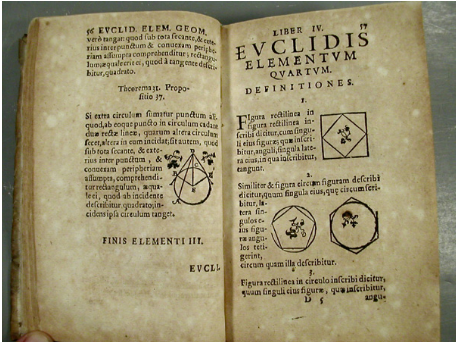
Geometria

Pedro Duarte

20111-2012

Os Elementos de Euclides



Tratado em Geometria composto de 13 livros, escrito c. 300 a.C. pelo matemático grego Euclides de Alexandria. Esta obra é a principal referência histórica ao **método dedutivo**, desenvolvido pelos gregos antigos, no qual se baseia toda a Matemática.

Algumas Definições do Livro I

I Ponto é o, que não tem partes.

II Linha é o, que tem comprimento sem largura.

III As extremidades da linha são pontos.

IV Linha recta é aquella, que está posta egualmente entre as suas extremidades.

cf. versão latina de Frederico Commandino dos *Elementos de Euclides*, Imprensa da Univ. Coimbra, 1855.
`http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html`

Alguns Postulados do Livro I

I Pede-se como cousa possivel, que se tire de um ponto qualquer para outro qualquer ponto uma linha recta.

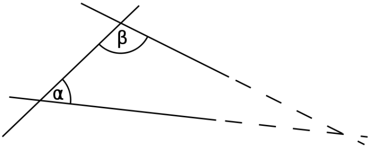
II E que uma linha recta determinada se continue em direitura de si mesma, até onde seja necessario.

III E que com qualquer centro e qualquer intervallo se descreva um circulo.

cf. versão latina de Frederico Commandino dos *Elementos de Euclides*, Imprensa da Univ. Coimbra, 1855.
`http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html`

O Quinto Postulado: Axioma das Paralelas

Se um segmento de reta intercepta duas retas, de modo que um dos pares dos ângulos colaterais internos tem soma inferior a dois ângulos retos, então as retas quando prolongadas suficientemente, se cortam do lado em que se encontram os referidos ângulos colaterais internos.



source: wikipedia

Ao longo de 2000 anos de história dos Elementos muitas tentativas foram feitas para provar o quinto postulado a partir dos restantes axiomas.

As Geometrias Não Euclideanas

No século XIX, de modo independente, os matemáticos Carl F. Gauss (alemão), János Bolyai (húngaro) e Nikolai I. Lobachevsky (russo) desenvolveram novas geometrias que satisfazem todos, ou quase todos, os axiomas de Euclides, menos o axioma das paralelas: a **Geometria Hiperbólica** e a **Geometria Esférica**.

Ainda no século XIX o matemático alemão Bernhard Riemann criou um novo tipo de Geometria, conhecida hoje como **Geometria Riemanniana**, que engloba as Geometrias Euclideana, Hiperbólica e Esférica como casos particulares.

A Fundamentação da Geometria

- David Hilbert, *Fundamentos da Geometria*, Colecção: Trajectos / Ciência, (2003) Gradiva.
- George D. Birkhoff & Ralph Beatley, *Basic Geometry*, (1959) Chelsea Publishing Co.
- Edwin Moise, *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, (1963) Addison-Wesley.
- Alfred Tarski, Steven Givant, *Tarski's System of Geometry*, (1999) The Bulletin of Symbolic Logic 5 (2).

Bibliografia

1. Paulo A. Ventura, *Curso de Geometria*,
   Gradiva, Trajectos de Ciência, (1998)
2. Luís Sanchez, *Notas para um curso de Geometria elementar*,
   `https://sites.google.com/site/luissanchezfcul/`
3. Harold Jacobs, *Geometry*,
   W. H. Freeman and Company, (1974)
4. José J. Dionísio, *Fundamentos da Geometria*,
   Textos de Matemática, Departamento de Matemática, FCUL.
5. Elon L. Lima, *Isometrias*, *Coordenadas no Plano*,
   Coleção do Professor de Matemática, SBM (1996)

Conceitos Primitivos e Terminologia

$\mathcal{E}$ denota o plano Euclideano

Os elementos do plano Euclideano, $P \in \mathcal{E}$, dizem-se **pontos**.

Certos subconjuntos $r \subset \mathcal{E}$ dizem-se **rectas**.

Seja P um ponto e r uma recta. Dizemos que r **passa por** P, que P **incide com** r, ou que r **incide com** P para significar $P \in r$.

Pontos que incidam com uma mesma recta dizem-se **colineares**.

Rectas que incidam com um mesmo ponto dizem-se **concorrentes**.

Axiomas de Incidência

A1 *Por dois pontos passa uma única recta.*

A2 *Cada recta contém pelo menos dois pontos.*

A3 *Há pelo menos três pontos não colineares.*

Dados dois pontos $A, B \in \mathcal{E}$, denotamos por AB a única recta que passa por A e por B.

Proposição 1 *Dada uma recta há pelo menos um ponto que não lhe pertence.*

Proposição 2 *Dado um ponto há pelo menos uma recta que não passa por ele.*

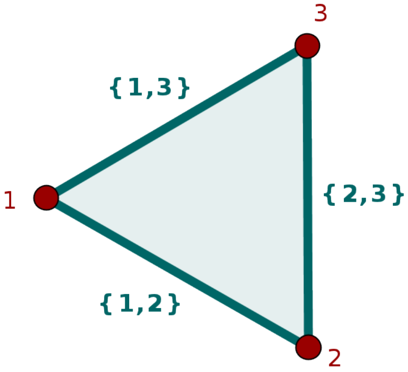
Proposição 3 *Por cada ponto passam pelo menos duas rectas.*

Proposição 4 *Há pelo menos três rectas não concorrentes.*

Um Modelo de Geometria de Incidência

$\mathcal{E} = \{1, 2, 3\}$

São rectas os conjuntos $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$.



Axioma das Distâncias

A cada par de pontos $P, Q \in \mathcal{E}$ está associado um número real $|PQ| \in \mathbb{R}$, que é chamado a **distância** de P a Q, e que satisfaz:

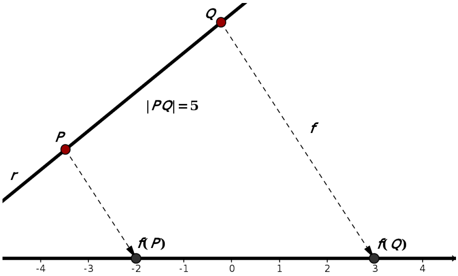
A4 *Dados pontos* $P, Q \in \mathcal{E}$,

- $|PQ| \geq 0$,
- $|PQ| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = Q$,
- $|PQ| = |QP|$.

Seja $r \subset \mathcal{E}$ uma recta.

Chama-se **sistema de coordenadas** em r a uma aplicação bijectiva $f : r \to \mathbb{R}$ tal que

$$|PQ| = |f(P) - f(Q)|, \ \forall\, P, Q \in r.$$



O Axioma da Régua Graduada

Dado um sistema de coordenadas $f : r \to \mathbb{R}$,
o número $f(P)$ diz-se a **coordenada** de P no sistema de coordenadas f, e o único ponto $O \in r$ tal que $f(O) = 0$ diz-se a **origem** do sistema de coordenadas.

A5 *Dada uma recta $r \subset \mathcal{E}$, existe pelo menos um sistema de coordenadas em r.*

Isometrias da Recta Real

Uma aplicação bijectiva $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|\phi(x) - \phi(y)| = |x - y|, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ diz-se uma **isometria**.

Proposição *A inversa duma isometria é uma isometria. A composição de isometrias é uma isometria.*

Proposição *Dada uma isometria $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que*

- $\phi(x) = x + c, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$, *ou*
- $\phi(x) = -x + c, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Mudanças de Coordenadas

Seja $f : r \to \mathbb{R}$ um sistema de coordenadas na recta $r \subset \mathcal{E}$.

Proposição *Fixado $c \in \mathbb{R}$, as aplicações $g, h : r \to \mathbb{R}$, $g(P) = f(P) + c$ e $h(P) = c - f(P)$, $\forall\, P \in r$, são sistemas de coordenadas em r.*

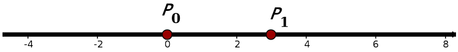
Dados sistemas de coordenadas $f, g : r \to \mathbb{R}$ a aplicação $g \circ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se uma **mudança de coordenadas**.

Proposição *Toda a mudança de coordenadas é uma isometria.*

Corolário *Dados sistemas de coordenadas $f, g : r \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(P) = f(P) + c, \forall\, P \in r$ ou $g(P) = -f(P) + c, \forall\, P \in r$.*

Seja $r \subset \mathcal{E}$ uma recta.

Teorema *Dados dois pontos $P_0, P_1 \in r$ existe um único sistema de coordenadas em r com origem P_0 e tal que P_1 tem coordenada positiva.*



Orientações duma recta

Seja $r \subset \mathcal{E}$ uma recta.

Fixado um sistema de coordenadas $f : r \to \mathbb{R}$, dados pontos $P, Q \in r$ dizemos que P **está à esquerda**, resp. **à direita, de** Q $\Leftrightarrow$ $f(P) \leq f(Q)$, resp. $f(P) \geq f(Q)$.

Referimo-nos a esta relação de ordem em r como uma **orientação** induzida pelo sistema de coordenadas f na recta r.

Proposição *Numa recta há exactamente duas orientações. Dois sistemas de coordenadas $f, g : r \to \mathbb{R}$ induzem a mesma orientação sse existir uma constante c tal que $f(X) = g(X) + c$, $\forall\, X \in r$.*

Segmentos de recta e relação '*estar entre*'

Dados dois pontos $A, B \in \mathcal{E}$, e $P \in AB$, dizemos que P **está entre** A **e** B, e escrevemos $A - P - B$, $\Leftrightarrow$ $\exists$ sistema de coordenadas $f : AB \to \mathbb{R}$ tal que $f(A) < f(B)$ e $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$.

Chama-se **segmento de recta de extremos** A **e** B ao conjunto

$$\overline{AB} = \{\, P \in AB \ :\ P \ \text{está entre} \ A \ \text{e} \ B \,\}\ .$$

Chama-se **interior do segmento de recta** $\overline{AB}$ ao conjunto

$$\operatorname{int}(\overline{AB}) = \overline{AB} - \{A, B\}\ .$$

Proposição *Dados dois pontos* $A, B \in \mathcal{E}$, $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Comprimento de segmentos

Chama-se **comprimento** dum segmento $\overline{PQ}$ à distância $|PQ|$.

Dois segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{P'Q'}$ dizem-se **congruentes**, e escrevemos $\overline{PQ} \simeq \overline{P'Q'}$, $\Leftrightarrow$ $|PQ| = |P'Q'|$.

Proposição *Dados dois pontos $A, B \in \mathcal{E}$ existe um único ponto $M \in AB$ tal que $|AM| = |MB|$. Fixado qualquer sistema de coordenadas $f : AB \to \mathbb{R}$, o ponto M tem coordenada $f(M) = \frac{f(A)+f(B)}{2}$.*

O ponto M da proposição anterior diz-se o **ponto médio** ou o **bissector** do segmento $\overline{AB}$.

Semi-rectas

Sejam $r \subset \mathcal{E}$ uma recta e $P \in r$ um ponto.

Fixada uma orientação em r, os conjuntos dos pontos de r à direita, resp. à esquerda, de P dizem-se **semi-rectas de origem** P.

Proposição *Há exactamente duas semi-rectas contidas em r de origem P, cuja interseção se reduz ao ponto P, e cuja união é a recta r. Fixado um sistema de coordenadas $f : r \to \mathbb{R}$, essas duas semi-rectas são*

$$\{ X \in r : f(X) \geq f(P) \} \quad e \ \{ X \in r : f(X) \leq f(P) \}.$$

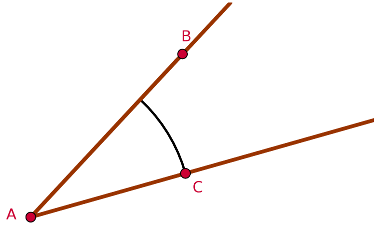
Dados dois pontos $P, Q \in r$, a única semi-recta contida em r com origem P que contem Q será denotada por $\dot{P}Q$.

Ângulos

Chama-se **ângulo** à união de duas semi-rectas com a mesma origem,

$$\angle BAC = \dot{A}B \cup \dot{A}C \ ,$$

onde $A, B, C \in \mathcal{E}$, $A \neq B$ e $A \neq C$.



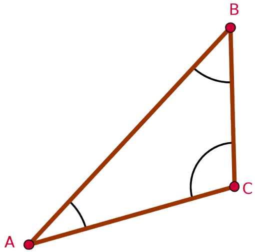
As semi-rectas $\dot{A}B$ e $\dot{A}C$ dizem-se os **lados** do ângulo $\angle BAC$.

Note-se, que por definição, $\angle BAC = \angle CAB$.

Triângulos

Dados três pontos não colineares $A, B, C \in \mathcal{E}$, chama-se **triângulo** ao conjunto

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}\ .$$



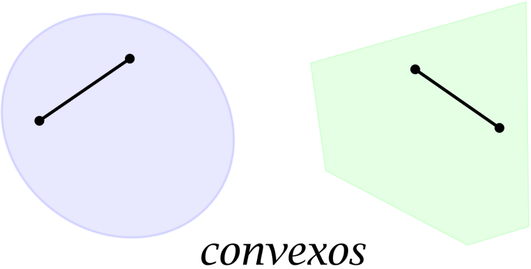
Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ dizem-se **lados** do triângulo ΔABC.

Os ângulos $\angle ABC$, $\angle BCA$ e $\angle CAB$ dizem-se **ângulos internos** do triângulo ΔABC.

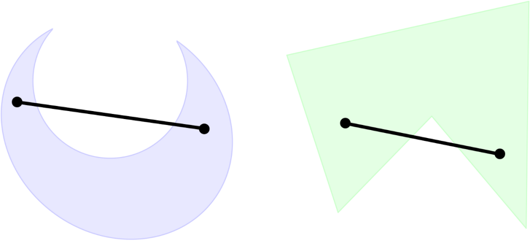
Conjuntos Convexos

Um subconjunto $C \subset \mathcal{E}$ diz-se **convexo** $\Leftrightarrow$ $\overline{PQ} \subset C, \ \forall P, Q \in C$.

A figura seguinte mostra dois exemplos de conjuntos convexos.



A figura seguinte mostra dois exemplos de conjuntos não convexos.



não convexos

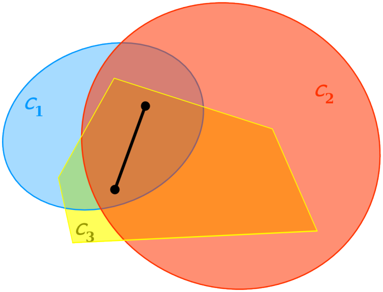
Exemplos de Conjuntos Convexos

- conjunto vazio,
- conjunto formado por um único ponto,
- uma recta,
- uma semi-recta,
- segmento de recta.

A Intersecção de Convexos é Convexa

Sejam $C_i \subset \mathcal{E}$ conjuntos convexos, $\forall\, i \in I$.

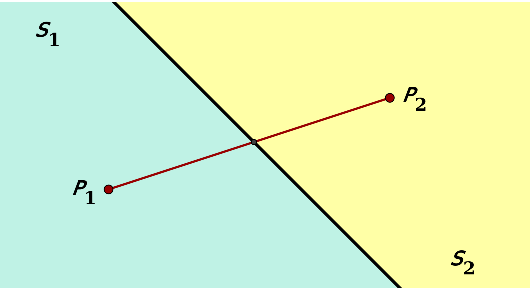
Então $\quad C = \cap_{i \in I} C_i \quad$ é convexo.



