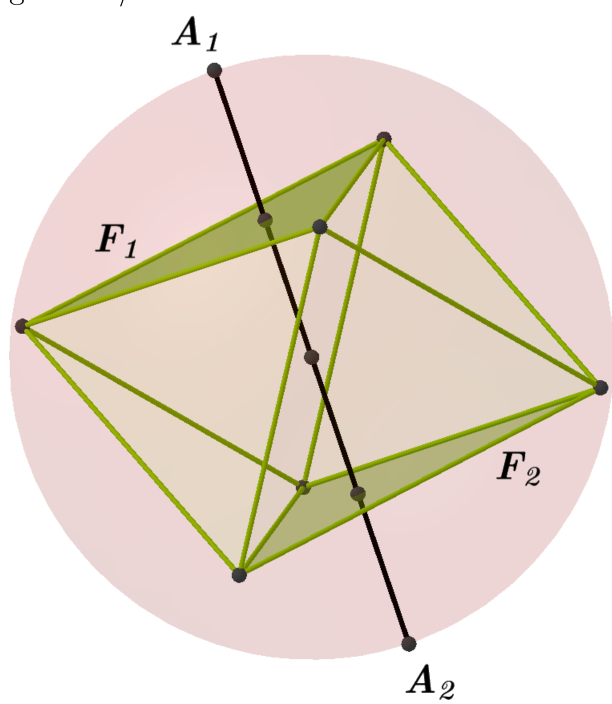
Quatro pontos na esfera

Escolha aleatoriamente quatro pontos na superfície duma esfera. Qual é a probabilidade do tetraedro por eles determinado conter o centro da esfera no seu interior?

Mais simples, escolhidos três pontos aleatoriamente sobre uma circunferência qual é a probabilidade do triângulo por eles determinado conter o centro da circunferência no seu interior?

Solução:

Escolher quatro pontos na esfera com distribuição uniforme equivale a escolher quatro rectas que determinam 4 pares de pontos diâmetralmente opostos e em seguida escolher com igual probabilidade um dos 16 tetraedros com um vértice em cada uma dessas 4 rectas. Desses 16 tetraedros há exactamente 2 que contêm a origem no seu interior. Para perceber isto, começemos por fixar 3 rectas. Os seis pares de pontos diametralmente opostos determinam um octaedro cujas 8 faces correspondem aos triângulos com um vértice em cada uma das 3 rectas. Sobra uma quarta recta que intersecta a esfera em dois pontos A_1, A_2 e o octaedro em duas faces F_1, F_2. Podemos ordenadar estes pontos e faces de forma que $A_1 - F_1 - F_2 - A_2$. Os únicos tetraedros (dos 16 em causa) que contêm a origem são os tetraedros gerados pelos seguintes pares (face-vértice): (F_1, A_2) e (F_2, A_1). Logo a probabilidade de escolher um tetraedro contendo a origem, fixadas as quatro rectas, é igual a $2/16 = 1/8$. Pelo teorema da probabilidade total, a probabilidade desejada é a média (relativa à distribuição das 4 rectas) da probabilidade constante $1/8$, e portanto é igual a $1/8$.



Relativamente ao segundo problema, escolher três pontos na circunferência com distribuição uniforme equivale a escolher três rectas que determinam 3 pares de pontos diâmetralmente opostos e em seguida escolher com igual probabilidade um dos oito triângulos com um vértice em cada uma das rectas escolhidas. Desses 8 triângulos há exactamente 2 que contêm a origem no seu interior. Logo a probabilidade de escolher um triângulo contendo a origem, fixadas as três rectas, é igual a $2/8 = 1/4$. Pelo teorema da probabilidade total, a probabilidade desejada é a média (relativa à distribuição das 3 rectas) da probabilidade constante $1/4$, e portanto é igual a $1/4$.