Sugestões para os Exercícios de Geometria

1 Primeiros Axiomas, Definições Básicas

Ex 1-1

(a) Use A1.

(b) Seja $r \subset \mathcal{E}$ uma recta e tome $A, B, C \in \mathcal{E}$ dados por A3. Não podem os três pontos A, B, C estar em r.

(c) Seja $P \in \mathcal{E}$ um ponto e tome $A, B, C \in \mathcal{E}$ dados por A3. Considere os casos (1) P está em duas das rectas AB, AC, BC; (2) P pertence a uma (apenas) das das rectas AB, AC, BC.

(d) Dado $P \in \mathcal{E}$, por (c) existe uma recta r tal que $P \notin r$. Use então A2.

(e) Use A3.

Ex 1-2 Sejam $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ quatro pontos não colineares. Considere os casos: (1) Há três dos quatro pontos colineares, por exemplo A, B, C; (2) Os quatro pontos são não colineares três a três.

Ex 1-3 Sejam $A, B, C, D, E \in \mathcal{E}$ cinco pontos não colineares. Considere os seguintes casos: (1) Há quatro dos cinco pontos colineares, por exemplo A, B, C, D; (2) Há dois ternos de pontos colineares que determinam duas rectas, por exemplo A, B, C e A, D, E; (3) Há um único terno de pontos colineares, por exemplo A, B, C; (4) Os cinco pontos são não colineares três a três.

Ex 1-4

(1) A aplicação de $\mathcal{R}_2$ em $\mathcal{R}_1$, $r \mapsto \Phi^{-1}(r) = \{\, \Phi(P)^{-1} \,:\, P \in r \,\}$, é a inversa da aplicação de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$, $r \mapsto \Phi(r) = \{\, \Phi(P) \,:\, P \in r \,\}$.

(2) Muito fácil.

(3) A correspodência entre rectas dos planos $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, $r \mapsto \Phi(r)$, é bijectiva.

Ex 1-5 Traduza os axiomas A1-A3 em relações sobre rectas e planos (subespaços vectoriais de dimensão 1 e 2) em $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, nesta geometria, três "pontos" são colineares se e só se como rectas em $\mathbb{R}^3$ estiverem contidos num mesmo plano (subespaço vectorial de dimensão 2).

Ex 1-6 O número de pontos, o número de rectas, e o número máximo de pontos por recta, são exemplos de quantidades invariantes por isomorfismo, e que permitem justificar que vários dos modelos apresentados não são isomorfos.

Ex 1-7

(a) $h(x) = 2n + 1 - x$, se $n \leq x < n + 1$ e $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Para A1-A3 observe que as rectas desta geometria são as rectas Euclideanas. Para A4-A5, mostre que a aplicação h é bijectiva, e note que a única recta com uma métrica diferente da usual é o eixo dos xx. Se $P = (\frac{1}{2}, 0)$ e $Q = (\frac{3}{2}, 0)$, então $\overline{PQ} = \{\, (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \;\text{ ou }\; \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \,\}$. Supondo que esta geometria satisfaz A6, deduza daqui que P e Q pertencem ao mesmo semiplano limitado pela recta $x = 1$. Considere $R = (\frac{3}{2}, 1)$ e verifique se a recta $x = 1$ separa ou não os pares de pontos P, R e Q, R.

2 Convexidade e Separação

Ex 2-1 O interior de um triângulo é simultâneamente a intersecção de três semiplanos e dos interiores de três ângulos. O exterior de um triângulo é a união de três semiplanos.

Ex 2-2 Um triângulo nunca é convexo, mas o seu interior é a intersecção de três semiplanos.

Ex 2-3 Sejam $D \in \text{int}(\Delta ABC)$ e r uma recta incidente com D. Veja que $\dot{A}D$ intersecta $\overline{BC}$ num ponto E. Pode logo supor que $A, E, C \notin r$. Porquê? Aplique o "axioma de Pasch" a ΔAEC.

Ex 2-4 O interior de um quadrilátero com forma convexa é simultâneamente a intersecção de quatro semiplanos e dos interiores de dois, três, ou quatro, ângulos. O exterior de um quadrilátero com forma convexa é a união de quatro semiplanos.

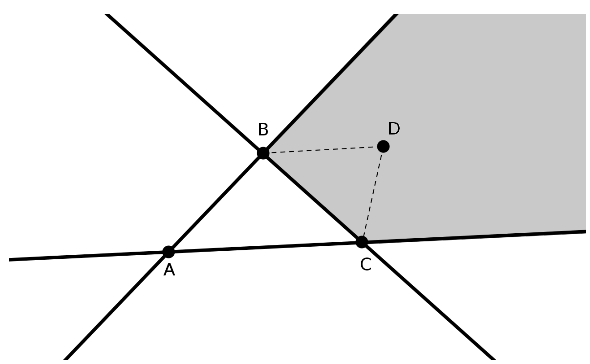
Ex 2-5 Um quadrilátero com forma convexa nunca é convexo, mas o seu interior é a intersecção de quatro semiplanos.

Ex 2-6 Para (1) $\Rightarrow$ (2), aplique o Teorema da semi-recta interior a $\dot{A}C$ e $\angle BAD$, resp. $\dot{B}D$ e $\angle ABC$. Para (2) $\Rightarrow$ (1), seja E o ponto de intersecção de $\overline{AC}$ com $\overline{BD}$. Considere os pontos A, B, C, D ordenados circularmente por esta ordem. Dados dois pontos consecutivos, destes quatro, veja que estão no mesmo semiplano limitado pela recta definida pelos outros dois. Compare-os a ambos com o ponto de intersecção E.

Ex 2-7

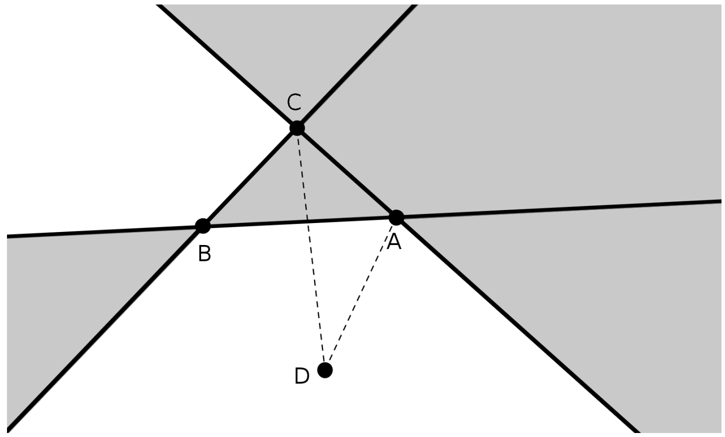
a) Se três dos quatro pontos A, B, C, D fossem colineares falharia alguma das duas relações de paralelismo assumidas.

b) Para ver que cada dois vértices consecutivos de $\mathcal{Q}$ estão no mesmo semiplano limitado pela recta definida pelos outros dois, use os paralelismos assumidos.



Ex 2-8 Este conjunto é a intersecção do interior do ângulo $\angle BAC$ com o semiplano de aresta BC que não contem A.

Ex 2-9 $\mathcal{Q} = \overline{AD} \cup \overline{DB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$.



Ex 2-10 O complementar deste conjunto é a união das rectas AB, BC e AC com o conjunto dos pontos $D \in \mathcal{E}$ tais que $\overline{BC} \cup \overline{CA} \cup \overline{AD} \cup \overline{DB}$ é um quadrilátero de forma convexa, e com o conjunto dos pontos $D \in \mathcal{E}$ tais que $\overline{CA} \cup \overline{AB} \cup \overline{BD} \cup \overline{DC}$ é um quadrilátero de forma convexa.

Ex 2-11 Se $\operatorname{int}(\angle AOB)$ é a intersecção de dois semiplanos, então o ângulo verticalmente oposto $\operatorname{int}(\angle A'OB')$ é a intersecção dos semiplanos opostos.

Ex 2-12 Sejam r uma recta e $P \in \mathcal{E}$ um ponto não incidente com r. Suponha que existem duas rectas a e b paralelas a r e incidentes com P.

a) Tome $A \in a - \{P\}$ no mesmo semiplano limitado por b que contem r, e $B \in b - \{P\}$ no mesmo semiplano limitado por a que contem r, e veja que $r \subset \operatorname{int}(\angle APB)$.

b) Sejam C um ponto na semi-recta oposta a $\dot{P}A$, e C' um ponto na semi-recta oposta a $\dot{P}B$. Dado $X \in \overline{BC}$, $\dot{P}X - \{P\} \subset \operatorname{int}(\angle BPC)$, enquanto a semi-recta oposta está contida em $\operatorname{int}(\angle APC')$. Conclúa, pela alínea anterior, que $PX \parallel r$.

c) Infinitas. Por cada ponto de $\overline{BC}$ passa uma recta paralela a r distinta.