Axioma da Separação

A6 *Dada uma recta* $\ell \subset \mathcal{E}$, $\exists$ *subconjuntos* $S_1, S_2 \subset \mathcal{E}$ *tais que*

- $\mathcal{E} - \ell = S_1 \cup S_2$,
- $S_1 \cap S_2 = \emptyset$,
- S_1 *e* S_2 *são convexos,*
- $P_1 \in S_1$ *e* $P_2 \in S_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{P_1 P_2} \cap \ell \neq \emptyset$.



Semiplanos

Seja $\ell \subset \mathcal{E}$ uma recta, e $S_1, S_2 \subseteq \mathcal{E}$ os conjuntos convexos nas condições de **A6**.

Proposição

1. $P \in S_1,\ Q \in S_1 \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \cap \ell = \emptyset,$
2. $P \in S_1,\ Q \in S_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} \cap \ell \neq \emptyset.$

Corolário *Fixado* $P \in S_i$,

$$S_i = \{\, Q \in \mathcal{E} - \ell \,:\, \overline{PQ} \cap \ell = \emptyset \,\}, \quad \textit{para} \;\; i = 1, 2.$$

Em particular a decomposição $\mathcal{E} - \ell = S_1 \cup S_2$ *é única.*

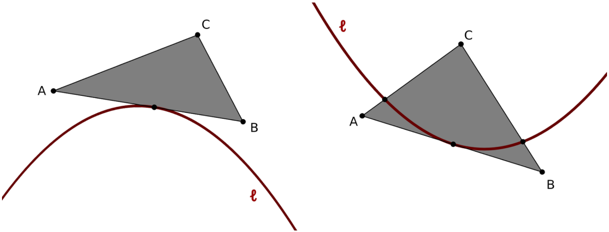
Os conjuntos S_1 e S_2 no axioma **A6** dizem-se **semiplanos limitados** por ℓ.

Sejam A, B, C três pontos não colineares.

Teorema *Seja $\ell \subset \mathcal{E}$ uma recta que não incide com nenhum dos vértices A, B, C do triângulo ΔABC. Então:*

(1) *ℓ não pode intersectar apenas um lado de ΔABC,*

(2) *ℓ não pode intersectar os três lados de ΔABC.*



Interior dum Ângulo

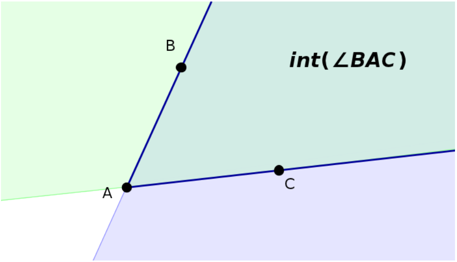
Consideremos o ângulo $\angle BAC$, onde A, B, C são três pontos não colineares.

Pelo axioma **A6** existem

- S_1 semiplano limitado pela recta AB que contem C, e
- S_2 semiplano limitado pela recta AC que contem B.

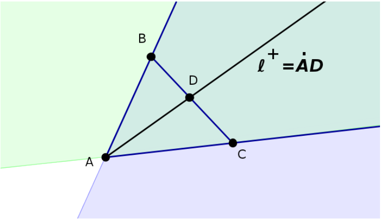
Define-se o **interior do ângulo** $\angle BAC$ como sendo

$$\mathrm{int}(\angle BAC) = S_1 \cap S_2 \ .$$



Propriedades do Interior dum Ângulo

Consideremos o ângulo $\angle BAC$, onde A, B, C são três pontos não colineares.



Teorema da Semi-recta Interior

O interior de $\angle BAC$ é um conjunto convexo.

Dado $D \in \mathrm{int}(\overline{BC})$, $\dot{A}D - \{A\} \subset \mathrm{int}(\angle BAC)$.

Seja ℓ^+ uma semirecta com origem A tal que

$$\ell^+ - \{A\} \subset \mathrm{int}(\angle BAC) .$$

Então existe $D \in \mathrm{int}(\overline{BC})$ tal que $\ell^+ = \dot{A}D$.

Interior dum Triângulo

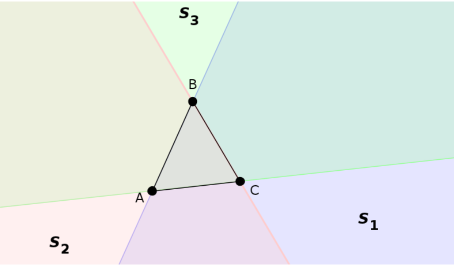
Sejam A, B, C três pontos não colineares.

Pelo axioma **A6** existem

- S_1 semiplano limitado pela recta AB que contem C,
- S_2 semiplano limitado pela recta BC que contem A,
- S_3 semiplano limitado pela recta AC que contem B.

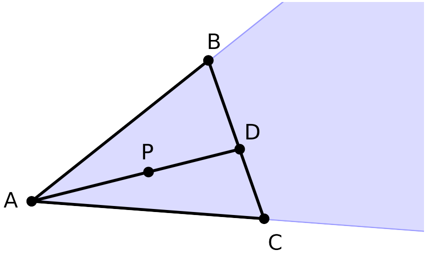
Define-se o **interior do triângulo** ΔABC como sendo

$$\mathrm{int}(\Delta ABC) = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \ .$$



Propriedades do Interior dum Triângulo

Consideremos o triângulo ΔBAC, onde A, B, C são três pontos não colineares.



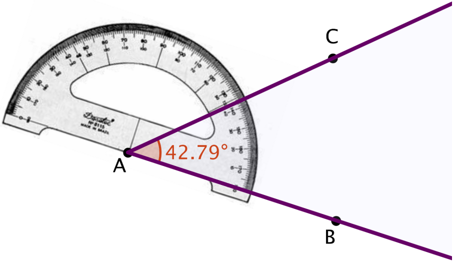
Proposição

(1) $\mathrm{int}(\overline{BC}) \subset \mathrm{int}(\angle BAC)$,

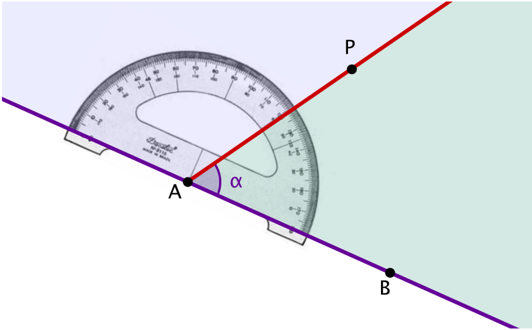
(2) $D \in \mathrm{int}(\overline{BC})$ e $P \in \mathrm{int}(\overline{AD}) \;\Rightarrow\; P \in \mathrm{int}(\Delta ABC)$.

O Axioma da Medição de Ângulos

A7 *A cada ângulo* $\angle CAB$ *está associado um único número* $m(\angle CAB)$ *no intervalo* $]0, 180[$, *a que se chama a* **amplitude do ângulo** $\angle CAB$.

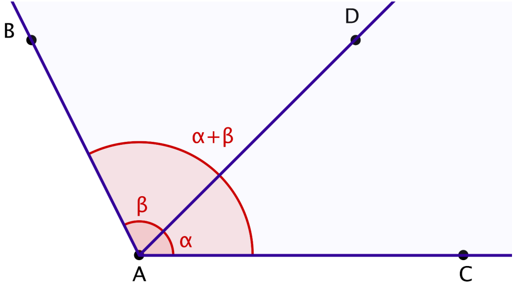


A8 *Dados pontos* $A, B \in \mathcal{E}$, *um semiplano* H *limitado pela recta* AB, *e um número* $\alpha \in]0, 180[$, *existe uma única semi-recta* $\dot{A}P$, *com* $P \in H$, *tal que* $m(\angle PAB) = \alpha$.



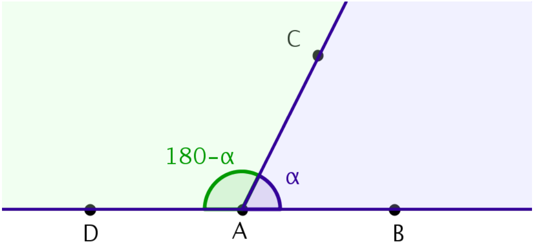
O Axioma da Aditividade de Ângulos

A9 *Dados um ângulo* $\angle BAC$, *e* $D \in \mathrm{int}(\angle BAC)$ *então*
$$m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC).$$



O Axioma dos Ângulos Suplementares

Dois ângulos $\angle BAC$ e $\angle CAD$ dizem-se **suplementares adjacentes** se e só se B, A, D forem colineares e $A \in \mathrm{int}(\overline{BD})$.



A10 *Se $\angle BAC$ e $\angle CAD$ forem ângulos suplementares adjacentes então $m(\angle BAC) + m(\angle CAD) = 180$.*

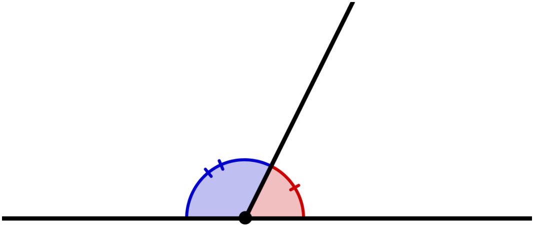
Dois ângulos $\angle ABC$ e $\angle DEF$ dizem-se **congruentes**, e escrevemos $\angle ABC \simeq \angle DEF$, se e só se $m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$.

Um ângulo $\angle ABC$ diz-se **recto** se e só se $m(\angle ABC) = 90$.

Proposição *Um ângulo $\angle ABC$ é recto se e só se for congruente a algum dos ângulos que lhe são suplementares adjacentes.*

Ângulos Suplementares

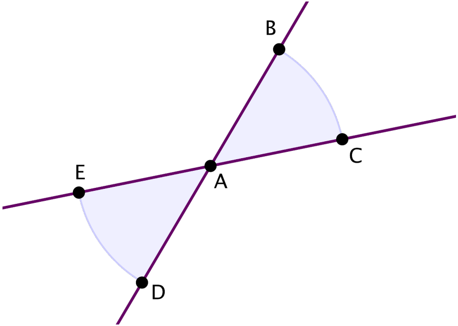
Dois ângulos dizem-se **suplementares** se e só se a soma das suas amplitudes for igual a 180.



Proposição *Dois ângulos são suplementares se e só se um deles for congruente a um suplementar adjacente do outro.*

Ângulos Verticalmente Opostos

Se $A \in \mathrm{int}(\overline{BD})$ as semi-rectas $\dot{A}B$ e $\dot{A}D$ dizem-se **opostas**.



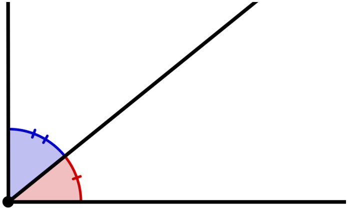
Dois ângulos dizem-se **verticalmente opostos** se e só se os lados de um forem as semi-rectas opostas aos lados do outro ângulo.

Proposição *Quaisquer dois ângulos verticalmente opostos são congruentes.*

Ângulos Complementares

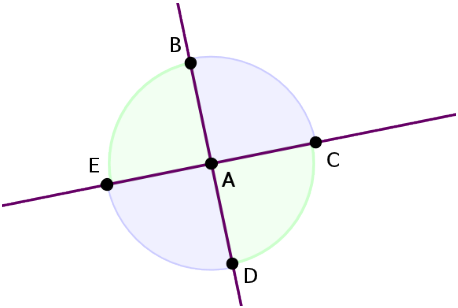
Chamam-se **agudos** os ângulos cuja amplitude seja inferior a 90; e **obtusos** os ângulos com amplitude superior a 90.

Dois ângulos dizem-se **complementares** se e só se as suas amplitudes somarem 90.



Perpendicularidade

Duas rectas concorrentes dizem-se **perpendiculares** se e só se algum dos quatro ângulos formados por elas, com origem no ponto de intersecção, for recto.



Escrevemos $\ell \perp r$ para dizer que duas rectas ℓ e r são perpendiculares.

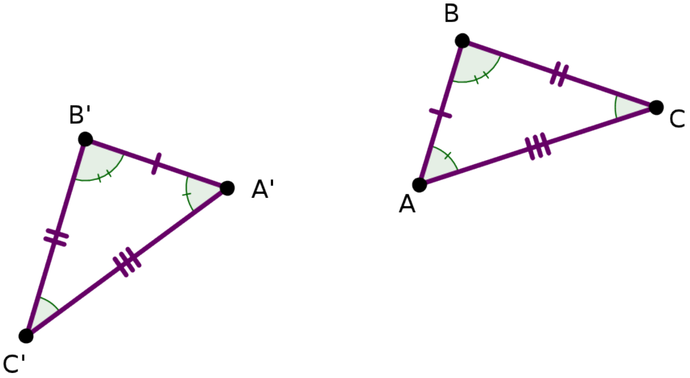
Notação (Ângulos Internos dum Triângulo)

Fixado um triângulo ΔABC os seu ângulos internos designam-se abreviadamente por

$$\angle A = \angle CAB\,,$$
$$\angle B = \angle ABC\,,$$
$$\angle C = \angle BCA\,.$$

Congruência de Triângulos

Dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ dizem-se **congruentes**, e escrevemos $\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$, se e só se $\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \simeq \overline{B'C'}$, $\overline{CA} \simeq \overline{C'A'}$, $\angle A \simeq \angle A'$, $\angle B \simeq \angle B'$ e $\angle C \simeq \angle C'$.



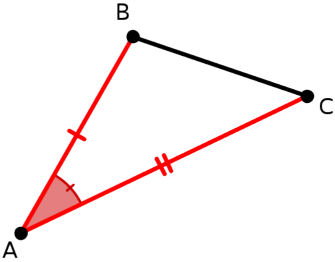
A correspondência $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, diz-se uma **congruência**.

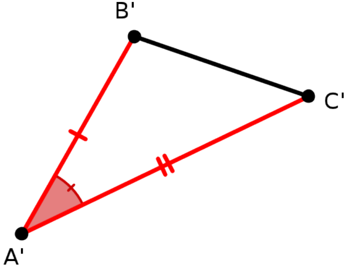
O Axioma LAL (Transporte de Congruências)

A11 *Dados triângulos* ΔABC *e* $\Delta A'B'C'$,

$$\overline{AB} \simeq \overline{A'B'},\quad \overline{AC} \simeq \overline{A'C'} \quad e \quad \angle A \simeq \angle A' \quad \Rightarrow$$

$$\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'.$$

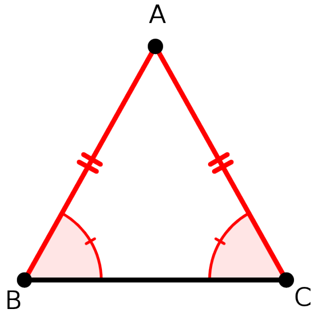




Teorema do Triângulo Isósceles

Teorema *Dado um triângulo* ΔABC,

$$\overline{AB} \simeq \overline{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \angle B \simeq \angle C.$$

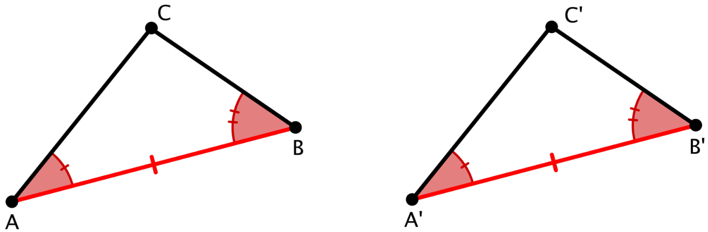


Um triângulo que satisfaça estas condições equivalentes diz-se **isósceles, de base** $\overline{BC}$.

