n!}{p}\ .
\end{aligned}
$$

Logo, se $p > n/2$ a fracção de permutações em S_n com um ciclo de comprimento p é igual a $1/p$. Segue que a fracção de permutações em S_n com com algum ciclo de comprimento maior que $n/2$ é igual a $\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{n/2+1}$, se n for par pelo menos. Como $\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100} = 0.688172\ldots$, temos que a probabilidade de aleatoriamente escolher uma permutação sem ciclos de comprimento maior que 50 é igual a $1-(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100}) = 0.311828\ldots$. Para um cálculo aproximado podemos observar que $\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100} \approx \log 100 - \log 50 = \log 2 = 0.693147\ldots$, o que dá uma aproximação (por defeito) de $0.306853\ldots$ para a probabilidade pretendida.

Justifiquemos agora a fórmula (1). Os números multinomiais

$$\binom{n_1+\cdots+n_k}{n_1,\cdots,n_k} = \frac{(n_1+\cdots+n_k)!}{n_1!\cdots n_k!}$$

representam o número de maneiras de distribuir n objectos distintos $1,\ldots,n$ por k caixas numeradas especificando que a caixa i deve ficar com n_i objectos. Para gerar uma permutação em $\mathcal{M}_n[\,(n_1,p_1),\,\ldots,\,(n_k,p_k)\,]$ podemos começar por distribuir os elementos de $\{1,\ldots,n\}$ por k caixas respectivamente com $n_i\,p_i$ elementos, para cada $i=1,\ldots,k$. A i-ésima caixa corresponde a todos os elementos em algum ciclo de comprimento p_i. Em seguida distribuimos os $n_i\,p_i$ elementos da caixa i por n_i sub-caixas iguais, ficando cada uma com p_i elementos, e ordenamos circularmente[1] os elementos de cada sub-caixa. As sub-caixas representam obviamente os ciclos da permutação. Porque as sub-caixas da i-ésima caixa são todas iguais, temos

$$\frac{\frac{(n_i\,p_i)!}{p_i!\cdots p_i!}}{n_i!}\,((p_i-1)!)^{n_i} = \frac{(n_i\,p_i)!}{n_i!\,p_i^{n_i}}$$

maneiras de efectuar as distribuições acima descritas na i-ésima caixa. Logo

$$
\begin{aligned}
|\,\mathcal{M}_n[\,(n_1,p_1),\,\ldots,\,(n_k,p_k)\,]\,| &= \frac{n!}{(n_1\,p_1)!\,\cdots\,(n_k\,p_k)!}\,\frac{(n_1\,p_1)!}{n_1!\,p_1^{n_1}}\,\cdots\,\frac{(n_k\,p_k)!}{n_k!\,p_k^{n_k}} \\
&= \frac{n!}{n_1!\,\cdots\,n_k!\,p_1^{n_1}\,\cdots\,p_k^{n_k}}\ .
\end{aligned}
$$

[1] o número de permutações circulares, i.e., com um único ciclo, num conjunto de p elementos é $(p-1)!$.