3 Congruência de Triângulos

Ex 3-1

(a) Suponhamos que $|AB| \simeq |DE|$, $|AC| \simeq |DF|$ e $\angle CBA \simeq \angle FED$. Se $|CB| = |EF|$ por A11 (LAL), $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$. Logo, se $\Delta ABC \not\simeq \Delta DEF$ então $|CB| > |EF|$ ou $|CB| < |EF|$.

(b) Tome $G \in \overline{FE}$ tal que $|CB| = |GE|$ e veja que $\Delta ABC \simeq \Delta DEG$, e que ΔDGF é isósceles. Para ver que $\angle BCA \simeq \angle EGD > 90$ use o Teorema do Ângulo Externo.

(c) Supondo que os dois triângulos rectângulos não são congruentes obtenha uma contradição com as alíneas anteriores.

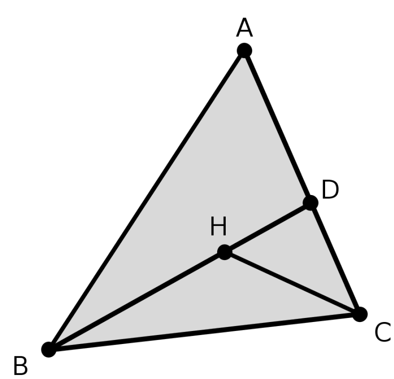
Ex 3-2 Seja E o ponto de intersecção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ de $\mathcal{Q}$.

(a) Aplique o critério LLL aos pares de triângulos $(\Delta ABC, \Delta ADC)$ e $(\Delta ABD, \Delta CBD)$.

(b) Aplique o critério ALA aos triângulos ΔABE e ΔCDE, usando as congruências de ângulos resultantes das conclusões da alínea anterior.

(c) Use o critério dos ângulos alternos-internos iguais.

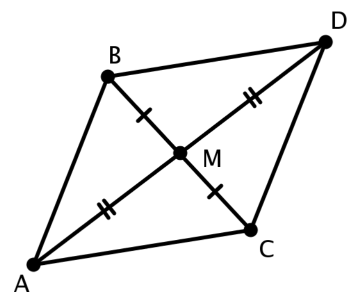
(d) Se $\mathcal{Q}$ é equilátero, veja que ΔABC e ΔABD são isósceles. Conclúa por LAA que $\Delta ABE \simeq \Delta CBE$, donde o ângulo em E mede 90 graus. Reciprocamente, se as diagonais se cortam perpendicularmente, use A11 (LAL) para mostrar que $\Delta ABE \simeq \Delta CBE$, e concluir que $\mathcal{Q}$ é equilátero.



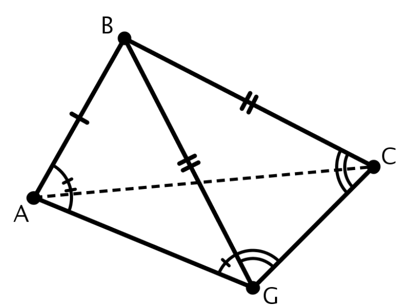
Ex 3-3 Como $H \in \text{int}(\Delta ABC)$, pelo teorema da semi-recta interior, $\dot{B}H$ intersecta $\overline{AC}$ num ponto D. Este ponto é tal que $B - H - D$. Porquê?

(a) Compare as duas somas de distâncias com $|BD| + |DC|$.

(b) Use o teorema do ângulo externo.



Ex 3-4 Tome $D \in \dot{A}M$ tal que $|AM| = |MD|$ e $A - M - D$. Use A11 (LAL) para concluir que $|AC| = |BD|$, e aplique a desigualdade triangular a ΔABD.



Ex 3-5

(a) Fácil.

(b) Fácil.

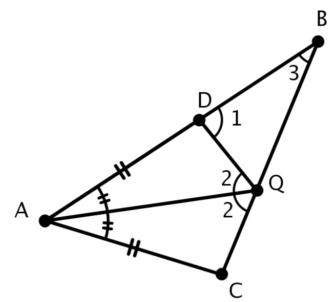
(c) Mostre por redução ao absurdo que $\overline{AC}$ intersecta $\text{int}(\overline{BG})$. Se assim não fosse teriamos $G \in \text{int}(\Delta ABC)$. Defina H como o ponto de intersecção de $\dot{B}G$ com $\overline{AC}$, e aplique o Teorema do Ângulo Externo aos triângulos ΔAHG e ΔCHG para concluir que $m(\angle AGB) + m(\angle BGC) > 180°$. Compare este resultado com o da alínea anterior.

(d) Fácil.

(e) Justifique as relações $\angle AGC > \angle BGC \simeq \angle BCG > \angle ACG$.

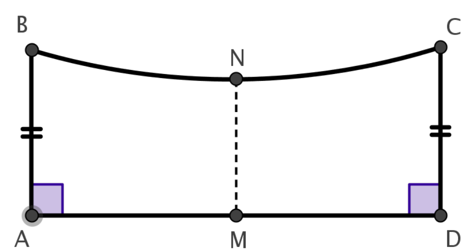
(f) Use a alínea anterior.

Ex 3-6 Justifique que pode logo supor que $|BC| \geq |AB|$, e aplique o exercício anterior com $\alpha = m(\angle DEF)$.



$\angle \mathbf{1} > \angle \mathbf{2} > \angle \mathbf{3}$

Ex 3-7 Seja Q o ponto em que a bissectriz de $\angle BAC$ intersecta $\overline{BC}$. Suponha que $|AB| > |AC|$, e tome $D \in \overline{AB}$ tal que $|AD| = |AC|$. Aplicando o Teorema do Ângulo Externo veja que $\angle BDQ > \angle AQD \simeq \angle AQC > \angle QBD$. Use o teorema que compara ângulos e lados dum triângulo, para concluir que $|BQ| > |DQ| = |CQ|$. Se $|AB| = |AC|$ veja que $|BQ| = |CQ|$. O caso $|AB| < |AC|$ é análogo ao anterior. Por contra-recíproco, reduza a implicação contrária a esta.



Ex 3-8

(a) Segue por A11 (LAL).

(b) Por LLL.

(c) $\angle B \simeq \angle C$ por (b). Decompondo o quadrilátero em dois triângulos, veja que a soma dos ângulos internos de $\mathcal{Q}$ é menor ou igual a 360 graus.

(d) Observe que $m(\angle ABD)+m(\angle ADB) \leq 90$, enquanto $m(\angle ADB)+m(\angle BDC) = 90$. Infira daqui que $\angle ABD \leq \angle BDC$. Veja que a desigualdade $|BC| \geq |AD|$ segue então do o exercício 3-6.

Ex 3-9 Sejam M e N os pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.

(a) Use A11 (LAL) para ver que $|AN| = |DN|$ e $|BM| = |CM|$. Obtenha as relações de perpendicularidade da existência dos triângulos isósceles ΔAND e ΔBMC.

(b) Pela alínea (d) do exercício anterior, $|BN| > |AM|$. Supondo, por absurdo, que $|MN| > |AB|$, o cateto $\overline{MN}$ do triângulo rectângulo ΔMNB seria também maior que o cateto $|AB|$ do triângulo rectângulo ΔBAM. Temos assim dois triângulos rectângulos, com mesma hipotenusa, em que os dois catetos do primeiro são maiores que os correspondentes catetos do segundo. Transcrevendo, por LAL, o triângulo menor no interior do maior, de forma a partilharem o ângulo recto, obtem-se facilmente uma contradição de aplicar o Teorema do Ângulo Externo. Desta contradição infere-se que $|MN| \leq |AB|$.

(c) $AB \parallel DC$ pelo critério dos ângulos alternos-internos iguais, pois estas duas rectas admitem AD como perpendicular comum. $BC \parallel AD$ pelo critério dos ângulos alternos-internos iguais, pois estas duas rectas admitem NM como perpendicular comum.

(d) Dados $P \in AD$ e $Q \in BC$, seja Q_0 o pé da perpendicular de Q sobre AD. Mostre que $|PQ| \geq |QQ_0| \geq |MN|$. Para a segunda desigualdade use a alínea anterior aplicada ao quadrilátero de Saccheri $\overline{Q_0Q} \cup \overline{QQ'} \cup \overline{Q'Q'_0} \cup \overline{Q_0Q'_0}$, onde $Q'_0 \in AD$, $Q_0{-}M{-}Q'_0$, $|Q_0M| = |MQ'_0|$, $Q' \in BC$, $Q{-}N{-}Q'$ e $|QN| = |NQ'|$.

Ex 3-10 Fácil.

Ex 3-11

(a) Pelo teorema do triângulo isósceles, os ângulos opostos dum losango são congruentes. Pelo critério ALA as diagonais intersectam-se ortogonalmente no ponto médio de ambas. Dado um segmento $\overline{AB}$ marca-se o ponto médio M de $\overline{AB}$ e traça-se a perpendicular m a AB por M. Na recta m escolhem-se pontos $C, D \in m$ tais que $C - M - D$ e $|CM| = |MD|$. O quadrilátero de vértices A, C, B e D (por esta ordem) é um losango.