Corolário *Todo o triângulo equilátero (com 3 lados congruentes) é equiangular (tem 3 ângulos congruentes).*

Critério ALA

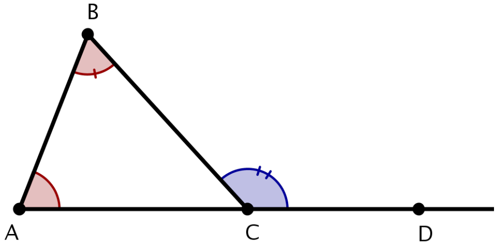
Teorema *Dados triângulos* ΔABC *e* $\Delta A'B'C'$,
$\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$, $\angle A \simeq \angle A'$ e $\angle B \simeq \angle B'$ $\Rightarrow$
$\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$.



Teorema do Ângulo Externo

Chama-se **ângulo externo** dum triângulo ΔABC a um suplementar adjacente dum seu ângulo interno.

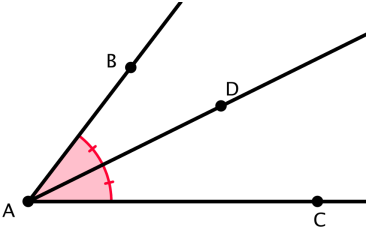
Teorema *Qualquer ângulo externo é maior que um ângulo interno que não lhe seja adjacente.*



Bissectriz dum Ângulo

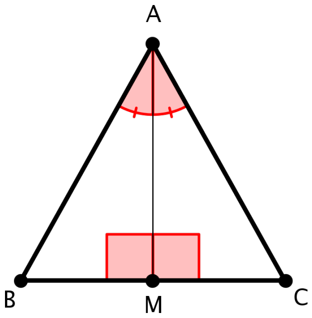
Chama-se **bissectriz** dum ângulo $\angle BAC$ a uma semi-recta $\dot{A}D$, com $D \in \mathrm{int}(\angle BAC)$, tal que

$$m(\angle BAD) = m(\angle DAC) = \frac{1}{2}\, m(\angle BAC)\ .$$



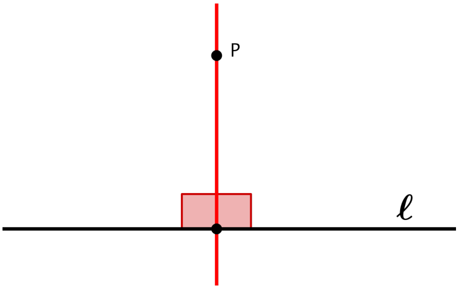
Proposição *Todo o ângulo admite uma única bissectriz.*

Teorema *Sejam ΔABC um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$, e M o ponto médio deste segmento. Então $AM \perp BC$, e $\dot{A}M$ é a bissectriz do ângulo $\angle BAC$.*



Perpendicular por um Ponto

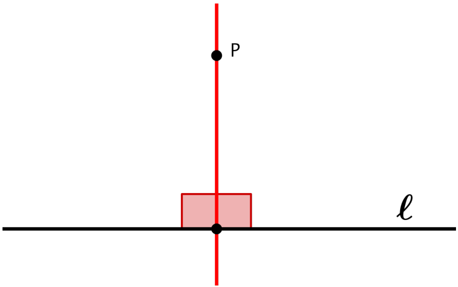
Sejam $\ell \subset \mathcal{E}$ uma recta e $P \in \mathcal{E}$ um ponto.



Teorema *Existe uma única recta $r \subset \mathcal{E}$ que passa em P e corta ℓ perpendicularmente.*

Perpendicular por um Ponto

Sejam $\ell \subset \mathcal{E}$ uma recta e $P \in \mathcal{E}$ um ponto.

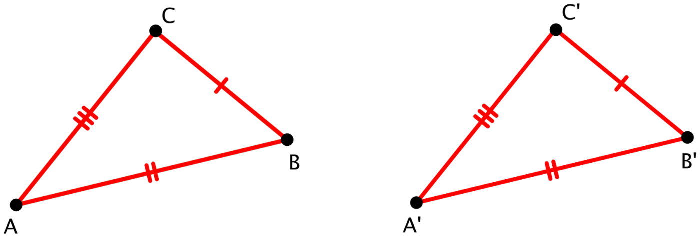


Teorema *Existe uma única recta $r \subset \mathcal{E}$ que passa em P e corta ℓ perpendicularmente.*

Critério LLL

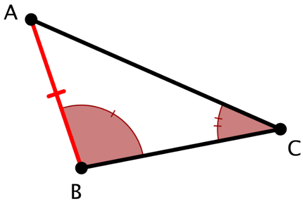
Teorema *Dados triângulos* ΔABC *e* $\Delta A'B'C'$,

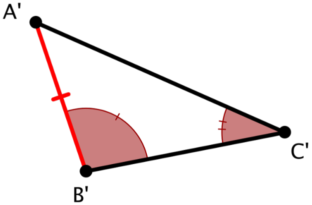
$$\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} \simeq \overline{B'C'} \quad e \quad \overline{AC} \simeq \overline{A'C'} \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'.$$



Critério LAA

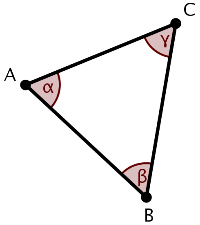
Teorema *Dados triângulos* ΔABC *e* $\Delta A'B'C'$,
$\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$, $\angle B \simeq \angle B'$ e $\angle C \simeq \angle C'$ $\Rightarrow$
$\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$.

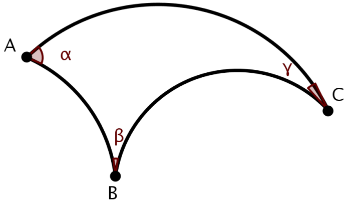




Soma dos Ângulos Internos dum Triângulo

Teorema *A soma dos ângulos internos dum triângulo é menor ou igual a* 180.





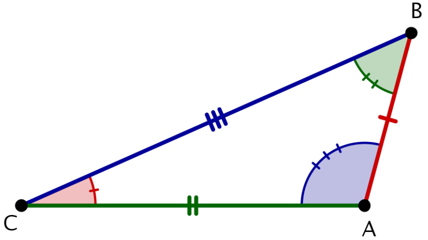
$$\alpha+\beta+\gamma=180 \qquad \alpha+\beta+\gamma<180$$

Maior Lado, Maior Ângulo

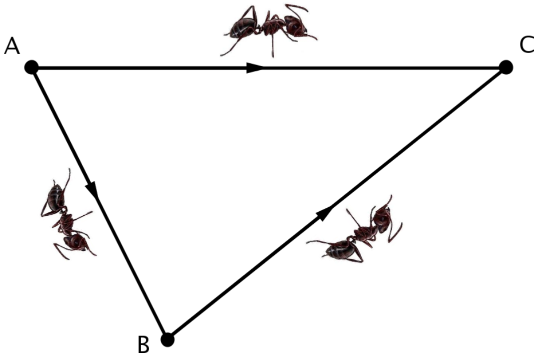
De agora em diante vamos escrever $\angle ABC > \angle DEF$ como sinónimo de $m(\angle ABC) > m(\angle DEF)$.

Teorema *Em qualquer triângulo, ao maior lado opõem-se o maior ângulo. Mais precisamente, num triângulo* ΔABC,

$$\angle A > \angle B \quad \Leftrightarrow \quad |BC| > |AC|.$$



Desigualdade Triângular

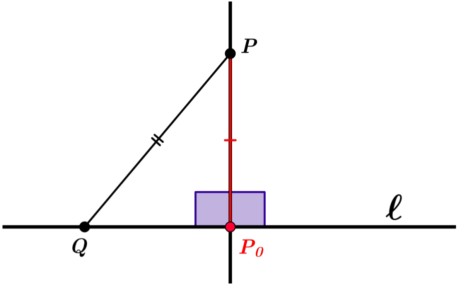


Teorema *Cada um dos lados dum triângulo é menor que a soma dos outros dois.*

Distância dum Ponto a uma Recta. Pé da Perpendicular

Sejam $\ell \subset \mathcal{E}$ uma recta, e $P \in \mathcal{E}$ um ponto.

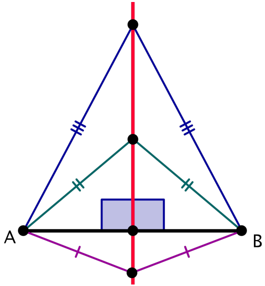
Chama-se **pé da perpendicular**, ou **projecção ortogonal**, de P sobre ℓ ao único ponto $P_0 \in \ell$ em que a perpendicular a ℓ por P cruza a recta ℓ.



Teorema *Se* $P_0 \in \ell$ *for o pé da perpendicular de* P *sobre* ℓ *então* $|PQ| \geq |PP_0|$*, qualquer que seja* $Q \in \ell$*.*

Mediatriz dum Segmento

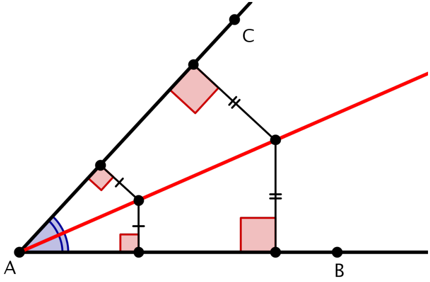
Chama-se **mediatriz** dum segmento $\overline{AB}$ à recta que corta perprendicularmente AB no ponto médio do segmento $\overline{AB}$.



Teorema *A mediatriz do segmento de recta $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos de $\mathcal{E}$ equidistantes de A e de B.*

Bissectriz dum Ângulo

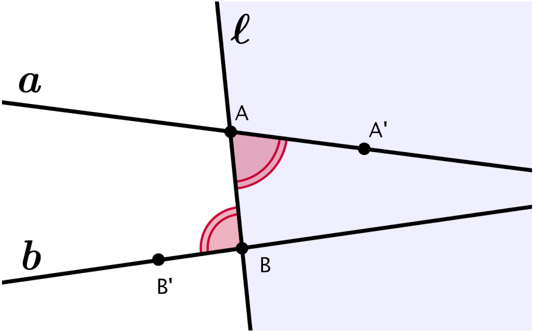
Teorema *A bissectriz do ângulo* $\angle BAC$ *é o lugar geométrico dos pontos em* $\mathrm{int}(\angle BAC)$ *equidistantes de* $\dot{A}B$ *e de* $\dot{A}C$.



Ângulos Alternos-Internos

Sejam $\ell, a, b \subset \mathcal{E}$ três rectas tais que $\ell \cap A = \{A\}$ e $\ell \cap b = \{B\}$.

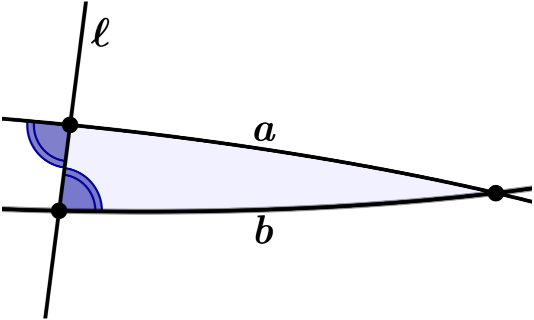
Se os pontos $A' \in a - \{A\}$ e $B' \in b - \{B\}$ são tais que $\dot{A}A'$ e $\dot{B}B'$ estão em semiplanos opostos limitados por ℓ, $\angle A'AB$ e $\angle B'BA$ dizem-se **ângulos alternos-internos** determinados pela transversal ℓ nas rectas a e b.



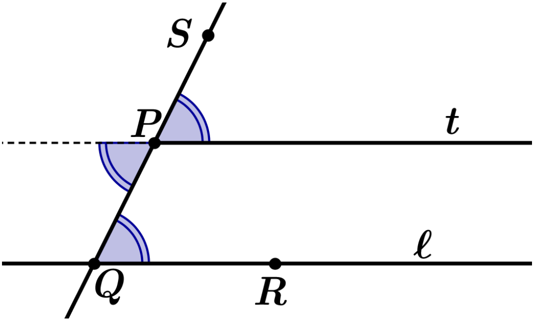
Condição Suficiente para Paralelismo

Duas rectas $r, \ell \subset \mathcal{E}$ dizem-se **paralelas** se e só se $r \cap \ell = \emptyset$.

Teorema *Se uma recta ℓ corta duas rectas a e b formando ângulos alternos internos iguais, então as rectas a e b são paralelas.*



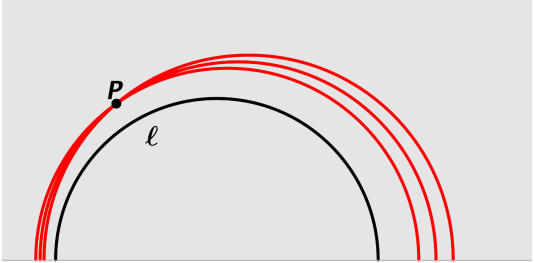
Proposição *Por qualquer ponto exterior a uma recta ℓ dada passa pelo menos uma recta paralela a ℓ.*



O Axioma das Paralelas

A12 *Por qualquer ponto exterior a uma recta ℓ dada passa no máximo uma recta paralela a ℓ.*

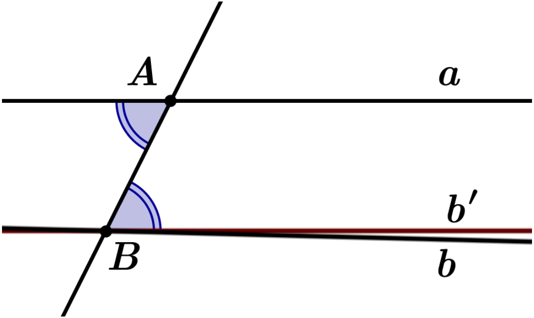
A Geometria Hiperbólica satisfaz todos os axiomas anteriores, mas não satisfaz menos este.



O Axioma das Paralelas é o único axioma específico da Geometria Euclideana.

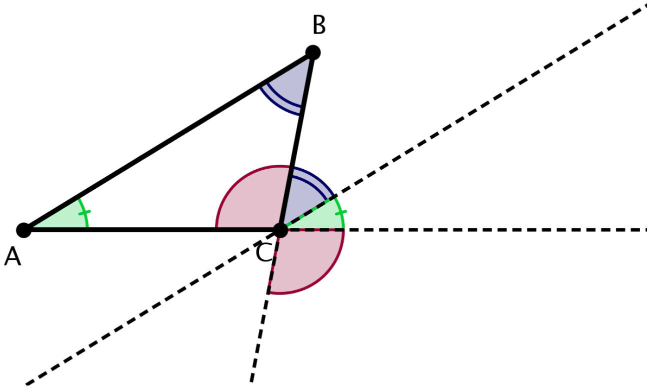
Condição Necessária para Paralelismo

Teorema *Se as rectas a e b são paralelas então toda a recta* ℓ *que corte a e b forma com elas ângulos alternos internos iguais.*



Corolário *A relação de paralelismo entre rectas é transitiva.*

Teorema *A soma dos ângulos internos de qualquer triãngulo é igual a* 180.

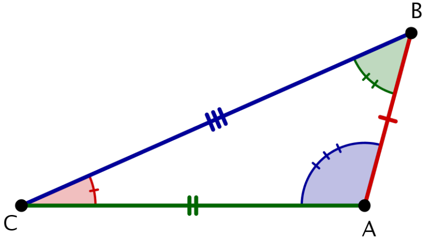


Maior Lado, Maior Ângulo

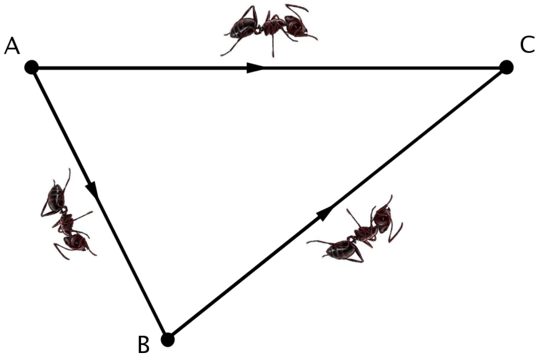
De agora em diante vamos escrever $\angle ABC > \angle DEF$ como sinónimo de $m(\angle ABC) > m(\angle DEF)$.