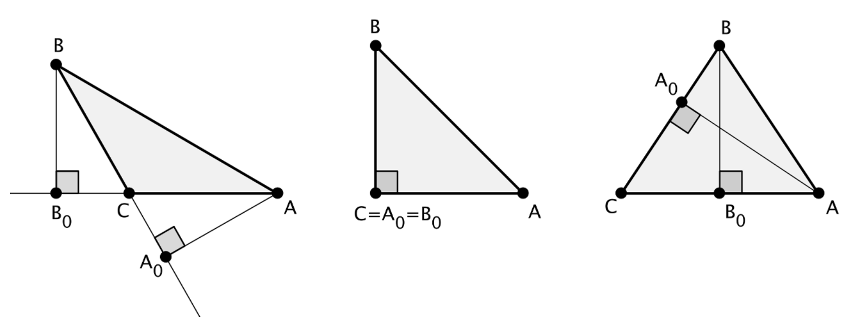
(b) Segue do critério dos ângulos alternos-internos, porque as diagonais fazem com os lados ângulos alternos-internos congruentes.

Ex 3-12 Como todo o quadrado é um losango, as suas diagonais intersectam-se ortogonalmente no ponto médio de ambas. Estas diagonais dividem o losango em quatro triângulos rectângulos. Quando o losango é um quadrado, os quatro triângulos rectângulos são isósceles, donde se infere que as duas diagonais são congruentes. Dado um segmento $\overline{AB}$ marca-se o ponto médio M de $\overline{AB}$ e traça-se a perpendicular m a AB por M. Na recta m escolhem-se pontos $C, D \in m$ tais que $C - M - D$ e $|CM| = |MD| = |AM| = |MB|$. O quadrilátero de vértices A, C, B e D (por esta ordem) é um quadrado.

Ex 3-13

(a) São semirectas opostas com o mesmo suporte, porque ângulos verticalmente opostos são congruentes.

(b) São perpendiculares. Por A10, a soma das amplitudes de ângulos suplementares adjacentes prefaz 180 graus. Por aditividade, A9, o ângulo formado pelas bissectrizes é a soma de dois ângulos que medem metade de dois ângulos suplementares adjacentes.



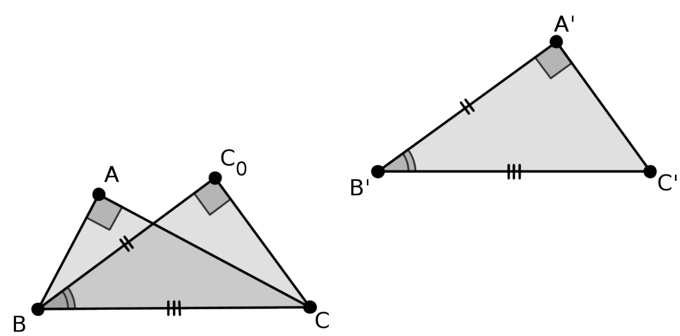
Ex 3-14 Seja B_0 o pé da perpendicular de B sobre a recta suporte de $\dot{A}C$. Se $B_0 \neq A$, o triângulo ΔABB_0 é rectângulo em B_0.

(a) Se $B_0 \in \dot{A}C - \{A\}$ então, no triângulo ΔABB_0, $\angle BAC = \angle A$ é agudo porque $\angle B_0$ é recto.

(b) Se $B_0 = A$, então $\angle BAC = \angle BB_0C$ é recto.

(c) Se $B_0 \notin \dot{A}C$, então $\angle BAC$ é um ângulo externo do triângulo rectângulo ΔABB_0, pelo que $\angle BAC$ é obtuso.

(d) Esta alínea segue das anteriores por um argumento lógico. As condições $B_0 \in \dot{A}C - \{A\}$, $B_0 = A$ e $B_0 \notin \dot{A}C$ são exaustivas e mutamente exclusivas.



Ex 3-15

(a) Suponha que $\angle B > \angle B'$.

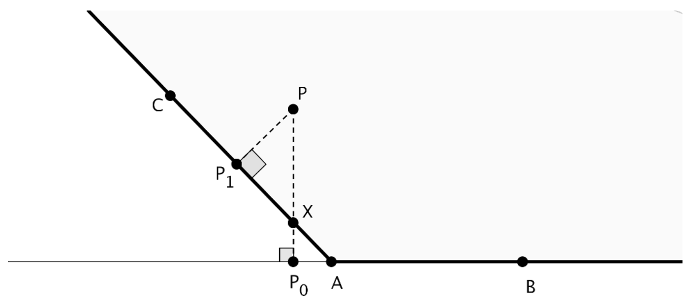
 (i) Por A8 e A5 existe $C_0 \in \mathrm{int}(\angle B)$ tal que $\angle CBC_0 \simeq \angle B'$ e $|BC_0| = |B'A'|$. Por A11 (LAL), $\angle BC_0C \simeq \angle A'$ é recto;

 (ii) Por A11 (LAL), $\Delta C_0BC \simeq \Delta A'B'C'$;

 (iii) $\angle C_0$ em ΔAC_0C é obtuso porque é maior que $\angle BC_0C$, que é recto. Para justificar este facto considere o ponto de intersecção $\{X\} = \dot{B}C_0 \cap AC$. Suponha que $B - C_0 - X$ e derive um absurdo do Teorema do Ângulo Externo. Usando que $\angle C_0$ é obtuso, obtenha pelo teorema do maior ângulo maior lado, que $|AC| > |C_0C| = |A'C'|$;

(b) Justifique a implicação por contra-recíproco. Se $\angle B \simeq \angle B'$ obtenha por LAA que $|AC| = |A'C'|$, e se $\angle B' > \angle B$ aplique o caso anterior, trocando os papéis de A, B e C com A', B' e C', respectivamente.

Ex 3-16 Considere os três casos: $\angle C$ é agudo, $\angle C$ é recto, $\angle C$ é obtuso. No segundo caso não há nada a provar. Nos outros casos use o critério LAA nos dois sentidos.



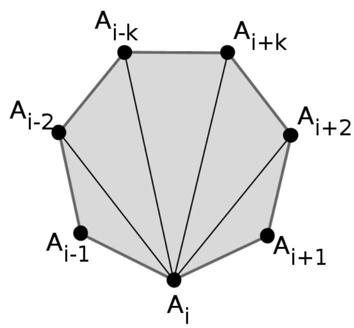
Ex 3-17 Dado um ângulo $\angle BAC$, e dado $P \in \text{int}(\angle BAC)$, sejam P_0 o pé da perpendicular de P sobre a recta suporte de $\dot{A}B$, e P_1 o pé da perpendicular de P sobre o a recta suporte de $\dot{A}C$. Se $P_0 \notin \dot{A}B$, mostre sucessivamente que P_0 e B estão em semiplanos opostos de aresta AC, que P e B pertencem ao mesmo semiplano de aresta AC, e que P e P_0 estão em semiplanos opostos de aresta AC. Conclúa que existe um ponto X tal que $\overline{PP_0} \cap AC = \{X\}$. Usando o triângulo rectângulo ΔPP_1X, veja que $|PP_0| \geq |PX| > |PP_1|$.

Ex 3-18 Se D é um ponto na intersecção das mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, veja que $|AD| = |BD| = |CD|$.

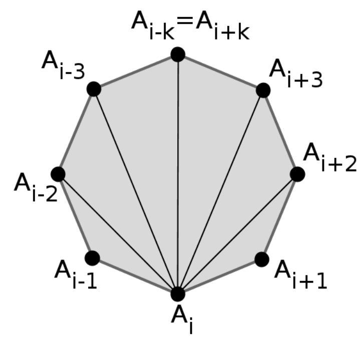
Ex 3-19 Veja que, num triângulo equilátero ΔABC, a mediatriz de cada lado passa pelo vértice oposto. Mostre que o ponto de intersecção de duas dessas mediatrizes é equidistante dos três vértices.

Os vértices dum polígono regular de n lados podem ser ordenados circularmente $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$. Para simplificar a notação suponha que o vértice A_i está definido para todo o inteiro $i \in \mathbb{Z}$, com a convenção de que $A_{i+n} = A_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Considere dois casos:

(a) $n = 2k$ é par. Neste caso veja por indução em $j = 1, \ldots, k-1$, usando o critério LAL, que $\Delta A_iA_{i+j}A_{i+j+1} \simeq \Delta A_iA_{i-j}A_{i-j-1}$. Conclúa que $\dot{A}_iA_{i+k} = \dot{A}_iA_{i-k}$ é a bissectriz de $\angle A_i$. Mostre que as bissectrizes de ângulos internos consecutivos se intersectam num ponto equidistante dos correspondentes vértices. Infira daqui que todas as bissectrizes dos ângulos internos do polígono concorrem num mesmo ponto equidistante de todos os vértices.

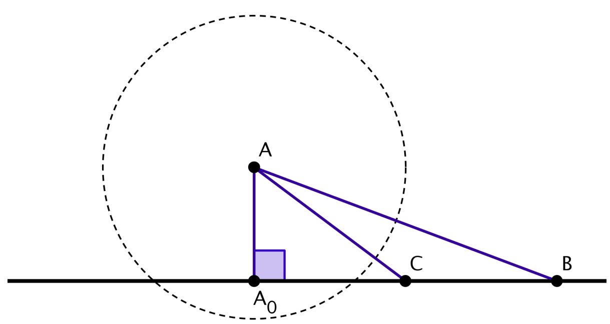


$n = 2k - 1$



$n = 2k$

(b) $n = 2k - 1$ é ímpar. Neste caso veja por indução em $j = 1, \ldots, k-1$, usando o critério LAL, que $\Delta A_iA_{i+j}A_{i+j+1} \simeq \Delta A_iA_{i-j}A_{i-j-1}$. Conclúa que $\Delta A_iA_{i-k}A_{i-k+1} = \Delta A_iA_{i-k}A_{i+k}$ é um triângulo isósceles, e que a bissectriz de $\angle A_i$ coincide com a mediatriz do lado oposto, $\overline{A_{i-k}A_{i+k}}$. Mostre que as bissectrizes de ângulos internos consecutivos se intersectam num ponto equidistante dos correspondentes vértices. Infira daqui que todas as bissectrizes dos ângulos internos do polígono concorrem num mesmo ponto equidistante de todos os vértices.



Ex 3-20 Sejam $\ell \subset \mathcal{E}$ uma recta, $A \in \mathcal{E} - \ell$ e $A_0 \in \ell$ o pé da perpendicular de A sobre ℓ.

(a) Sem perda de generalidade podemos supôr que B e C estão na mesma semirecta de origem A_0 suportada em ℓ. Porquê? Veja que $|A_0B| > |A_0C|$ implica $C \in \mathrm{int}(A_0B)$, que por sua vez implica que $\angle ACB$ é obtuso. Deduza então, pelo teorema do maior ângulo maior lado, que $|AB| > |AC|$.

(b) Sejam $f : \ell \to \mathbb{R}$ um sistema de coordenadas tal que $f(A_0) = 0$, e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = |Af^{-1}(x)|$.

 (i) Usando a desigualdade triangular mostre que $|h(x) - h(y)| \leq |x - y|$;

 (ii) Use a alínea (a) para justificar que h é estritamente monótona nos intervalos $[0, +\infty[$ e $] - \infty, 0]$;

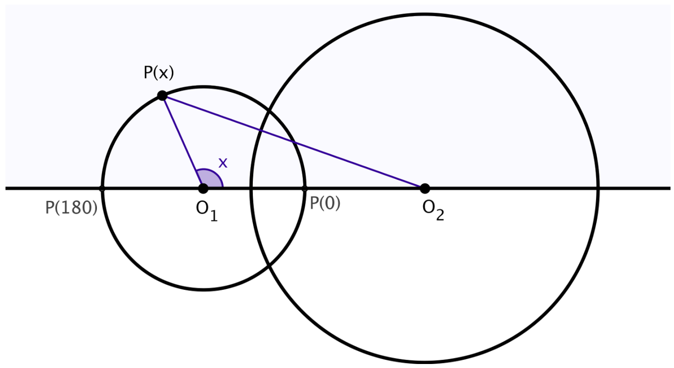
 (iii) Mostre que $\Delta Af^{-1}(x)f^{-1}(-x)$ é um triângulo isósceles, para inferir que $h(-x) = h(x)$.

 (iv) Mostre que $h(x) \geq |x|$. Conclúa que $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty$;

(c) Considere a recta ℓ e a circunferência de centro A e raio $r > 0$. Se ℓ intersecta $\mathrm{int}(\mathcal{C})$ então $h(0) = |AA_0| < r$. De (b) infira que a equação $h(x) = r$ tem exactamente duas soluções $\pm x_0$. Mostre que $\ell \cap \mathcal{C} = \{f^{-1}(x_0), f^{-1}(-x_0)\}$ e que $\ell \cap \mathrm{int}(\mathcal{C}) = \{\, f^{-1}(x) \,:\, -x_0 < x < x_0 \,\}$

Ex 3-21 A partir do Teorema da Semi-recta interior e dos axiomas de medição e marcação de ângulos prove que f é estritamente monótona e sobrejectiva. Veja que f só pode ter descontinuidades de primeira espécie, em que os limites laterais existem mas são distintos. Argumente que se f fosse descontínua então não seria sobrejectiva.

Ex 3-22 Considere ΔABC, um triângulo rectângulo em B, com $|AB| = |BC| = r$ e $m(\angle A) = \alpha_0$. Usando o Teorema da Semi-recta interior justifique que existe $D \in \overline{BC}$ tal que $m(\angle DAB) = m(\angle POP_0) \leq \alpha_0$. Por LAL, mostre que $\Delta ABC \simeq \Delta OP_0P'$ para algum $P' \in \dot{O}P$. Justifique que P' está na intersecção da recta tangente a $\mathcal{C}$ em P_0 com a semi-recta $\dot{O}P$.



Ex 3-23 Considere duas circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ de centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2, respectivamente, tais que $\mathcal{C}_1$ intersecta o interior e o exterior de $\mathcal{C}_2$. Seja $\ell = O_1O_2$ e $f : \ell \to \mathbb{R}$ um sistema de coordenadas tal que $f(O_1) = 0$ e $f(O_2) > 0$. Fixe um dos semiplanos H limitados por ℓ. Para cada $x \in [0, 180]$ seja $P(x)$ o único ponto de $\mathcal{C}_1$ tal que $m(\angle P(x)O_1O_2) = x$. Defina-se $h : [0, 180] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = |P(x)O_2|$.

(a) Para ver a continuidade em x_0, considere a recta t tangente a $\mathcal{C}_1$ em $P(x_0)$. Veja, pelo exercício 22, que para x próximo de x_0 a semirecta $\dot{O}_1P(x)$ intersecta t num ponto $Q(x)$. Mostre que $|h(x) - h(x_0)| \leq |P(x)P(x_0)| \leq |Q(x)P(x_0)|$ e use o exercício 21.

(b) Use o exercício 3-6 para concluir que h é estritamente crescente.

(c) Mostre que se $\mathcal{C}_1$ intersecta o interior de $\mathcal{C}_2$, num ponto que podemos logo supor estar no semiplano H , então $h(x) < r_2$ para algum $x \in [0, 180]$, o que implica $h(0) < r_2$. Analogamente, se $\mathcal{C}_1$ intersecta o exterior de $\mathcal{C}_2$, num ponto que podemos logo supor estar no semiplano H , então $h(x) > r_2$ para algum $x \in [0, 180]$, o que implica $h(180) > r_2$.

(d) Veja que existe um único ângulo $x \in]0, 180[$ tal que $h(x) = r_2$, e conclúa que existe um único ponto em $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap H$.

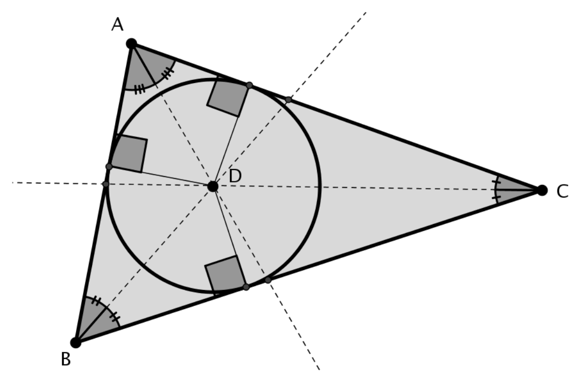
Ex 3-24 Dados $P, Q \in \text{int}(\mathcal{C})$ considere a recta $\ell = PQ$ e aplique o exercício 3-20 (d).

Ex 3-25 Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ tivessem o mesmo centro então, como se intersectam, teriam de ser iguais, o que contradiz a hipótese. Logo $O_1 \neq O_2$.

(a) Sejam A e B dois pontos de intersecção de $\mathcal{C}_1$ com $\mathcal{C}_2$. Mostre, por absurdo, que um dos pontos A, ou B, está fora da recta O_1O_2. Para isso veja que A e B têm as mesmas relações de ordem com O_1 e O_2, inferindo daí que $A = B$. As duas desigualdades pretendidas seguem então de aplicar a desigualdade triângular a (cada um dos três lados de) um dos triângulos ΔAO_1O_2, ou ΔBO_1O_2.

(b) Usando (a), veja que o ponto de intersecção da semirecta $\dot{O}_1O_2$ com $\mathcal{C}_1$ está em $\mathrm{int}(\mathcal{C}_2)$, enquanto o ponto de intersecção da semirecta oposta com $\mathcal{C}_1$ está em $\mathrm{ext}(\mathcal{C}_2)$.