Teorema *Em qualquer triângulo, ao maior lado opõem-se o maior ângulo. Mais precisamente, num triângulo* ΔABC,

$$\angle A > \angle B \quad \Leftrightarrow \quad |BC| > |AC|.$$



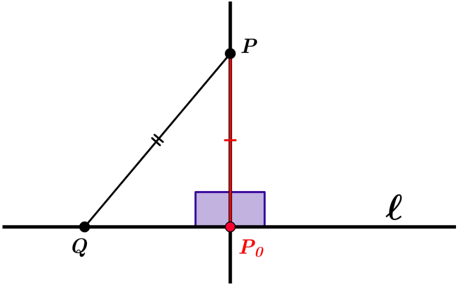
Desigualdade Triângular



Teorema *Cada um dos lados dum triângulo é menor que a soma dos outros dois.*

Sejam $\ell \subset \mathcal{E}$ uma recta, e $P \in \mathcal{E}$ um ponto.

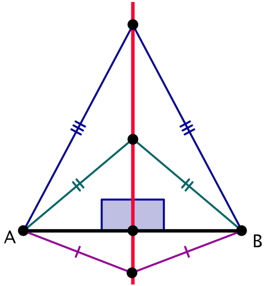
Chama-se **pé da perpendicular**, ou **projecção ortogonal**, de P sobre ℓ ao único ponto $P_0 \in \ell$ em que a perpendicular a ℓ por P cruza a recta ℓ.



Teorema *Se $P_0 \in \ell$ for o pé da perpendicular de P sobre ℓ então $|PQ| \geq |PP_0|$, qualquer que seja $Q \in \ell$.*

Mediatriz dum Segmento

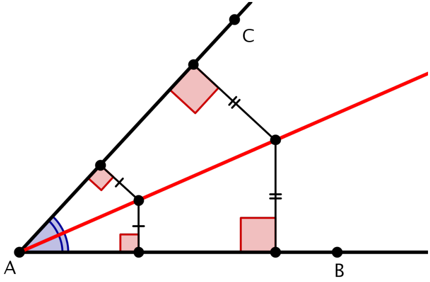
Chama-se **mediatriz** dum segmento $\overline{AB}$ à recta que corta perprendicularmente AB no ponto médio do segmento $\overline{AB}$.



Teorema *A mediatriz do segmento de recta $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos de $\mathcal{E}$ equidistantes de A e de B.*

Bissectriz dum Ângulo

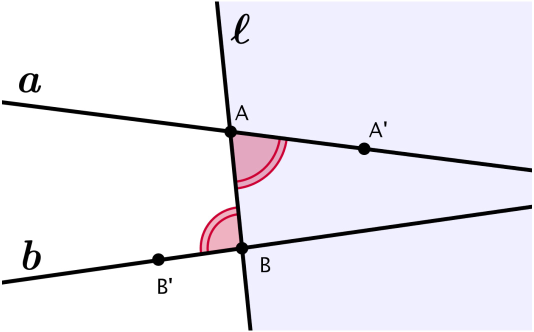
Teorema *A bissectriz do ângulo* $\angle BAC$ *é o lugar geométrico dos pontos em* $\mathrm{int}(\angle BAC)$ *equidistantes de* $\dot{A}B$ *e de* $\dot{A}C$.



Ângulos Alternos-Internos

Sejam $\ell, a, b \subset \mathcal{E}$ três rectas tais que $\ell \cap A = \{A\}$ e $\ell \cap b = \{B\}$.

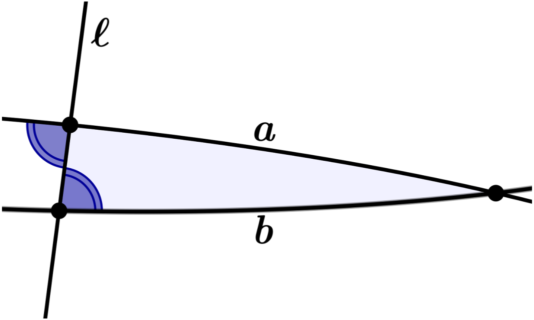
Se os pontos $A' \in a - \{A\}$ e $B' \in b - \{B\}$ são tais que $\dot{A}A'$ e $\dot{B}B'$ estão em semiplanos opostos limitados por ℓ, $\angle A'AB$ e $\angle B'BA$ dizem-se **ângulos alternos-internos** determinados pela transversal ℓ nas rectas a e b.



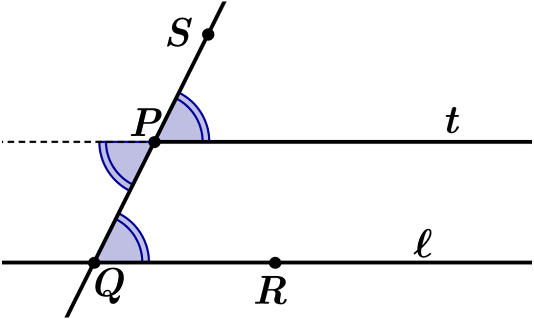
Condição Suficiente para Paralelismo

Duas rectas $r, \ell \subset \mathcal{E}$ dizem-se **paralelas** se e só se $r \cap \ell = \emptyset$.

Teorema *Se uma recta ℓ corta duas rectas a e b formando ângulos alternos internos iguais, então as rectas a e b são paralelas.*



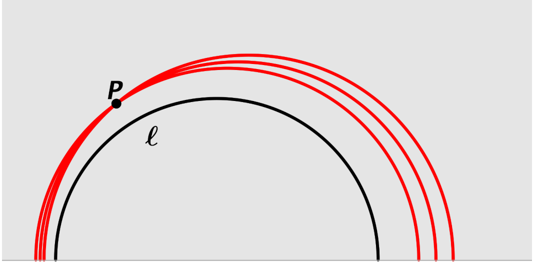
Proposição *Por qualquer ponto exterior a uma recta ℓ dada passa pelo menos uma recta paralela a ℓ.*



O Axioma das Paralelas

A12 *Por qualquer ponto exterior a uma recta ℓ dada passa no máximo uma recta paralela a ℓ.*

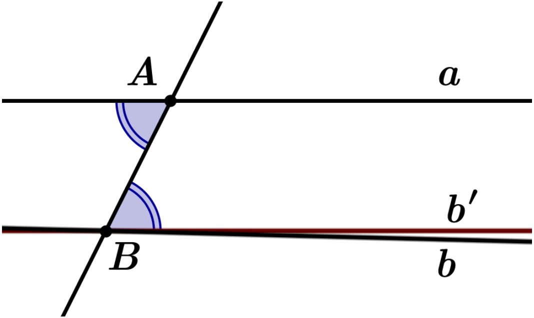
A Geometria Hiperbólica satisfaz todos os axiomas anteriores, mas não satisfaz menos este.



O Axioma das Paralelas é o único axioma específico da Geometria Euclideana.

Condição Necessária para Paralelismo

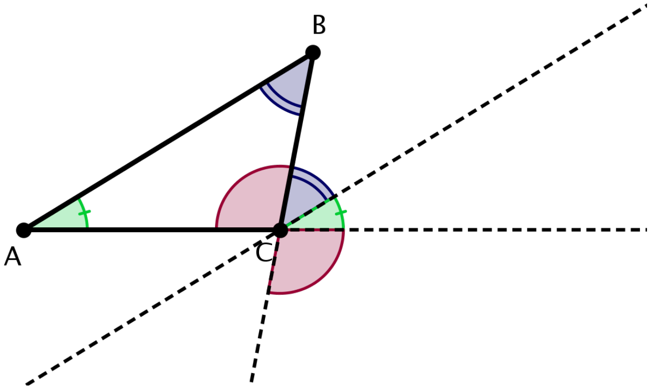
Teorema *Se as rectas a e b são paralelas então toda a recta ℓ que corte a e b forma com elas ângulos alternos internos iguais.*



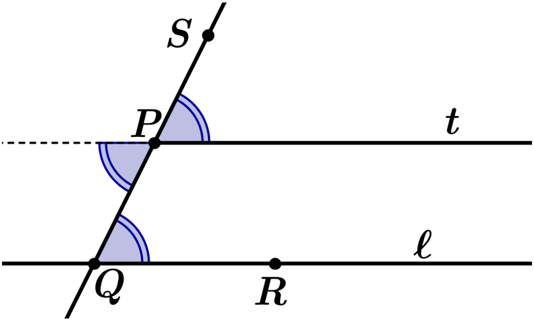
Corolário *A relação de paralelismo entre rectas é transitiva.*

Soma dos Ângulos Internos dum Triângulo

Teorema *A soma dos ângulos internos de qualquer triãngulo é igual a* 180.

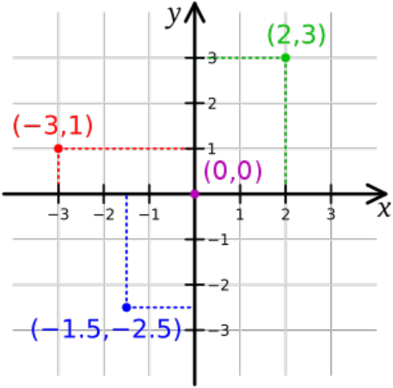


Proposição *Por qualquer ponto exterior a uma recta ℓ dada passa pelo menos uma recta paralela a ℓ.*



Modelo Cartesiano do Plano Euclideano

No século XVII René Descartes descobriu uma maneira de reduzir a Geometria à Álgebra através da representação em coordenadas cartesianas. Com ela nasce a *Geometria Analítica*.



Modelo Euclideano de dimensão n

O espaço $\mathbb{R}^n = \{\, \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \,:\, x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n \,\}$ munido do produto interno

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1\, y_1 + \cdots + x_n\, y_n$$

é um modelo de Geometria Euclideana n-dimensional.

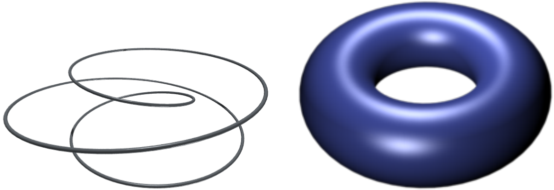
Alguns conceitos derivados do produto interno:

- **Norma** $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$,
- **Ângulo** $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|\, \|\vec{y}\|}\right)$,
- **Perpendicularidade** $\vec{x} \perp \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$

Variedades

Uma **variedade de dimensão** n é um conjunto de pontos que localmente se 'assemelha' ao espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$. Numa variedade existem **sistemas de coordenadas** que permitem localizar qualquer ponto através de n coordenadas reais.

As curvas são variedades de dimensão 1.
As superfícies são variedades de dimensão 2.

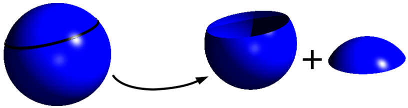


Uma curva e o 2-toro

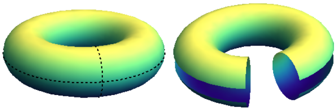
O Tipo Topológico duma Variedade

O **plano** e o **cilindro** são superfícies 'abertas'.
A **esfera** e o **toro** são superfícies 'fechadas'.

Qualquer corte ao longo duma curva aberta ou fechada mas sem 'extremidades' desconecta o **plano**, resp. a **esfera**.

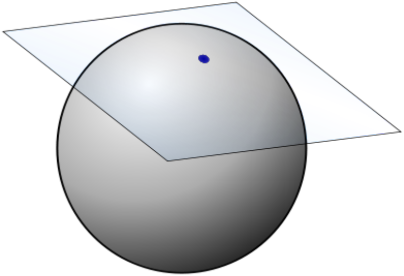


O mesmo não se passa com o **cilindro** ou o **toro**.



Variedades Riemannianas

Chama-se **variedade Riemanniana** a uma variedade onde cada plano tangente está munido duma estrutura de espaço Euclideano.



Distância entre pontos

Seja M uma variedade Riemanniana.

Uma aplicação $\gamma : [a, b] \to M$ de classe C^1 diz-se uma **curva que conecta os pontos** $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$. Define-se **comprimento** de γ por

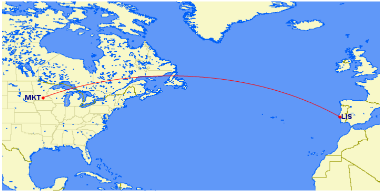
$$\mathrm{comp}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \,.$$

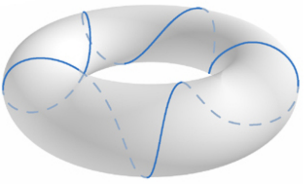
Chama-se **distância entre dois pontos** $p, q \in M$ ao ínfimo

$$d(p, q) = \inf\{\, \mathrm{comp}(\gamma) \ : \ \gamma \ \text{é uma curva que conecta} \ p \ \text{e} \ q \,\}$$

Geodésicas

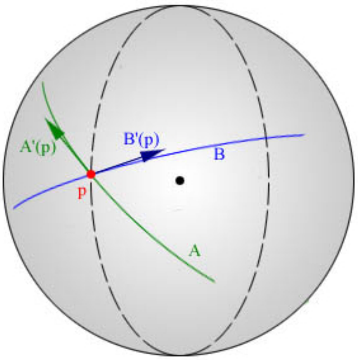
Numa variedade Riemanniana, chama-se **geodésica** a qualquer curva γ de velocidade constante tal que para cada par de pontos suficientemente próximos $p, q \in \gamma$, o comprimento do arco de γ que conecta p e q é igual a $d(p, q)$.





Medindo ângulos

O **ângulo** entre duas curvas é o ângulo entre os respectivos vectores velocidade no momento em que se cruzam, que é medido no espaço tangente à variedade, no ponto em que as curvas se cruzam.



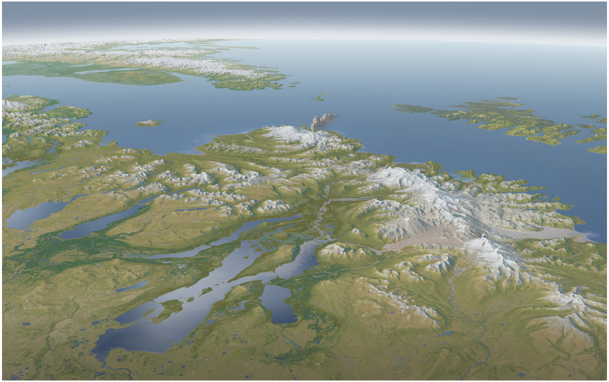
Perpendicularidade

Duas curvas que formem entre si um ângulo de 90 graus dizem-se **perpendiculares** ou **ortogonais**.

Por exemplo, os paralelos são ortogonais aos meridianos no globo terrestre.

Toda a variedade é localmente plana

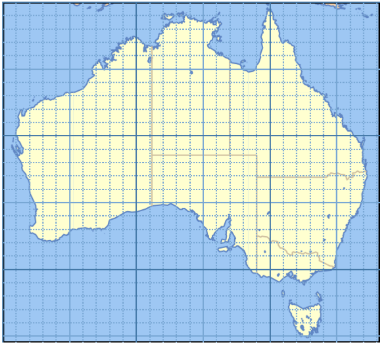
Só numa escala suficientemente grande é perceptível a não linearidade ou não planaridade duma variedade.



Volumes e Áreas

Seja M uma variedade Riemanniana.