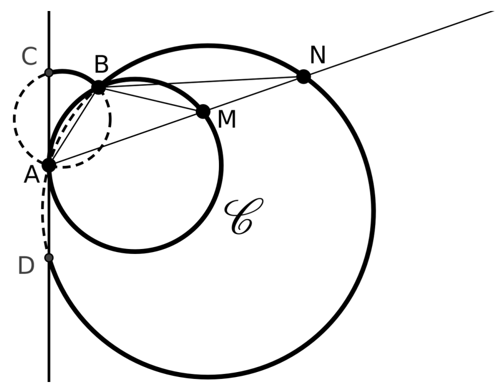
4 Circunferências. Construções de Régua e Compasso.



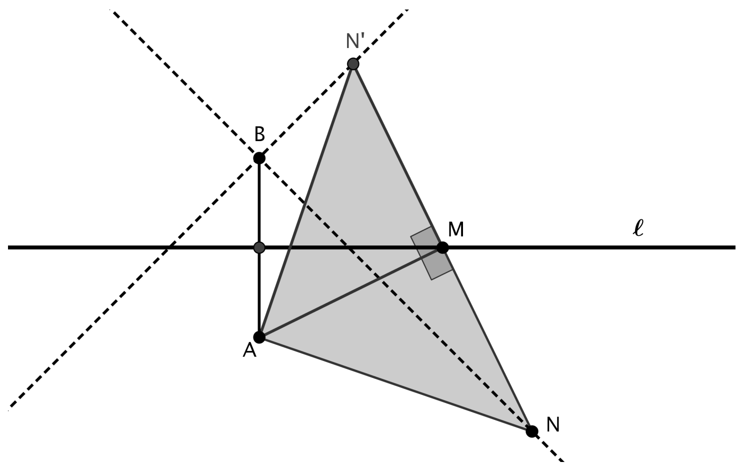
Ex 4-1 Usando o Teorema da Semi-recta Interior, prove que quaisquer duas bissectrizes de ângulos internos do mesmo triângulo se intersectam num ponto interior ao triângulo. Use então a caracterização da bissectriz dum ângulo, enquanto lugar geométrico dos pontos no interior do ângulo equidistantes dos dois lados, para concluir que o ponto de intersecção de duas bissectrizes pertence também à terceira bissectriz, sendo equidistante dos três lados do triângulo. Começe por descrever construções de régua e compasso para o pé da perpendicular de um ponto relativamente a uma recta e para a bissectriz dum ângulo. Para o *pé da perpendicular*, marque dois pontos P_1, P_2 sobre a recta, e trace as circunferências de centros P_1, P_2, respectivamente, que passam pelo ponto dado. A recta que liga os dois pontos de intersecção das duas circunferências é perpendicular à recta dada. A intersecção desta com a recta dada é o pé da perpendicular desejado. Para a *bissectriz dum ângulo*, marque os pontos

P_1, P_2 de intersecção dos lados do ângulo com uma circunferência de raio positivo arbitrário, e trace a recta que liga a origem do ângulo ao ponto médio do segmento $\overline{P_1P_2}$. Para a *construção da circunferência inscrita*, trace as bissectrizes de dois ângulos internos do triângulo e marque o seu ponto de intersecção, que é o incentro do triângulo. Marque o pé da perpendicular do incentro sobre um dos lados, e trace a circunferência centrada no incentro que passa pelo pé da perpendicular determinado. A circunferência traçada está inscrita no triângulo dado.

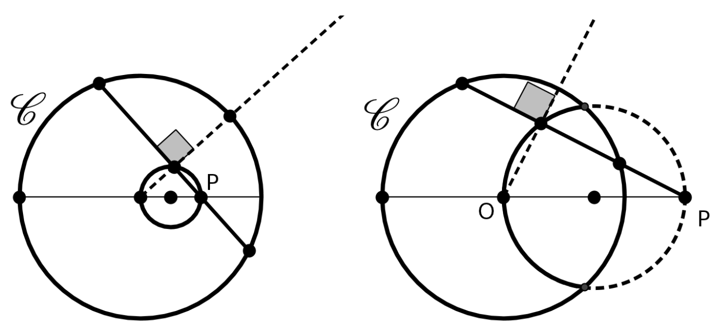
Ex 4-2 Marque um segmento $\overline{AB}$ com $|AB| = c$, a circunferência $\mathcal{C}$ de diâmetro $\overline{AB}$ e uma recta ℓ paralela a AB a uma distância h desta. Tomando $C \in \mathcal{C} \cap \ell$, ΔABC é um triângulo nas condições pedidas.



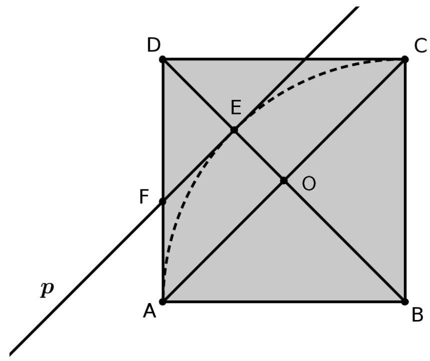
Ex 4-3 Sejam $\mathcal{C}$ a circunferência que contem A, B e M, e γ_1 e γ_2 os arcos de $\mathcal{C}$ limitados por A e B. O ângulo $\angle ANB$ tem uma amplitude constante e igual a um quarto da medida do arco γ_i contido no semiplano limitado por AB que não contem N. Mostre que N pertence ao semiplano S que contem B e que está limitado pela recta tangente a $\mathcal{C}$ no ponto A. Sejam C e D os pontos desta recta tangente tais que $|AC| = |AD| = |AB|$. O lugar geométrico é, por tudo isto, a intersecção do semiplano S com a união de dois arcos de circunferência com extremidades A, B, que passam pelos pontos C e D respectivamente.



Ex 4-4 Seja A_0 o pé da perpendicular de A sobre ℓ, e $B \in \dot{A}A_0$ tal que $A - A_0 - B$ e $|AA_0| = |A_0B|$. Sejam $C, D \in \ell$ tais que $C - A_0 - D$ e $|CA_0| = |A_0D| = |AA_0|$. Dado N tal que ΔAMN é triângulo rectângulo isósceles cujo terceiro vértice M está em ℓ, considere a circunferência $\mathcal{C}$ de diâmetro AN e mostre que $\mathcal{C}$ intersecta ℓ no ponto M e num outro ponto X. Use o Teorema do Arco Capaz para deduzir que o triângulo ΔAA_0X é isósceles. Conclúa que $X = C$ ou $X = D$, e que $B \in NX$, donde $N \in BC \cup BD$. Se N pertencer a uma destas duas rectas, e estiver por exemplo no semiplano de aresta AA_0 que contem C, considere a circunferência $\mathcal{C}$ circunscrita a ΔACN, e chame M ao segundo ponto de intersecção de $\mathcal{C}$ com ℓ. Mostre que ΔAMN é um triângulo rectângulo isósceles.



Ex 4-5 Considere uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro O, e um ponto $P \in \text{int}(\mathcal{C})$. Seja $\mathcal{C}_1$ a circunferência de diâmetro $\overline{OP}$. Mostre que qualquer corda de $\mathcal{C}$ que passe por P intersecta $\mathcal{C}_1$ num ponto X tal que OX é perpendicular à corda. Se $P \in \text{ext}(\mathcal{C})$ defina $\mathcal{C}_1$ como a intersecção da circunferência de diâmetro $\overline{OP}$ com $\text{int}(\mathcal{C})$.

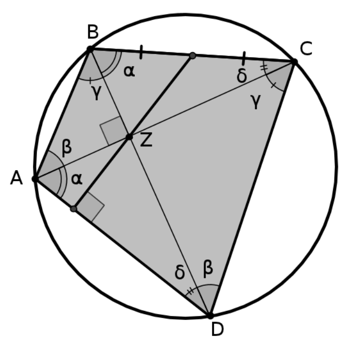


Ex 4-6 Considere um quadrado de vértices consecutivos A, B, C e D e seja O tal que $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$. Seja $E \in \dot{B}D$ tal que $|AB| = |BE|$.

(a) $D - E - O$ porque pelo Teorema de Pitágoras, $|BO| = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|AB| < |BE| = |AB| < |BD| = \sqrt{2}\,|AB|$.

(b) Use o "Axioma de Pasch" e o facto de p ser paralela a AC.

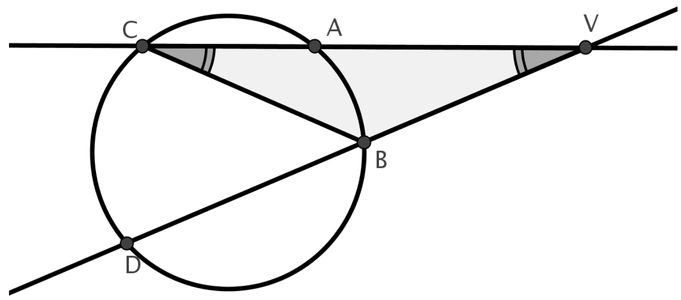
(c) Como $|AB| = |BE|$, use o Teorema do Triângulo Isósceles para deduzir que $\angle AEB \simeq \angle EAB$, e, por complementaridade, que $\angle FAE \simeq \angle FEA$. Aplicando de novo o Teorema do Triângulo Isósceles conclúa que $|AF| = |DE|$.