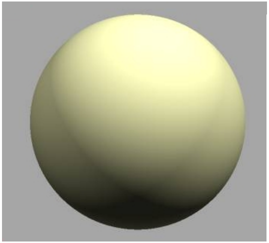
Aproxima-se a **área** duma região $A \subset M$ subdividindo-a em pequeníssimos rectângulos cujas áreas, medidas em termos Euclideanos, se adicionam. A **área** define-se como o limite destas aproximações quando o número de subdivisões tende a inifinito.



Curvatura Positiva

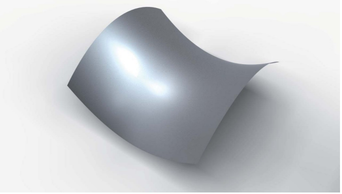
Vários conceitos de **curvatura** medem o quanto uma variedade se afasta de ser plana (Euclideana).

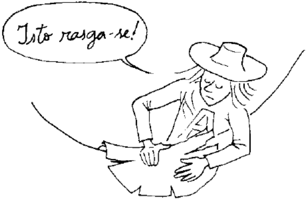
Se num ponto p uma superfície tem **curvatura positiva**, qualquer círculo centrado em p tem menor área, resp. perímetro menor, que um círculo Euclideano do mesmo raio.



Curvatura Negativa

Analogamente, se em p uma superfície tem **curvatura negativa**, qualquer círculo centrado em p tem maior área, resp. perímetro maior, que um círculo Euclideano do mesmo raio.

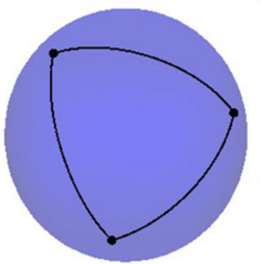


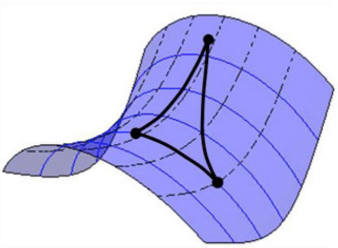


A Soma dos ângulos internos dum triângulo

Numa superfície com **curvatura positiva**, a soma dos ângulos internos dum triângulo é > 180.

Numa superfície com **curvatura negativa**, a soma dos ângulos internos dum triângulo é < 180.





Modelos de Curvatura Constante

O Axioma A11 implica que a curvatura seja constante.

Duas superfícies com o mesmo tipo topológico e a mesma curvatura constante são **isométricas**, i.e., são equivalentes por uma transformação que preserva ângulos e distâncias.

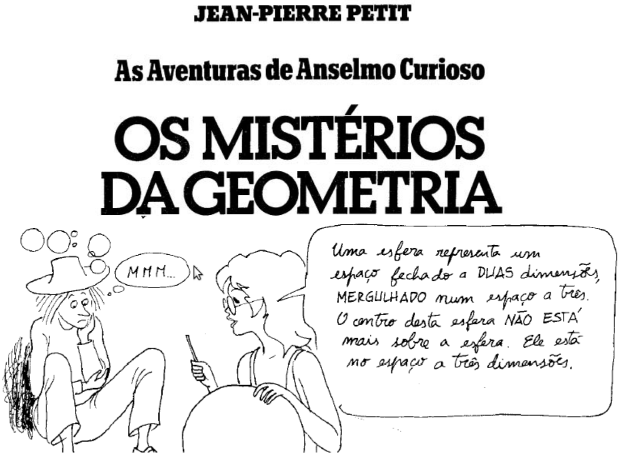
Duas superfícies com o mesmo tipo topológico e com curvatura constante do mesmo sinal são **conformes**, i.e., são equivalentes por uma transformação que preserva ângulos e multiplica distâncias por um factor constante.

A menos de equivalência conforme há apenas três modelos de superfícies de curvatura constante com os tipos topológicos da esfera ou do plano: O **Plano Euclideano**, o **Plano Hiperbólico** e a **Esfera**.

Modelos da Axiomática de Edwin Moise

- **A1-A3** Geometrias Finitas. Algumas Variedades Riemannianas.
- **A4-A5** Variedades Riemannianas sem geodésicas fechadas.
- **A6** Superfícies com o tipo topológico do plano ou da esfera.
- **A7-A10** Todas as Variedades Riemannianas.
- **A11** Geometrias de curvatura constante:
  a Euclideana, a Hiperbólica e a Esférica.
- **A12** Geometria Euclideana

Leitura Recomendada



http://www.savoir-sans-frontieres.com/.../free downloads.htm

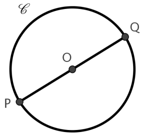
Circunferências

Sejam $O \in \mathcal{E}$ e $r > 0$.

Chama-se **circunferência** de centro O e raio r ao conjunto

$$\mathcal{C} = \{ P \in \mathcal{E} \ : \ |PO| = r \} .$$

Chama-se **diâmetro** de $\mathcal{C}$ a um segmento $\overline{PQ}$ tal que $P, Q \in \mathcal{C}$ e $P - O - Q$.



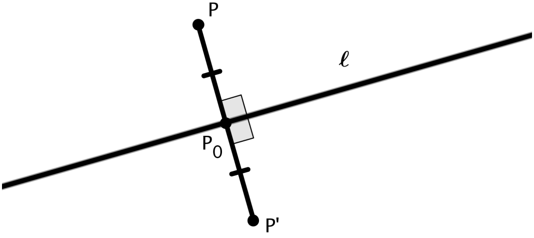
Define-se o **interior** e o **exterior** de $\mathcal{C}$ respectivamente por

$$\mathrm{int}(\mathcal{C}) = \{ P \in \mathcal{E} \ : \ |PO| < r \} \ \text{ e } \ \mathrm{ext}(\mathcal{C}) = \{ P \in \mathcal{E} \ : \ |PO| > r \} .$$

Simetria em relação a uma recta

Sejam ℓ uma recta e $P \in \mathcal{E} - \ell$,
P_0 o pé da perpendicular de P sobre ℓ.

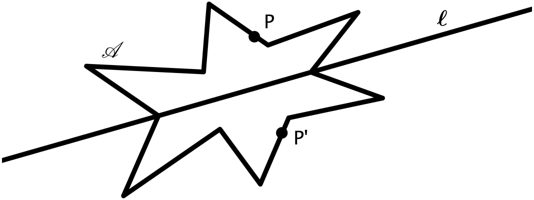
Chama-se **simétrico de P relativamente à recta ℓ** ao único ponto P' no semiplano limitado por ℓ, oposto ao que contém P, que fica na perpendicular a ℓ por P, à mesma distância de P_0 que P.



Conjuntos simétricos em relação a uma recta

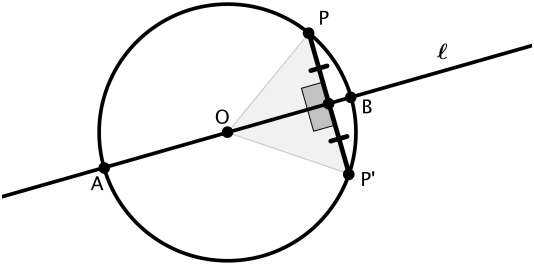
Sejam ℓ uma recta.

Um conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ diz-se **simétrico relativamente à recta** ℓ $\Leftrightarrow$ para cada ponto $P \in \mathcal{A}$, o seu simétrico P' relativamente à recta ℓ também pertencer a $\mathcal{A}$.



Seja $\mathcal{C}$ a circunferência de centro O e raio $r > 0$.

Proposição *A circunferência $\mathcal{C}$ é simétrica relativamente à recta suporte AB de qualquer diâmetro $\overline{AB}$ de $\mathcal{C}$.*



Prova: Exercício

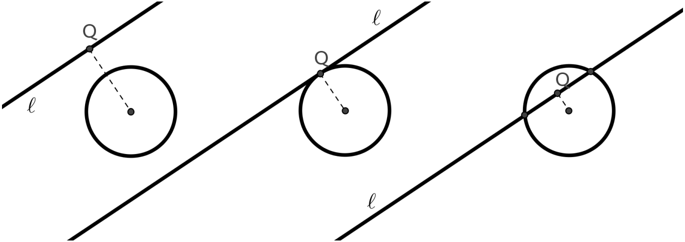
Intersecção duma Circunferência com uma Recta

Sejam $\mathcal{C}$ a circunferência de centro O e raio $r > 0$, e ℓ uma recta. Seja Q o pé da perpendicular de O sobre ℓ.

Proposição

se $|OQ| > r$ *então* $\mathcal{C} \cap \ell = \emptyset$ *e* $\mathrm{int}(\mathcal{C}) \cap \ell = \emptyset$,
se $|OQ| = r$ *então* $\mathcal{C} \cap \ell = \{Q\}$ *e* $\mathrm{int}(\mathcal{C}) \cap \ell = \emptyset$,
se $|OQ| < r$ *então* $\mathcal{C} \cap \ell = \{A, B\}$, *com* $A \neq B$,

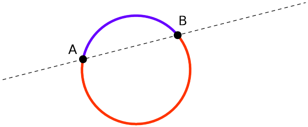
$$\mathrm{int}(\mathcal{C}) \cap \ell = \mathrm{int}(\overline{AB}) \quad e \quad \mathrm{ext}(\mathcal{C}) \cap \ell = \mathrm{ext}(\overline{AB}).$$



Prova: Exercício

Arcos de Circunferência

Chama-se **arco de circunferência** à intersecção duma circunferência com um semiplano limitado por uma recta que corte a circunferência em dois pontos. Os dois pontos dizem-se as **extremidades** do arco.



Dois pontos A, B numa circunferência $\mathcal{C}$ determinam dois arcos, que se dizem **complementares** um do outro.

Quando $\overline{AB}$ é um diâmetro de $\mathcal{C}$, os arcos determinados por A, B dizem-se **semi-circunferências**.

Dados três pontos $A, B, C \in \mathcal{C}$ usaremos a expressão

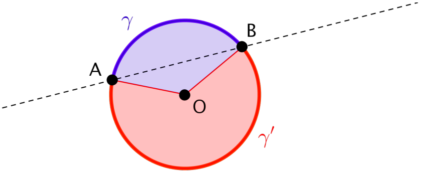
"*seja* $\overset{\frown}{AB}$ *o arco que não contém o ponto* C"

para referênciar um dos arcos definidos por A, B.

Note que, por si só, a notação $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ é ambígua.

Sejam A, B dois pontos numa circunferência $\mathcal{C}$ de centro O.

Proposição *Seja γ um dos arcos de $\mathcal{C}$ determinados por A e B. Vale uma e uma só das seguintes alternativas:*
(1) $A - O - B$ e γ é uma semi-circunferência;
(2) $\gamma = \mathcal{C} \cap \mathrm{int}(\angle AOB)$;
(3) $\gamma = \mathcal{C} \cap \mathrm{ext}(\angle AOB)$.



Define-se a **amplitude** do arco γ como sendo

$$m(\gamma) = \begin{cases} 180 & \text{se} \quad \text{A-O-B} \\ m(\angle AOB) & \text{se} \quad \gamma \subset \mathrm{int}(\angle AOB) \\ 360 - m(\angle AOB) & \text{se} \quad \gamma \subset \mathrm{ext}(\angle AOB) \end{cases}$$

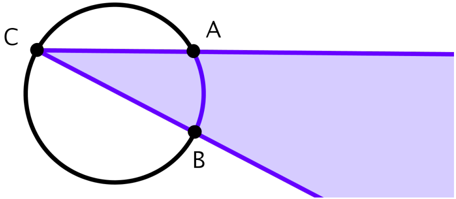
Ângulos Inscritos numa Circunferência

Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência.

Chama-se **ângulo inscrito** a $\mathcal{C}$ a um ângulo cuja origem esteja sobre $\mathcal{C}$ e cujos lados intersectem $\mathcal{C}$ num segundo ponto.

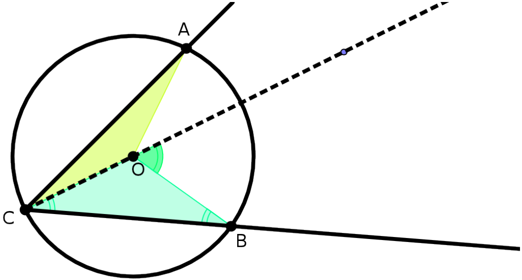
Três pontos $A, B, C \in \mathcal{C}$ determinam o ângulo inscrito $\angle ACB$.

O arco $\widehat{\mathrm{AB}}$ de $\mathcal{C}$ que não contém C diz-se **subentendido** pelo ângulo inscrito $\angle ACB$.

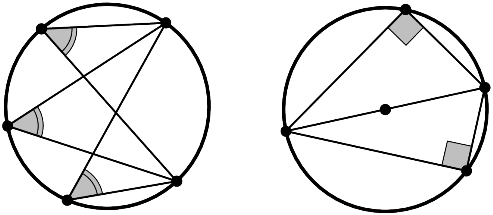


Teorema do Arco Capaz

Teorema *A amplitude dum ângulo inscrito numa circunferência é igual a metade da amplitude do arco por ele subentendido.*

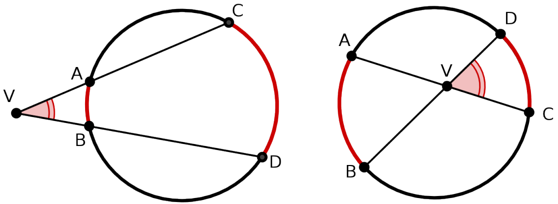


Corolário *Ângulos inscritos no mesmo arco duma circunferência são congruentes.*



Corolário *Todo o ângulo inscrito num semicircunferência é recto.*

Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência, e $A, B, C, D \in \mathcal{C}$ quatro pontos tais que $AC \cap BD = \{V\}$.
Sejam $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ o arco subentendido pelo ângulo $\angle CBD$, e $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ o arco subentendido pelo ângulo $\angle ACB$.

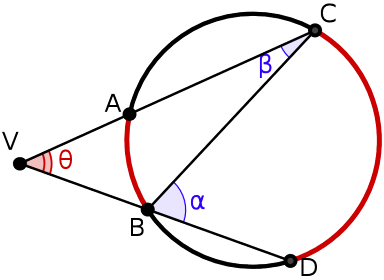


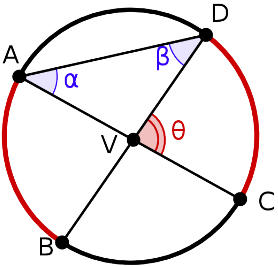
Corolário

$V - A - C$ e $V - B - D \Rightarrow\; m(\angle CVD) = \frac{1}{2}\left(m(\overset{\frown}{CD}) - m(\overset{\frown}{AB})\right).$

$A - V - C$ e $B - V - D \Rightarrow\; m(\angle CVD) = \frac{1}{2}\left(m(\overset{\frown}{CD}) + m(\overset{\frown}{AB})\right).$

Prova da Generalização do Teorema do Arco Capaz





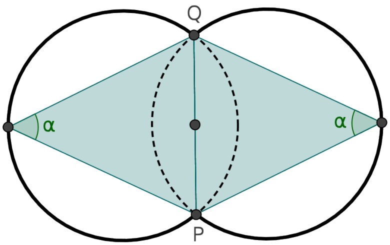
$$\theta+\beta+180-\alpha=180$$
$$\Updownarrow$$
$$\theta=\alpha-\beta$$

$$\alpha+\beta+180-\theta=180$$
$$\Updownarrow$$
$$\theta=\alpha+\beta$$

Lugares geométricos de ângulos constantes

Sejam $P, Q \in \mathcal{E}$ dois pontos.

Corolário *Dado $\alpha \in]0, 180[$, o lugar geométrico dos pontos $R \in \mathcal{E}$ tais que $m(\angle PRQ) = \alpha$ é a união de dois arcos de circunferência de extremidades P, Q, simétricos relativamente à recta PQ. Se $\alpha \neq 90$, os dois arcos pertencem a circunferências distintas; e se $\alpha = 90$ esse lugar geométrico é a circunferência de diâmetro $\overline{PQ}$, com excepção dos pontos P e Q.*



Intersecção de Duas Circunferências

Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ circunferências de centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2.