Ex 4-7 Sejam Z_0 o pé da perpendicular de Z sobre o lado $\overline{AD}$, e Z_1 o ponto de intersecção de ZZ_0 com $\overline{BC}$. Use o Teorema do Arco Capaz para comparar e medir os ângulos internos dos triângulos envolvidos, e o Teorema do Triângulo Isósceles para justificar que vários deles são isósceles. Conclúa que Z_1 é o bissector de $\overline{BC}$.

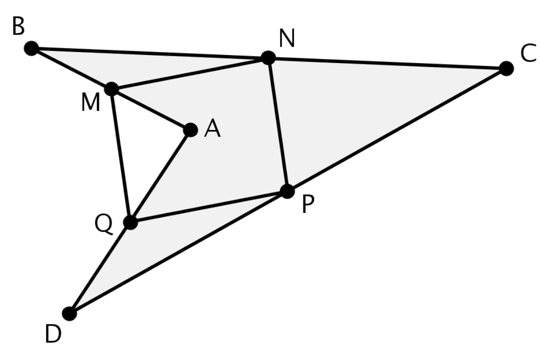
Ex 4-8 Considere a circunferência que circunscreve o triângulo rectângulo ΔABC.

Ex 4-9 Num triângulo equilátero todos os ângulos medem 60 graus, e todos os lados são iguais. Para ambas as implicações, por reflexão em torno do cateto maior, oposto ao maior ângulo agudo, construa um triângulo equilátero.

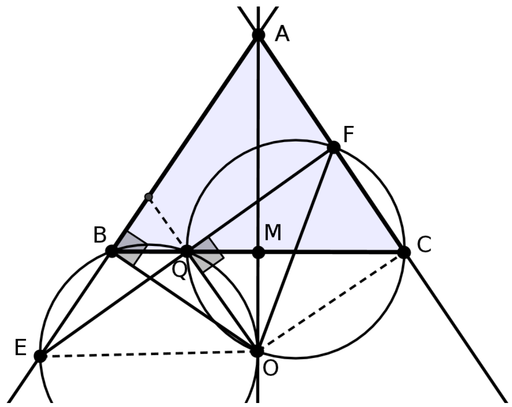


Ex 4-10 Use o Teorema do Arco Capaz e seus corolários para comparar as medidas dos ângulos em C e V no triângulo ΔVBC.

5 Semelhança de Triângulos.



Ex 5-1 Comece por mostrar que num triângulo ΔABC, se M for o bissector de $\overline{AB}$ e N o bissector de $\overline{BC}$, então $\Delta ABC \sim \Delta MBN$ e MN é paralela a AC. Dado um quadrilátero, considere o polígono dos pontos médios dos seus lados. Veja que lados opostos, deste polígono dos pontos médios, são paralelos por aplicação do resultado preliminar.



Ex 5-2 Seja ΔABC um triângulo isósceles com $|AB| = |AC|$ tal que:

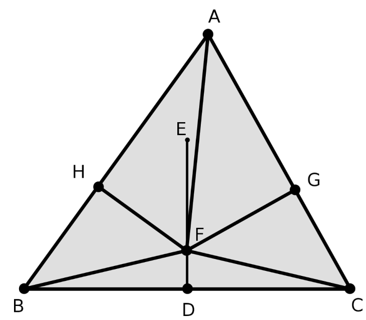
(i) M é o bissector de $\overline{BC}$, e $O \in AM$ é tal que $OB \perp AB$;

(ii) $Q \in \mathrm{int}(\overline{BC})$;

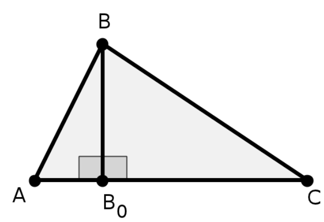
(iii) $E \in AB$, $F \in AC$ tais que E, Q, F são distintos mas colineares.

Veja a figura acima. Comece por supor que $OQ \perp EF$. Considerando os triângulos rectângulos ΔOBE e ΔOQE com hipotenusa $\overline{EO}$, veja que existe uma circunferência $\mathcal{C}$ que contem E, O, B e Q. Analogamente, veja que existe uma circunferência $\mathcal{C}'$ que contem F, C, O e Q. Aplicando o teorema do Arco Capaz mostre que ΔEFO é um triângulo isósceles, e conclua, pelo Teorema do Triângulo Isósceles, que $|QE| = |QF|$.

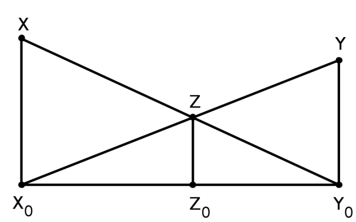
Para a implicação recíproca comece por provar o seguinte resultado abstracto: *dados dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ tais que $|AB| = |A'B'|$ e $\angle A = \angle A'$, $\angle B > \angle B' \;\Leftrightarrow\; |AC| > |A'C'|$.* Establecido este facto, suponha que $E - B - A$, como na figura. Supondo que $\angle OQE$ não é recto, considere a recta E_0F_0, com $E_0 \in \dot{A}B$ e $F_0 \in \dot{A}C$, que corta OQ perpendicularmente no ponto Q. Baseando-se na implicação anterior justifique que $|QE_0| = |QF_0|$. Veja então que $B - E_0 - E$ se $\angle OQE$ é agudo, e que $B - E - E_0$ se $\angle OQE$ é obtuso. Em cada um destes dois casos aplique o resultado abstracto, enunciado acima, para comparar os triângulos ΔQE_0E e ΔQF_0F e concluir que $|QE| \neq |QF|$.



Ex 5-3 O passo errado na demonstração do "Teorema : Todos os triângulos são isósceles" é que não podemos concluir, como está desenhado na figura, que os pontos H e G, pés das perpendiculares de F sobre $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, pertencem a estes segmentos. Quando o triângulo não é isósceles $F \in \text{ext}(\Delta ABC)$ e $H \notin \overline{AB}$ ou $G \notin \overline{AC}$.



Ex 5-4 Justifique que $\angle B$ é o maior ângulo de ΔABC, e conclua que o pé da perpendicular B_0 de B sobre AC está em $\overline{AC}$. Aplicando o teorema de Pitágoras a ΔABB_0 e ΔCBB_0 mostre que estes dois triângulos são semelhantes, e deduza daí que $\angle B$ é recto.



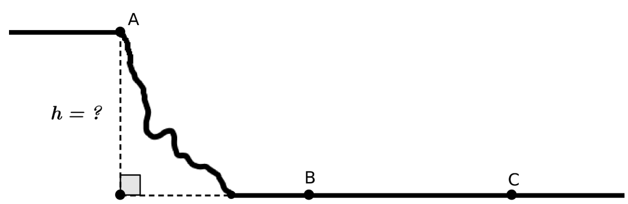
Ex 5-5 Sejam r uma recta e $X, Y \in \mathcal{E} - r$ pontos no mesmo semiplano de aresta r tais que $X_0 \neq Y_0$, onde X_0 designa o pé da perpendicular de X sobre r e Y_0 o pé da perpendicular de Y sobre r.

(a) Por comparação de ângulos, veja que a semi-recta $\dot{X_0}Y$ é interior ao ângulo recto $\angle XX_0Y_0$, e que a semi-recta $\dot{Y_0}X$ é interior ao ângulo recto $\angle YY_0X_0$. Pelo Teorema da Semi-recta interior, mostre que $\dot{X_0}Y$ intersecta $\overline{XY_0}$, e que $\dot{Y_0}X$ intersecta $\overline{X_0Y}$.

(b) Use o critério AAA para concluir que $\Delta XX_0Y_0 \sim \Delta ZZ_0Y_0$ e que $\Delta YY_0X_0 \sim \Delta ZZ_0X_0$. Comparando razões de lados convenientes, entre estes pares de triângulos semelhantes, obtenha expressões para $\frac{|ZZ_0|}{|XX_0|}$ e $\frac{|ZZ_0|}{|YY_0|}$ e some-as.

6 Trignometria

Ex 6-1 Aplique a lei dos Senos aos ângulos suplementares $\angle AXB$ e $\angle AXC$, e aos ângulos iguais $\angle BAX \simeq \angle CAX$.

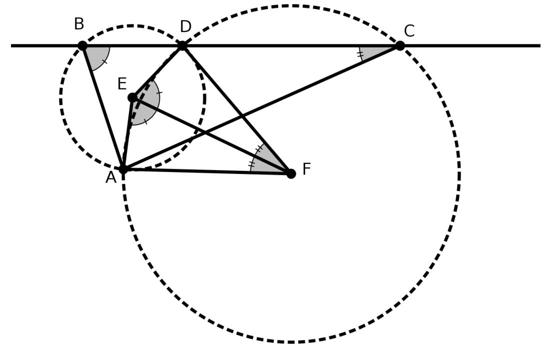


Ex 6-2 Seja A_0 o pé da perpendicular de A sobre BC, de modo que a altura pretendida seja $h = |AA_0|$. São possíveis as medições dos ângulos $\alpha_1 = m(\angle A_0BA)$ e $\alpha_2 = m(\angle A_0CA)$, bem como a distância $d = |BC|$. Aplicando a lei dos senos ao triângulo rectângulo ΔAA_0B, exprima $|A_0B|$ em função de h. Aplicando a lei dos senos ao triângulo rectângulo ΔAA_0C, obtenha uma equação em h envolvendo os parâmetros determinados α_1, α_2 e d.

Ex 6-3 Sejam d o comprimento do segmento da bissectriz do ângulo recto entre o vértice e a hipotenusa, e a', b' os segmentos da hipotenusa separados pela bissectriz em causa, a' adjacente a a, e b' adjacente a b. Usando o exercício 6-1 e o teorema de Pitágoras obtenha equações em a, b, a', b', e deduza que

$$a' = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \ \text{ e } \ b' = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}\ .$$

Aplique então a lei dos Senos aos triângulos de lados a, a', d e b, b', d, respectivamente, para obter equações em d e nos senos, $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta) = \sin(90-\theta)$, dos ângulos agudos, θ e $90 - \theta$, do triângulo rectângulo. Obtenha por eliminação das funções trignométricas de θ uma equação quadrática em d.



Ex 6-4 Sejam E o centro da circunferência que circunscreve ΔABD, e F o centro da circunferência que circunscreve ΔACD. Usando o Teorema do Arco Capaz, mostre que $\Delta ABD \sim \Delta DEF$. Conclúa que $\frac{|ED|}{|FD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$.

O valor mínimo de $|ED|$, ou $|FD|$, tanto faz, é alcançado quando $AD \perp BC$, ie., quando ΔABD e ΔACD são triângulos rectângulos em D. Pela desigualdade triângular $|ED| = \frac{1}{2}\,(|EB|+|AE|) \geq \frac{1}{2}\,|AB|$, com igualdade sse ΔABD é rectângulo em D.

Ex 6-5 Num triângulo de lados a, b, c, ângulos opostos α, β, γ, e perímetro p, use a lei dos senos para obter o seguinte sistema de três equações nas incógnitas a, b, c:

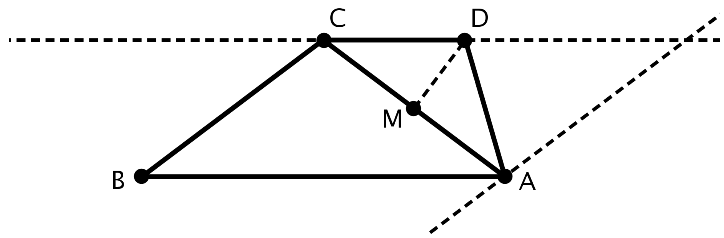
$$a + b + c = p, \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\ .$$

Resolvendo obtenha

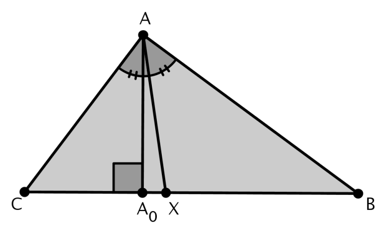
$$a = \frac{p}{1 + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}},\ b = \frac{p}{1 + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}},\ c = \frac{p}{1 + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}}\ ,$$

ou seja

$$a = \frac{p\,\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma},\ b = \frac{p\,\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma},\ c = \frac{p\,\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}\ .$$



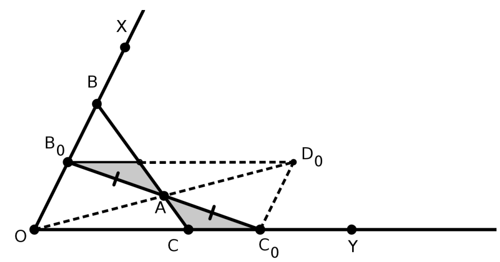
Ex 6-6 Mostre que $\angle CAD$ é agudo e por isso AD não pode ser paralela a BC. Conclua que DC é paralela a AB. Mostre que $\Delta ABC \sim \Delta ACD$. Aplique a lei dos cossenos a ΔABC para determinar o ângulo $\angle BAC$, e relacione-o com $\angle BAD$. Use a lei dos cossenos para determinar $|BD|$.



Ex 6-7 Sejam $\beta = m(\angle B)$ e $\gamma = m(\angle C)$. Suponha que $\gamma > \beta$ e mostre que o ângulo pedido é $\frac{1}{2}(\gamma - \beta)$. (Bastam considerações sobre medidas de ângulos. Esqueça as leis dos senos e cossenos.) No caso geral, a resposta à pergunta é $\frac{1}{2}\,|m(\angle C) - m(\angle B)|$.

Ex 6-8 Sejam $\beta = m(\angle B)$ e $\gamma = m(\angle C)$ os ângulos agudos do triângulo rectângulo ΔABC. Suponha que $\gamma \geq \beta$ e considere a circunferência que circunscreve ΔABC. Seja O o centro da circunferência, que é também o bissector de $\overline{BC}$. Mostre que $m(\angle AOC) = 2\beta$, e que ângulo entre a mediana e a altura é $90 - 2\beta = \gamma - \beta$. No caso geral, a resposta à pergunta é $|m(\angle C) - m(\angle B)|$.

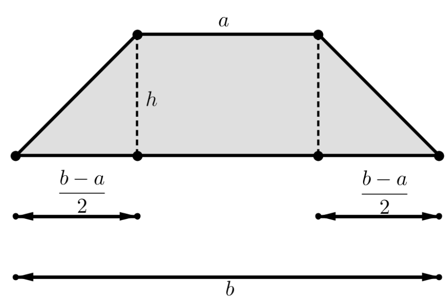
7 Áreas



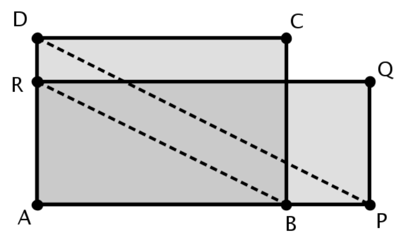
Ex 7-1 Sejam $B \in \dot{O}X$ e $C \in \dot{O}Y$ tais que $A \in BC$, e sejam $B_0 \in \dot{O}X$ e $C_0 \in \dot{O}Y$ tais que $A \in B_0C_0$ e $|B_0A| = |AC_0|$. Comece por mostrar que os pontos B_0 e C_0 nestas condições são únicos, vendo que $\overline{B_0C_0}$ é a diagonal do único paralelogramo $OB_0D_0C_0$ com $B_0 \in \dot{O}X$ e $C_0 \in \dot{O}Y$, tal que $\overline{OD_0} \cap \overline{B_0C_0} = \{A\}$. Supondo que $B \neq B_0$, justifque que $|AB| \neq |AC|$. Considere então dois casos: Se $|AB| > |AC|$, veja que existe C' entre A e B tal que $|AC| = |AC'|$, e deduza que $A(\Delta AC_0C) = A(\Delta AC'B_0) < A(\Delta ABB_0)$. Conclua que $A(\Delta OB_0C_0) < A(\Delta OBC)$. Se $|AB| < |AC|$, argumentando de modo análogo, infira que $A(\Delta OB_0C_0) < A(\Delta OBC)$.

Ex 7-2 Seja A a área de um triângulo de lados a, b, c, e ângulos internos opostos α, β, γ, respectivamente. Veja que a área do triângulo é $A = \frac{a\,b}{2}\sin\gamma = \frac{a\,b}{2}\sin(\alpha+\beta)$, e pela lei dos senos obtenha que $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Resolvendo estas equações em ordem a a e b obtenha

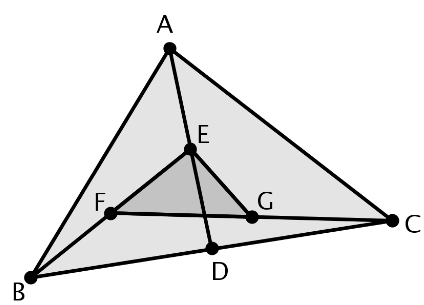
$$a^2 = \frac{2\,A\,\sin\alpha}{\sin\beta\,\sin(\alpha+\beta)},\ b^2 = \frac{2\,A\,\sin\beta}{\sin\alpha\,\sin(\alpha+\beta)},\ c^2 = \frac{2\,A\,\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta}\,.$$



Ex 7-3 Sejam $a < b$ os comprimentos dos lados paralelos do trapézio, e h a sua altura (distância entre os lados paralelos). Veja que, por hipótese, $\frac{(a+b)\,h}{2} = b^2 - a^2$ e conclua que $h = 2\,(b-a)$. Infira daqui que o ângulo agudo do trapézio mede $\operatorname{arccos}(\frac{\sqrt{17}}{17})$.