Proposição *Se* $\mathcal{C}_1 \cap \mathrm{int}(\mathcal{C}_2) \neq \emptyset$ *e* $\mathcal{C}_1 \cap \mathrm{ext}(\mathcal{C}_2) \neq \emptyset$ *então* $\mathcal{C}_1$ *e* $\mathcal{C}_2$ *intersectam-se em dois pontos.*
Se $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$, *mas* $\mathcal{C}_1 \cap \mathrm{int}(\mathcal{C}_2) = \emptyset$ *ou* $\mathcal{C}_1 \cap \mathrm{ext}(\mathcal{C}_2) = \emptyset$, *então* $\mathcal{C}_1$ *e* $\mathcal{C}_2$ *intersectam-se num único ponto.*

Prova: Exercício

Construções de Régua e Compasso

Chama-se **construção de régua e compasso** ao procedimento para desenhar uma configuração geométrica consistindo de um número finito de elementos, pontos, rectas e circunferências, seguindo uma sequência precisa de instruções.

As **instruções** admitidas são de três tipos:

(a) traçar a recta que une dois pontos;

(b) traçar a circunferência de centro num ponto, com raio igual à distância entre outro par de pontos;

(c) marcar os pontos de intersecção entre duas curvas, rectas ou circunferências.

Parte-se duma configuração inicial. A cada passo da construção, a configuração geométrica é ampliada pela introdução de novos elementos, aplicando uma instrução precisa.

Construção da Mediatriz

Input: Segmento $\overline{AB}$

Procedimento:

Passo 1 Desenhe a circunferência $\mathcal{C}_1$ de centro A que passa por B;

Passo 2 Desenhe a circunferência $\mathcal{C}_2$ de centro B que passa por A;

Passo 3 Marque os pontos de intersecção P e P' de $\mathcal{C}_1$ com $\mathcal{C}_2$;

Passo 4 Trace a recta ℓ que une P a P';

Output: A recta ℓ.

Construção da Circunferência Circunscrita a um Triângulo

Input: Triângulo ΔABC

Procedimento:
Passo 1 Trace a mediatriz m de $\overline{AB}$;
Passo 2 Trace a mediatriz m' de $\overline{BC}$;
Passo 3 Marque o ponto O de intersecção m e m';
Passo 4 Trace a circunferência $\mathcal{C}$ de centro O que passa por A;

Output: A circunferência $\mathcal{C}$.

Exemplos de Construções Geométricas

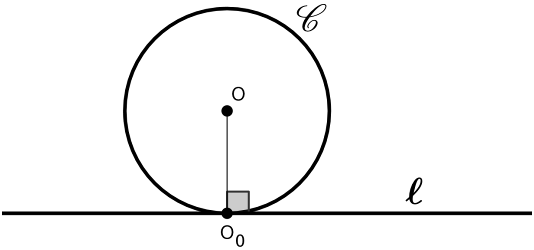
(1) Encontrar o ponto médio de um segmento dado;
(2) Construir um ângulo de 60 graus;
(3) Traçar a perpendicular a uma recta por um ponto dado;
(4) Transportar um ângulo;
(5) Traçar a paralela a uma recta por um ponto exterior dado;
(6) Construir a bissectriz de um ângulo.

Definição de Tangente a uma Circunferência

Uma recta ℓ diz-se tangente a uma circunferência $\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$ ℓ e $\mathcal{C}$ se intersectam num único ponto.

Proposição *Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O e raio r, ℓ uma recta e O_0 o pé da perpendicular de O sobre ℓ. Então*

$$\ell \text{ é tangente a } \mathcal{C} \Leftrightarrow |OO_0| = r.$$



Input: Uma circunferência $\mathcal{C}$, o seu centro O, e um ponto $P \notin \mathcal{C} \cup \mathrm{int}(\mathcal{C})$.

Procedimento:

Passo 1 Marque o bissector M do segmento $\overline{OP}$;

Passo 2 Trace a circunferência $\mathcal{C}'$ de centro M que passa por O;

Passo 3 Marque os pontos de intersecção Q_1 e Q_2 de $\mathcal{C}$ com $\mathcal{C}'$;

Passo 4 Trace as rectas $\ell_1 = PQ_1$ e $\ell_2 = PQ_2$;

Output: As rectas ℓ_1 e ℓ_2.

Paralelogramos

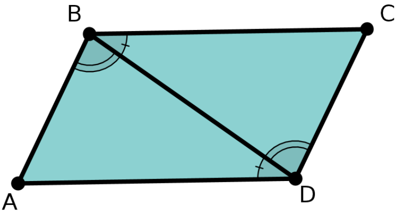
Seja $\mathcal{Q} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ um quadrilátero de forma convexa.

Proposição *São equivalentes:*

(a) $AB \parallel CD \quad e \quad BC \parallel AD,$

(b) $\angle A \simeq \angle C \quad e \quad \angle B \simeq \angle D,$

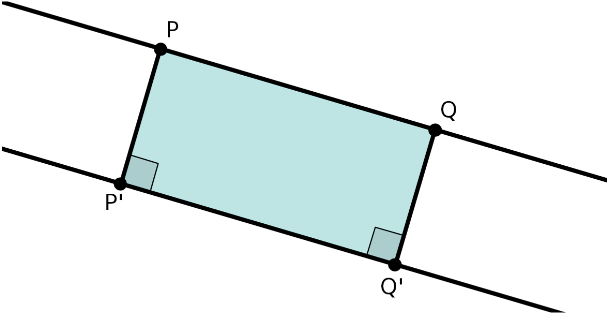
(c) $\overline{AB} \simeq \overline{CD} \quad e \quad \overline{BC} \simeq \overline{AD}.$



Um quadrilátero convexo que satisfaça alguma destas condições diz-se um **paralelogramo**.

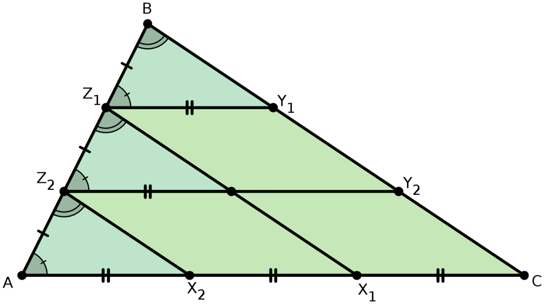
Distância entre Rectas Paralelas

Proposição *A distância entre duas rectas paralelas é constante. Dadas duas rectas paralelas* r *e* r' *existe uma constante* $c > 0$ *tal que para todo* $P \in r$, *designando por* P' *o pé da perpendicular de* P *sobre* r', *tem-se* $|PP'| = c$.



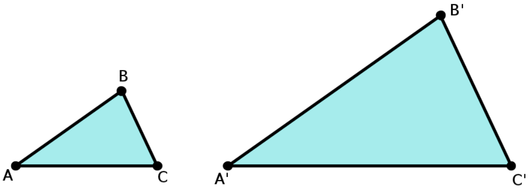
Sudivisões dum Triângulo

Proposição *Se num triângulo ΔABC considerarmos $n-1$ pontos $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ dividindo o segmento $\overline{AB}$ em n segmentos iguais, e traçarmos paralelas a AC que cortam $\overline{BC}$ em pontos $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$, e paralelas a BC que cortam $\overline{AC}$ em pontos $X_1, \ldots, X_{n-1}$, então estes pontos dividem os respectivos lados em n segmentos iguais.*



Semelhança de Triângulos

Dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ dizem-se **semelhantes**, e escrevemos $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, se e só se $\angle A \simeq \angle A'$, $\angle B \simeq \angle B'$, $\angle C \simeq \angle C'$, e existir um número $r > 0$, dito a **razão de semelhança**, tal que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|} = r$.



A correspondência $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, diz-se uma **semelhança**.

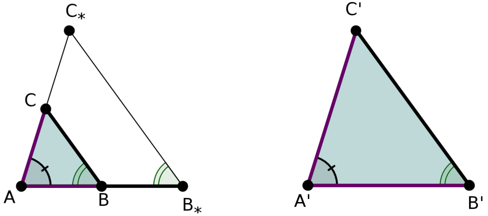
Critério de Semelhança AAA

Teorema *São semelhantes dois triângulos que tenham ângulos internos iguais.*
Se $\angle A \simeq \angle A', \quad \angle B \simeq \angle B' \quad e \quad \angle C \simeq \angle C' \quad$ *então*

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

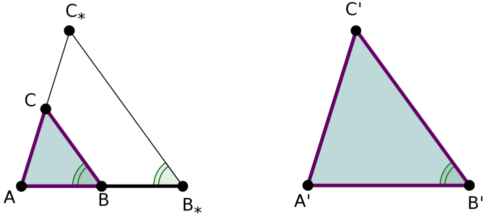
Critério de Semelhança LAL

Teorema *São semelhantes dois triângulos que tenham um ângulo interno igual e os lados correspondentes proporcionais.*
Se $\angle A \simeq \angle A'$ *e* $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$ *então* $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.



Critério de Semelhança LLL

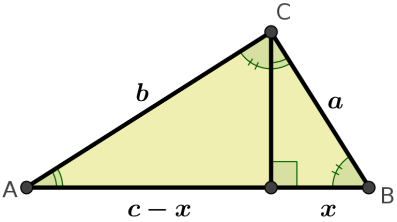
Teorema *Dois triângulos com lados proporcionais são semelhantes.*
Se $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$ *então* $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.



Teorema de Pitágoras

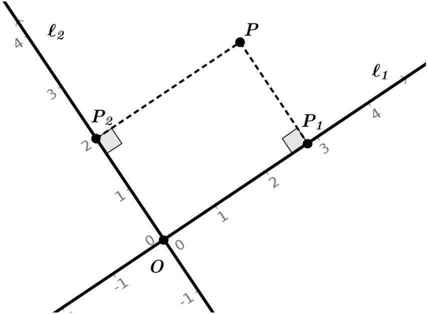
Um triângulo diz-se **rectângulo** sse um dos seus ângulos internos for recto. O lado oposto ao ângulo recto diz-se a **hipotenusa**, e os outros dois lados os **catetos** do triângulo rectângulo.

Dado um triângulo ΔABC, sejam $|AB| = c$, $|BC| = a$ e $|AC| = b$.



Teorema *Se ΔABC for um triângulo rectângulo com hipotenusa $\overline{AB}$ então* $c^2 = a^2 + b^2$.

Chama-se **sistema de eixos cartesianos** a um par de rectas (ℓ_1, ℓ_2) que se intersectem perpendicularmente num ponto O, munidas de sistemas de coordenadas $f_1 : \ell_1 \to \mathbb{R}$ e $f_2 : \ell_2 \to \mathbb{R}$ tendo o ponto O como origem, i.e., $f_1(O) = f_2(O) = 0$.

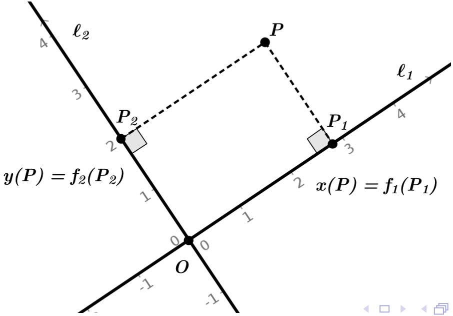


(ℓ_1, f_1) diz-se o **eixo horizontal** e (ℓ_2, f_2) o **eixo vertical**.

Coordenadas Cartesianas

Suponhamos fixado um sistema de eixos cartesianos $(\ell_1, f_1), (\ell_2, f_2)$.

Seja $P \in \mathcal{E}$ um ponto. Chama-se **abcissa** de P à coordenada $x(P) = f_1(P_1)$ do pé da perpendicular P_1 de P sobre o eixo horizontal ℓ_1, e chama-se **ordenada** de P à coordenada $y(P) = f_2(P_2)$ do pé da perpendicular P_2 de P sobre o eixo vertical ℓ_2.



Coordenadas Cartesianas

Suponhamos fixado um sistema de eixos cartesianos $(\ell_1, f_1), (\ell_2, f_2)$.

Uma recta $\ell \subset \mathcal{E}$ diz-se **horizontal** , resp. **vertical** , sse for paralela ao eixo ℓ_1, resp. ℓ_2.

Proposição *Rectas horizontais têm ordenada constante. Rectas verticais têm abcissa constante. A aplicação $\Phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\Phi(P) = (x(P), y(P))$ é bijectiva.*

Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, o único ponto $P \in \mathcal{E}$ tal que $\Phi(P) = (x, y)$ está na intersecção da recta vertical com abcissa x com a recta horizontal com ordenada y.

Equações da Recta

Suponhamos fixado um sistema de eixos cartesianos $(\ell_1, f_1), (\ell_2, f_2)$.

Diz-se que uma recta $\ell \subset \mathcal{E}$ **tem equação cartesiana** $a\,x + b\,y = c$ para significar que

$$\ell = \{\, P \in \mathcal{E} \;:\; a\,x(P) + b\,y(P) = c \,\}\,.$$

Proposição *Toda a recta horizontal têm uma equação cartesiana da forma $y = c$. Toda a recta vertical têm uma equação cartesiana da forma $x = c$. Uma recta $\ell \subset \mathcal{E}$ que não seja vertical admite uma equação cartesiana da forma $y = m\,x + b$, onde $m = \dfrac{y(P_1) - y(P_2)}{x(P_1) - x(P_2)}$, P_1, P_2 são dois pontos de ℓ, e onde b é a ordenada do ponto de intersecção do eixo vertical com ℓ.*

Equação Geral da Recta

Suponhamos fixado um sistema de eixos cartesianos $(\ell_1, f_1), (\ell_2, f_2)$.

Proposição *Dada uma recta* $\ell \subset \mathcal{E}$*, existem constantes* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tais que* $(a, b) \neq (0, 0)$ *e a recta* ℓ *admite a equação* $a\,x + b\,y = c$*. Reciprocamente, dadas constantes* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tais que* $(a, b) \neq (0, 0)$ *existe uma única recta* $\ell \subset \mathcal{E}$ *com essa equação.*

Proposição *Duas equações* $a\,x + b\,y = c$ *e* $a'\,x + b'\,y = c'$*, com* $(a, b) \neq (0, 0)$ *e* $(a', b') \neq (0, 0)$*, definem a mesma recta sse existe* $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ *tal que* $a' = \lambda\,a$, $b' = \lambda\,b$ *e* $c' = \lambda\,c$*.*

Distância entre Pontos

Suponhamos fixado um sistema de eixos cartesianos $(\ell_1, f_1), (\ell_2, f_2)$.