Ex 7-4 Use a informação sobre as áreas para deduzir que $\Delta ARB \sim \Delta ADP$, e que portanto $PD \parallel RB$.



Ex 7-5 Veja sucessivamente que

(1) $A(\Delta ABC) = 2\,A(\Delta EBC)$;

(2) $A(\Delta EBC) = 2\,A(\Delta EFC)$;

(3) $A(\Delta EFC) = 2\,A(\Delta EFG)$.

Conclua que $A(\Delta EFG) = \frac{1}{8}\,A(\Delta ABC)$.

Ex 7-6 Usando o incentro I dum triângulo ΔABC decomponha-o nos três triângulos ΔABI, ΔBCI e ΔCAI. Mostre que a soma das áreas destes três triângulos é igual ao produto do seu semiperímetro pelo inraio.

Ex 7-7 Sejam b, c os comprimentos dos catetos, e a a medida da hipotenusa dum triângulo rectângulo. Pelo exercício anterior, veja que o inraio é $r = \frac{b\,c}{a+b+c}$. Use o Teorema de Pitágoras para ver que também $\frac{b+c-a}{2} = \frac{b\,c}{a+b+c}$.

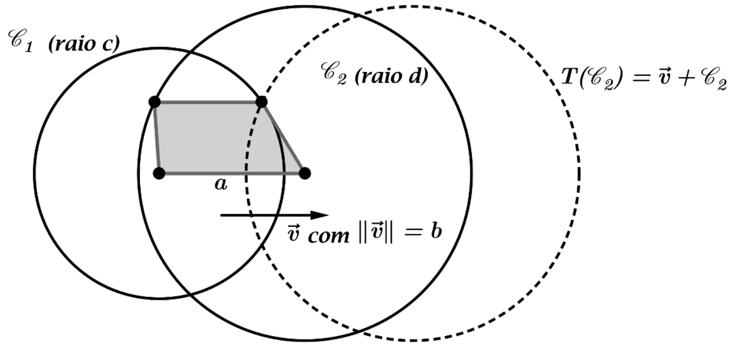
Ex 7-8 Usando o exercício 7-6, veja que $a\,h = (a+b+c)\,r$, e daí infira que $b+c = a\,(\frac{h}{r}-1)$. Pela lei dos cossenos veja que $c^2 = a^2+b^2-2\,a\,\sqrt{b^2-h^2}$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} b+c &= a\,(\frac{h}{r}-1) \\ \quad c^2 &= a^2+b^2-2\,a\,\sqrt{b^2-h^2} \end{cases}$$

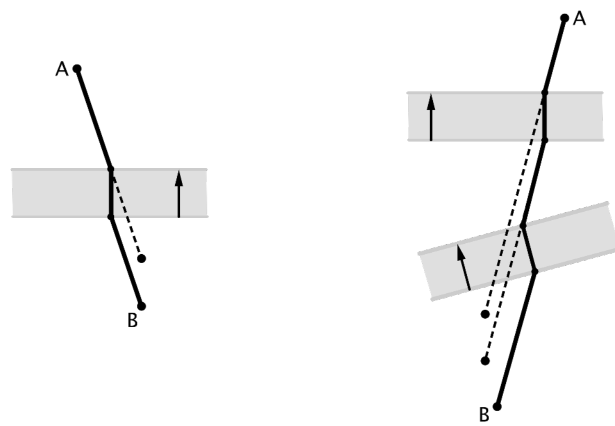
obtemos, simplificando, uma equação de segundo grau em b, que dá origem a um par de soluções em b, c, desde que $h > 2r$, o que equivale a $\frac{h}{r} - 1 > 1$. (As contas não são muito agradáveis, pelo que sugiro que não se resolva este problema). Geometricamente, sejam B e C tais que $|BC| = a$ e ℓ uma recta paralela a BC a uma distância h de BC. Escolhendo o ponto A na intersecção de ℓ com a elípse de focos B e C, em que a soma das distâncias aos focos é $a\,(\frac{h}{r}-1)$, obtemos um triângulo ΔABC nas condições desejadas. (Talvez haja uma construção geométrica mais simples, só com circunferências que permita encontrar os mesmos pontos de intersecção da elípse com a recta ℓ.)

8 Isometrias

Ex 8-1 Sejam $\mathcal{C}$ e ℓ a circunferência e a recta dadas, respectivamente. Seja $\vec{v}$ um vector paralelo a ℓ com norma igual ao comprimento fixado, e seja T a translação segundo o vector $\vec{v}$. Tomando $B \in \mathcal{C} \cap T(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \cap (\vec{v} + \mathcal{C})$, e $A = B - \vec{v}$, o segmento $\overline{AB}$ é uma corda de $\mathcal{C}$ tal que $|AB| = \|\vec{v}\|$.



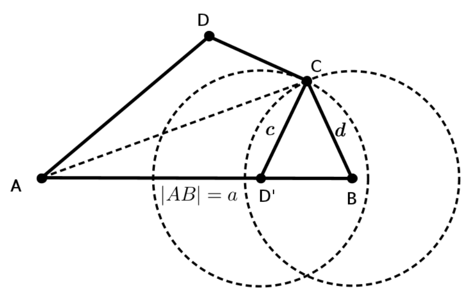
Ex 8-2 Desenhe um segmento de comprimento a, um vector $\vec{v}$ paralelo a esse segmento de comprimento b, e duas circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_1$ de centros nas extremidades do segmento a e raios b e c, respectivamente. Considere a translação T segundo o vector $\vec{v}$. Desenhe o trapézio a partir do segmento a e de um dos pontos de intersecção em $\mathcal{C}_1 \cap T(\mathcal{C}_2)$.



Ex 8-3 Dobre um mapa com as cidades e os rios de forma a sobrepor as duas margens, escondendo os leitos dos rios. Trace então o segmento de recta que liga A com B. Alternativamente, considere os vectores perpendiculares aos rios, com comprimentos iguais às respectivas larguras dos rios, e apontando no sentido de B para A. Transladando B segundo estes vectores, e traçando a recta que une esse ponto a A, obterá a direcção de saída de A.

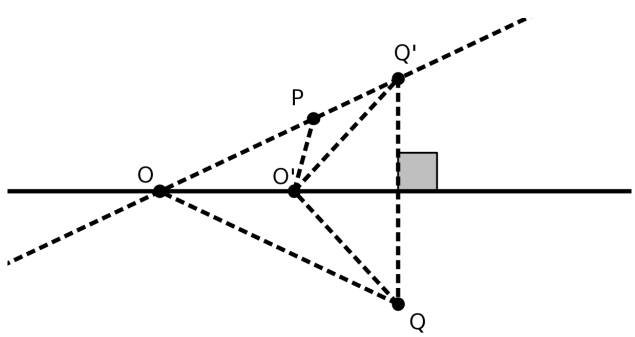
Ex 8-4 Sejam a e b os comprimentos dos lados de um paralelogramo e α o ângulo agudo entre as suas diagonais. Desenhe um triângulo isósceles de base a

e ângulo oposto α. Trace a circunferência $\mathcal{C}$ que circunscreve este triângulo. A intersecção das diagonais do paralelogramo deve ficar sobre $\mathcal{C}$. Desenhe, com centro numa das extremidades da base do triângulo isósceles, uma circunferência $\mathcal{C}'$ de raio $b/2$. Considere a translação T segundo o vector de norma a, paralelo à base a, que aponta na direcção da outra extremidade. O ponto de intersecção em $\mathcal{C} \cap T(\mathcal{C}')$ será o centro do paralelogramo (intersecção das diagonais).



Ex 8-5 Suponha que $a > b$. Tome um segmento $\overline{AB}$ com $|AB| = a$ e um ponto $D' \in \overline{AB}$ tal que $|AD'| = b$. Marque um ponto C na intersecção das circunferências $\mathcal{C}_1$ de centro B e raio d, e $\mathcal{C}_2$ de centro D' e raio c. Tome D como a imagem de D' pela reflexão em torno da recta AC.

Ex 8-6 Considere todos os triângulos de base b e altura h. Seja $\overline{AB}$ um segmento com $|AB| = b$, e ℓ uma recta paralela a AB a uma distância h desta, de modo que para cada $C \in \ell$, ΔABC seja um triângulo nas condições especificadas. Tome B' imagem de B pela reflexão em torno de ℓ, e $O \in \overline{AB'} \cap \ell$. Mostre que ΔAOB é um triângulo isósceles, e use a desigualdade triângular para ver que ΔAOB tem perímetro mínimo.



Ex 8-7 Reflectindo Q em torno de ℓ, P e Q' estão do mesmo lado de ℓ. Use a desigualdade triângular para mostrar que o valor de $||OP| - |OQ|| = ||OP| - |OQ'||$ é máximo quando P, Q, O são pontos colineares, com $O - P - Q'$ ou $O - Q' - P$. Ver a figura acima. Se PQ' for paralela a ℓ então o supremo das diferenças $||OP| - |OQ||$ é igual a $+\infty$.