Proposição *Dados pontos* $P, Q \in \mathcal{E}$,

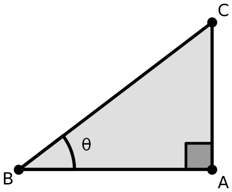
$$|PQ| = \sqrt{(x(P) - x(Q))^2 + (y(P) - y(Q))^2}\ .$$

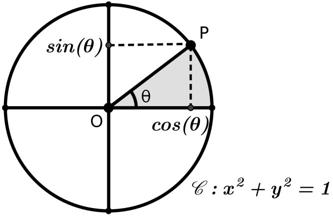
Seno e Cosseno de Ângulos Agudos

Dado $\theta \in]0, 90[$, seja ΔABC um triângulo rectângulo em A tal que $m(\angle B) = \theta$. A classe de semelhança ΔABC só depende de θ, pelo que as razões seguintes estão bem definidas:

$$\cos\theta = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

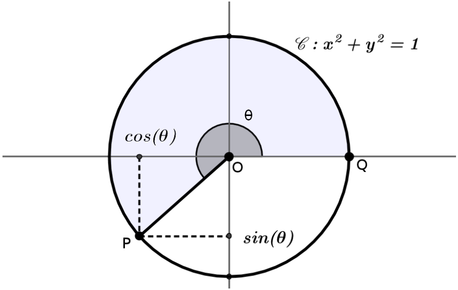
$$\sin\theta = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$





Seno e Cosseno de Ângulos no intervalo $]0, 360[$

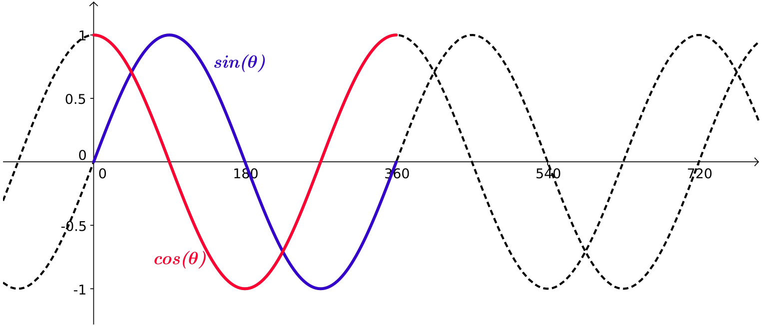
Sejam $\mathcal{C}$ a circunferência de centro na origem e raio 1, descrita pela equação $x^2 + y^2 = 1$, a que se chama o **círculo trignométrico**, e $Q \in \mathcal{C}$ o ponto de coordenadas $(1, 0)$. Dado $\theta \in]0, 360[$ existe um arco γ em $\mathcal{C}$ com extremidades P, Q e amplitude $m(\gamma) = \theta$.



Definem-se o **seno** e o **cosseno** do ângulo θ respectivamente como a ordenada e a abcissa de P: $\sin\theta = y(P)$ e $\cos\theta = x(P)$.

Extensões Periódicas das Funções Seno e Cosseno

As funções seno e cosseno estendem-se como funções periódicas



$\sin(\theta + 360\,k) = \sin(\theta)$ e $\cos(\theta + 360\,k) = \cos(\theta)$,
quaisquer que sejam $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Algumas Relações Trignométricas

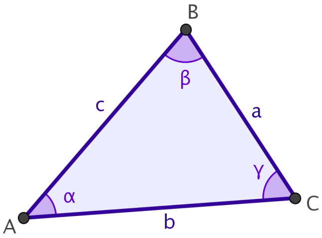
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\begin{cases} \cos(180-\theta) & = & -\cos\theta \\ \sin(180-\theta) & = & \sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(90-\theta) & = & \sin\theta \\ \sin(90-\theta) & = & \cos\theta \end{cases}$$

Lei dos Cossenos

Num triângulo ΔABC designamos respectivamente por α, β, γ as amplitudes dos ângulos adjacentes aos vértices A, B, C, e por a, b, c os comprimentos dos lados opostos aos vértices A, B, C.



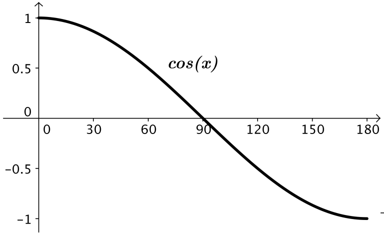
Teorema *Em qualquer triângulo são válidas as fórmulas:*

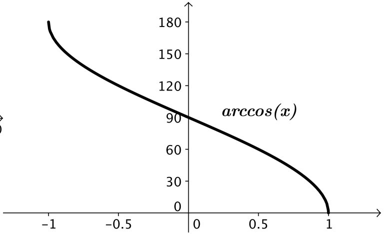
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma$$

A Função Arco-Cosseno

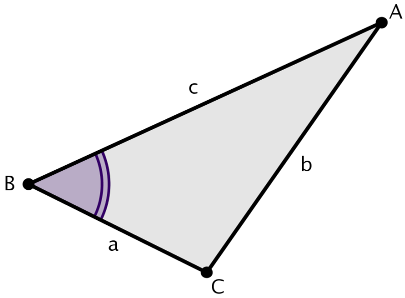
A restrição da função coseno ao intervalo $[0, 180]$,
$\cos : [0, 180] \to [-1, 1]$ é bijectiva.

A sua inversa é a função $\arccos : [-1, 1] \to [0, 180]$.





Medida dum Ângulo



Se $a = |BC|$, $b = |AC|$ e $c = |AB|$,

$$m(\angle ABC) = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}\right) .$$

Chamemos "**ponto**" a um elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e "**recta**" a um subconjunto $r \subset \mathbb{R}^2$ tal que $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, a\,x + b\,y = c \}$ para certas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $(a, b) \neq (0, 0)$.
Interpretemos "**incidência**" como a relação de pertença, a "**distância**" $|AB|$ entre dois pontos e a "**medida dum ângulo**" $m(\angle BAC)$ através das fórmulas introduzidas acima.

A $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ com as interpretações acima de ponto, recta, incidência, distância, e medida do ângulo, chamaremos o **Modelo da Geometria Analítica**.

Teorema *Fixado um sistema de eixos cartesianos, a bijecção* $\Phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(P) = (x(P), y(P))$, *transforma rectas em "rectas", preserva distâncias, ângulos e a relação de incidência.*

Teorema *O Modelo da Geometria Analítica satisfaz a Axiomática de Edwin Moise.*

Propriedades da Axiomática de Edwin Moise

A Axiomática de Edwin Moise pressupõem os números reais bem como algum tipo de Teoria de Conjuntos, e como tal não é uma teoria autónoma.

Suponhamos *consistente* essa Teoria de Conjuntos, contendo os reais, onde temos estado a desenvolver a Geometria Euclideana via Axiomática de Edwin Moise.

Corolário *A axiomática de Edwin Moise é consistente.*

Corolário *A axiomática de Edwin Moise é categórica, i.e., admite um único modelo a menos dum isomorfismo. Mais precisamente, todo o modelo da axiomática de Edwin Moise é isomorfo ao Modelo da Geometria Analítica.*

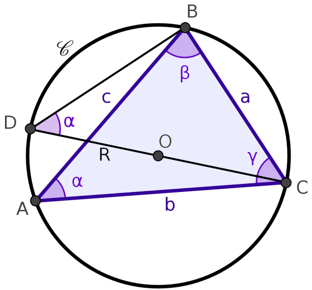
Lei dos Senos

Teorema *Em qualquer triângulo cada lado é o produto do diâmetro da circunferência circunscrita pelo seno do ângulo oposto. Chamando R ao* **circunraio** *de ΔABC, tem-se*

$$a = 2R \sin\alpha,\ \ b = 2R \sin\beta,\ \ \ e\ \ c = 2R \sin\gamma\ ,$$

ou ainda

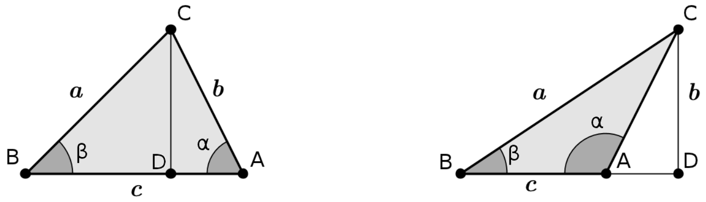
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\,R\ .$$



Corolário *Dados* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\alpha\ .$$

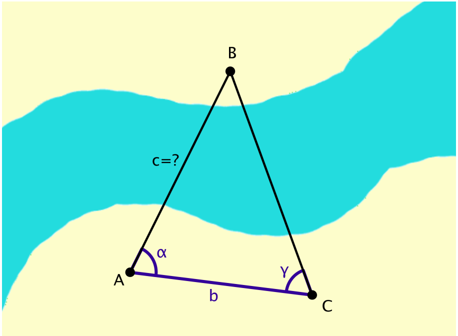
Caso $\alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta < 180.$



$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

Aplicação Topográfica 1

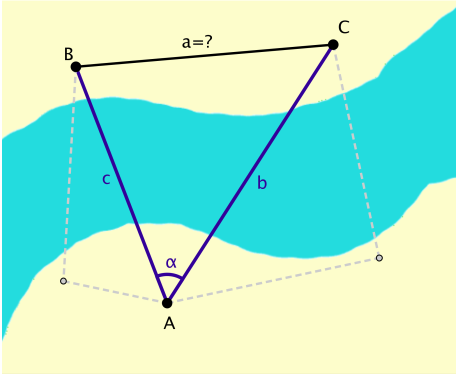
Problema *Medir a distância entre um ponto acessível A e um ponto inacessível B.*



$$c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{b \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

Aplicação Topográfica 2

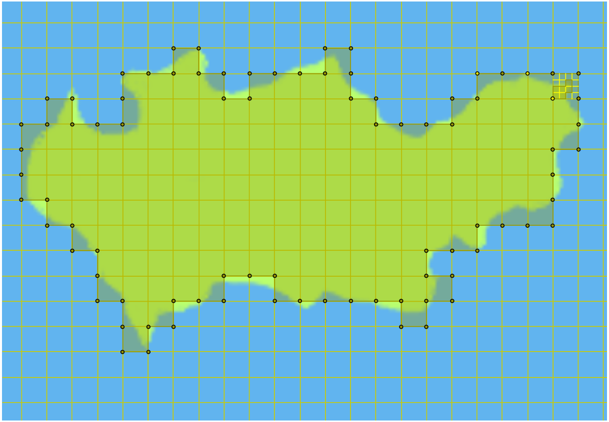
Problema *Medir a distância entre dois pontos inacessíveis A e B.*



$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha}$$

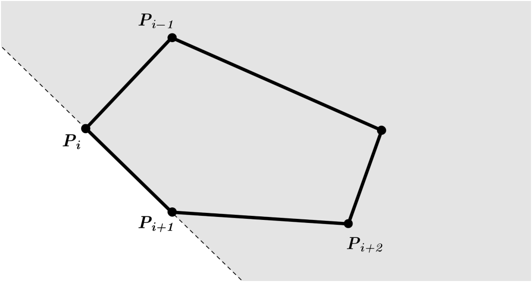
Área: Definição Informal

A **área** duma região mede o número de quadrados com uma unidade de lado necessários para cobrir essa região.



Polígonos de Forma Convexa

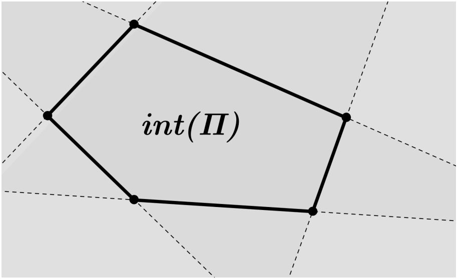
Chama-se **polígono** a uma união finita de segmentos de recta $\Pi = \overline{P_1P_2} \cup \ldots \cup \overline{P_{n-1}P_n} \cup \overline{P_nP_1}$ correspondente a uma sequência circular de vértices $P_1, P_2 \ldots, P_n, P_1, P_2 \ldots$ em $\mathcal{E}$. Os segmentos $\overline{P_1P_2}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$ e $\overline{P_nP_1}$ dizem-se as **arestas** do polígono.



Dizemos que um polígono **tem forma convexa** se para cada sua aresta os restantes vértices estiverem contidos no mesmo semiplano limitado pela recta suporte dessa aresta.

Interior dum Polígono

Seja Π um polígono de forma convexa.



Chama-se **interior** de Π à intersecção dos semiplanos

$$\mathrm{int}(\Pi) = \bigcap_{a \text{ aresta de } \Pi} S_a \ ,$$

onde S_a designa o semiplano limitado pela recta suporte de a que contêm os vértices de Π fora da a.

Triangulações de Polígonos

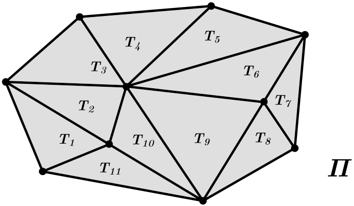
Seja Π um polígono de forma convexa.

Chama-se **triangulação** de Π a uma família finita de triângulos $\{T_1, \ldots, T_n\}$ tal que

(1) $\Pi \cup \mathrm{int}(\Pi) = \bigcup_{i=1}^{n} T_i \cup \mathrm{int}(T_i)$;

(2) $\mathrm{int}(T_i) \cap \mathrm{int}(T_j) = \emptyset$, se $i \neq j$;

(2) $T_i \cap T_j = \emptyset$, um vértice, ou uma aresta, se $i \neq j$.



A função Área

Seja $\mathcal{P}$ a classe de todos os polígonos de forma convexa.

Teorema *Existe uma única função* $A : \mathcal{P} \to]0, +\infty[$ *tal que*

(1) $A(T) = A(T')$, *se* $T, T' \in \mathcal{P}$ *forem triângulos congruentes;*

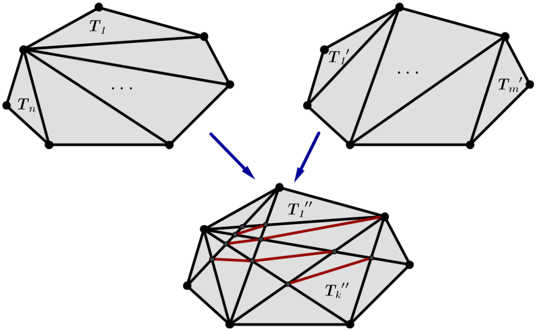
(2) $A(\Pi) = A(T_1) + \ldots + A(T_n)$, *se* $\Pi \in \mathcal{P}$ *admitir a triangulação* $\{T_1, \ldots, T_n\}$*;*

(3) $A(R) = a\,b$ *sempre que* R *seja um rectângulo com lados perpendiculares de comprimentos* a *e* b*.*

Existência da função Área

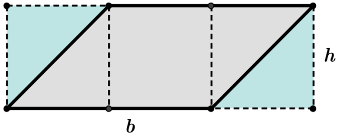
Lema *Dadas duas triangulações* $\{T_1, \ldots, T_n\}$ *e* $\{T'_1, \ldots, T'_m\}$ *do mesmo polígono* Π *de forma convexa,*

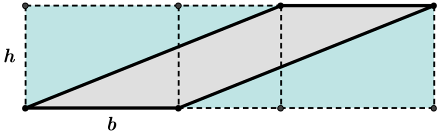
$$\acute{A}rea(T_1) + \ldots + \acute{A}rea(T_n) = \acute{A}rea(T'_1) + \ldots + \acute{A}rea(T'_m) \ .$$



Área dum Paralelogramo

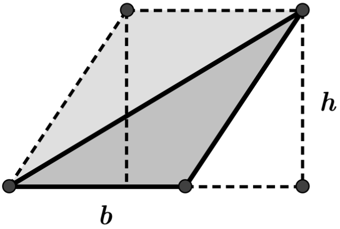
Proposição *A área dum paralelogramo de base b e altura h é igual a $b\,h$.*



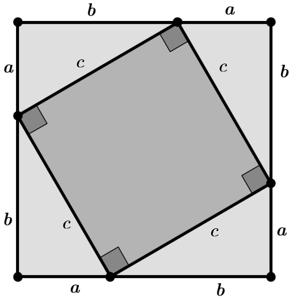


Área dum Triângulo

Proposição *A área dum triângulo de base b e altura h é igual a* $\frac{1}{2}\, b\, h$.



Outra Demonstração do Teorema de Pitágoras

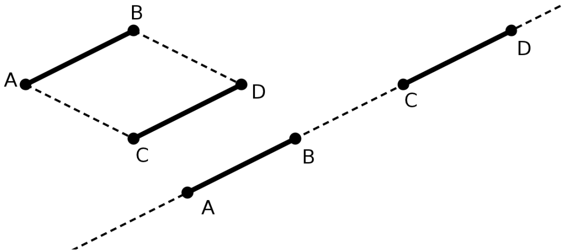


$$(a+b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\,a\,b\right) + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Equipolência de Segmentos Orientados

Chama-se **segmento orientado** a um par ordenado (A, B) de pontos $A, B \in \mathcal{E}$.

Dois segmentos orientados (A, B) e (C, D) dizem-se **equipolentes**, e escreve-se $(A, B) \sim (C, D)$, sse as rectas AB e CD são paralelas e $ABDC$ é um paralelogramo, ou então se as rectas coincidem, $|AB| = |CD|$, e a orientação de A para B é a mesma que de C para D.

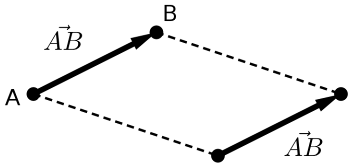


Vectores Livres

A relação de equipolência é de equivalência.

Chama-se **vector livre** à classe de equipolência dum segmento orientado.

$$\vec{AB} = \{ (C, D) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \, : \, (C, D) \sim (A, B) \} \, .$$



Dois vectores livres coincidem *sse* os correspondentes segmentos orientados são equipolentes

$$\vec{AB} = \vec{CD} \; \Leftrightarrow \; (C, D) \sim (A, B)$$

O Vector Nulo

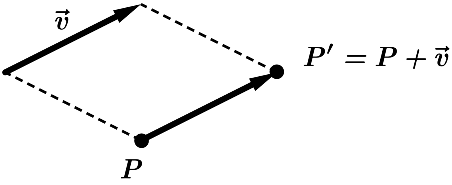
Vamos designar por $\mathcal{V}$ o conjunto de todos os vectores livres no plano Euclideano.

Chama-se **vector nulo** ao vector $\vec{0} \in \mathcal{V}$ determinado pelos segmentos orientados degenerados (A, A).

Soma dum Ponto com um Vector Livre

Sejam $P \in \mathcal{E}$ e $\vec{v} \in \mathcal{V}$ um vector livre.

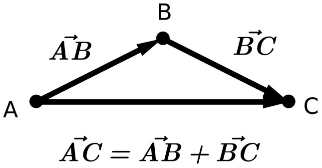
Chama-se soma de P com $\vec{v}$ ao único ponto $P' = P + \vec{v}$ tal que o vector $\vec{v}$ coincide com a classe de equipolência do segmento orientado (P, P').



Soma de Vectores Livres

Existe uma única operação $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ sobre vectores livres tal que

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \quad \forall\, A, B, C \in \mathcal{E}\ .$$



Chama-se **simétrico** dum vector $\vec{v} = \vec{AB} \in \mathcal{V}$ ao vector $-\vec{v} = \vec{BA}$.

Propriedades da Soma de Vectores

Proposição *Dados vectores* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$,

(a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

(b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;

(c) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$;

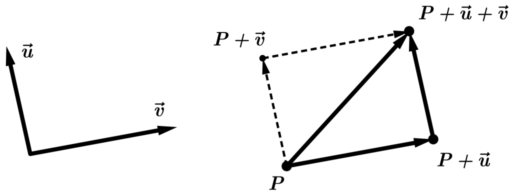
(d) $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.

Proposição *Dados pontos* $P, Q \in \mathcal{E}$, *e vectores* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$,

(a) $P + \vec{0} = P$;

(b) $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v})$;

(c) $Q = P + \vec{v} \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \vec{PQ}$.



Isometrias

Chama-se **isometria** a uma transformação $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que

(a) T é bijectiva, i.e., $\forall\, P' \in \mathcal{E} \quad \exists^1\, P \in \mathcal{E}$ tal que $P' = T(P)$;

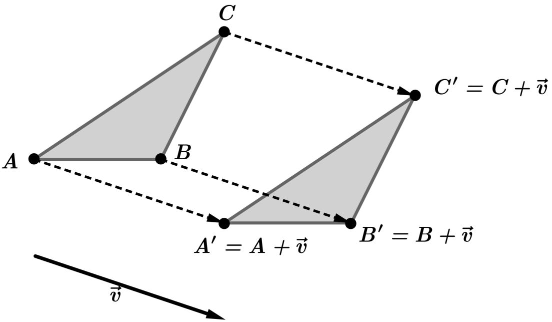
(b) T preserva distâncias, i.e., $|T(A)T(B)| = |AB|,\ \forall\, A, B \in \mathcal{E}$.

Proposição *Toda a isometria $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ transforma rectas em rectas preservando a relação de ordem, i.e.,*

$$A - B - C \;\Leftrightarrow\; T(A) - T(B) - T(C),\ \forall\, A, B, C \in \mathcal{E}$$

Uma isometria $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ diz-se **involutiva** $\Leftrightarrow\; T^2 = T \circ T = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

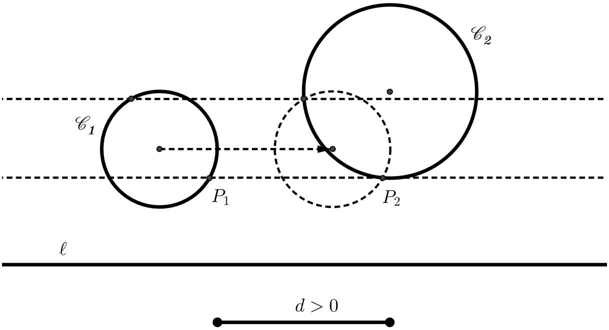
Fixado um vector livre $\vec{v}$, chama-se **translação** segundo $\vec{v}$, à aplicação $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ definida por $T(P) = P + \vec{v}$.



Proposição *Toda a translação é uma isometria.*

Problema

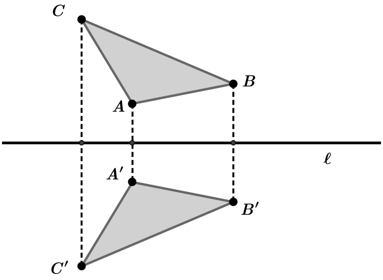
Problema 1 *Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas circunferências, ℓ uma recta e d um número positivo. Encontre uma recta paralela a ℓ que intersecte $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ em pontos $P_1 \in \mathcal{C}_1$ e $P_2 \in \mathcal{C}_2$ tais que $|P_1P_2| = d$.*



Reflexão em torno duma Recta

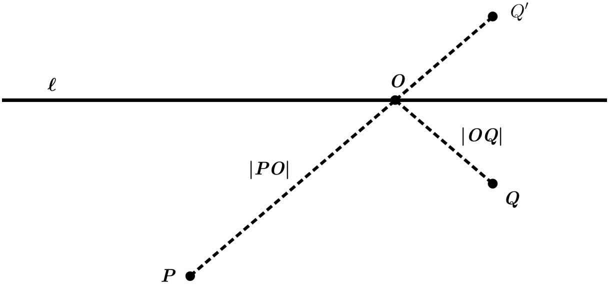
Seja ℓ uma recta.

Chama-se **reflexão em torno de** ℓ à transformação $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ definida por $T(P) = P$, se $P \in \ell$, e por $T(P) = P'$, onde P' é o único ponto tal que ℓ é a mediatriz de $\overline{PP'}$, se $P \notin \ell$.



Proposição *Seja $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ a reflexão em torno de ℓ. Então T é uma isometria involutiva.*

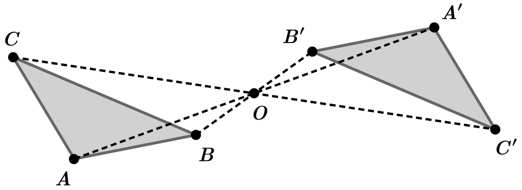
Problema 2 *Sejam $P, Q \in \mathcal{E}$ dois pontos do mesmo lado duma recta ℓ. Encontre $O \in \ell$ tal que a soma das distâncias $|PO| + |OQ|$ seja mínima.*



Simetria Central

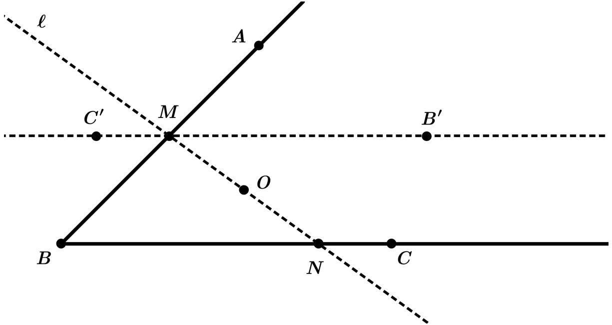
Seja $O \in \mathcal{E}$ um ponto.

Chama-se **simetria em torno de** O à transformação $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ definida por $T(O) = O$, e por $T(P) = P'$, onde P' é o único ponto tal que O é o bissector de $\overline{PP'}$, se $P \neq O$.



Proposição *Seja $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ a reflexão em torno de ℓ. Então T é uma isometria involutiva.*

Problema 3 *Seja $O \in \mathrm{Int}(\angle ABC)$. Encontre uma recta ℓ que intersecte os lados do ângulo em pontos $M \in \dot{B}A$ e $N \in \dot{B}C$ tais que O seja o bissector de $\overline{MN}$.*



Sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ dois triângulos.

Proposição *Supondo que* $\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$,

$AB \parallel A'B'$ *ou* $AB = A'B'$,

$BC \parallel B'C'$ *ou* $BC = B'C'$, *e*

$AC \parallel A'C'$ *ou* $AC = A'C'$,

existe $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *translação ou simetria central tal que*

$$T(A) = A',\ T(B) = B' \text{ e } T(C) = C'.$$

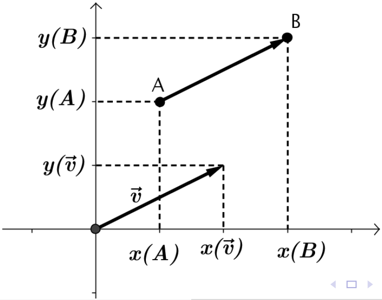
Coordenadas dum Vector Livre

Suponhamos fixado um sistema de eixos cartesianos.
Designemos por $(x(P), y(P))$ as coordenadas dum ponto $P \in \mathcal{E}$.

Proposição *Dados* $A, B, C, D \in \mathcal{E}$, $(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow$
$(x(B) - x(A), y(B) - y(A)) = (x(D) - x(C), y(D) - y(C))$.

Definem-se as coordenadas dum vector $\vec{v} = \vec{AB}$ como sendo

$$x(\vec{v}) = x(B) - x(A) \quad \text{e} \quad y(\vec{v}) = y(B) - y(A) \,.$$



Propriedades das Coordenadas dos Vectores Livres

Fixado um sistema de eixos cartesianos,

Proposição *dados* $P \in \mathcal{E}$, $\vec{v}, \vec{u} \in \mathcal{V}$

(a) $x(P + \vec{v}) = x(P) + x(\vec{v})$;

(b) $y(P + \vec{v}) = y(P) + x(\vec{v})$;

(c) $x(\vec{u} + \vec{v}) = x(\vec{u}) + x(\vec{v})$;

(d) $y(\vec{u} + \vec{v}) = y(\vec{u}) + y(\vec{v})$;

(e) $x(-\vec{v}) = -x(\vec{v})$;

(f) $y(-\vec{v}) = -y(\vec{v})$;

(f) $x(\vec{0}) = y(\vec{0}) = 0$.

Norma dum Vector Livre

Fixado um sistema de eixos cartesianos,

chama-se **norma** dum vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$ ao número

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x(\vec{v})^2 + y(\vec{v})^2} \, .$$

Proposição *dados* $A, B \in \mathcal{E}$, $\left\|\vec{AB}\right\| = |AB|$.

Congruências Modulo 360

Sejam $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Dizemos que θ' é **congruente com θ módulo** 360, e escrevemos $\theta' \equiv \theta \pmod{360}$, $\Leftrightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta' - \theta = 360\, k$.

O conjunto $\{\, \theta + 360\, k \;:\; k \in \mathbb{Z} \,\}$ é chamado a **classe de congruência módulo** 360 de θ.

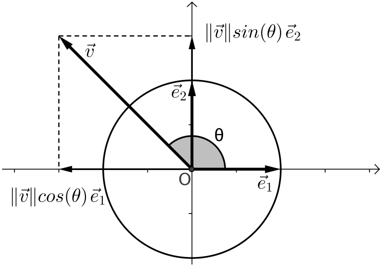
Argumento dum vector livre

Fixado um sistema de eixos cartesianos, sejam $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ os vectores livres de coordenadas $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente.

Proposição *Dado* $\vec{v} \in \mathcal{V} - \{0\}$, *existe um número* $\theta \in \mathbb{R}$, *único a menos duma congruência módulo* 360, *tal que*

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \cos(\theta)\, \vec{e}_1 + \|\vec{v}\| \sin(\theta)\, \vec{e}_2 \ .$$

Chama-se **argumento** de $\vec{v}$ a todos os números nesta classe de congruência.



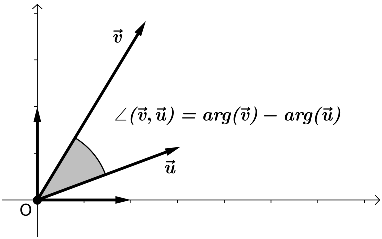
Ângulo orientado entre dois vectores livres

Suponhamos fixado um sistema de eixos cartesianos.

A função argumento arg : $\mathcal{V} - \{0\} \to \mathbb{R}$,
$\arg(\vec{v}) = \{$ argumentos de $\vec{v}\,\}$ é uma função multívoca.

Chama-se **ângulo orientado** entre dois vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} - \{0\}$ à medida $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arg(\vec{v}) - \arg(\vec{u})$.
Esta medida de ângulo orientado está bem definida porque

$$(\theta_1 + 360\,k_1) - (\theta_2 + 360\,k_2) = (\theta_1 - \theta_2) + 360\,(k_1 - k_2)\ .$$

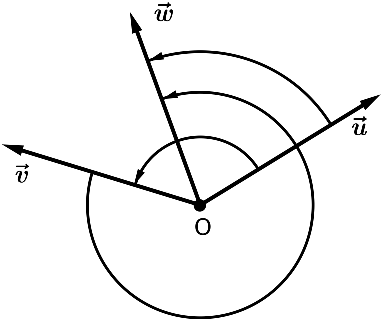


Aditividade dos ângulos orientados

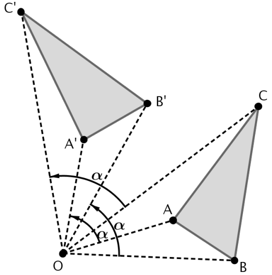
Suponhamos fixado um sistema de eixos cartesianos.

Proposição *Dados vectores* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V} - \{0\}$,

$$\angle(\vec{u}, \vec{w}) = \angle(\vec{u}, \vec{v}) + \angle(\vec{v}, \vec{w}) \; .$$



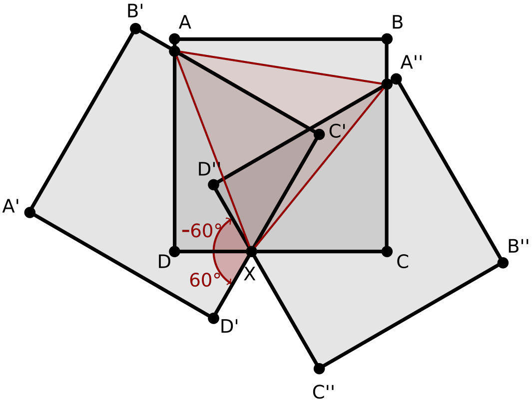
Fixados um número $\alpha \in \mathbb{R}$ e um ponto $O \in \mathcal{E}$, chama-se **rotação de ângulo** α **e centro** O, à aplicação $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ que fixa o ponto O e que envia $P \in \mathcal{E} - \{O\}$ em P' tal que $\angle(\vec{OP}, \vec{OP'}) = \alpha$ e $|OP| = |OP'|$. Esta será referida como a rotação $(O; \alpha)$.



Proposição *Toda a rotação é uma isometria.*

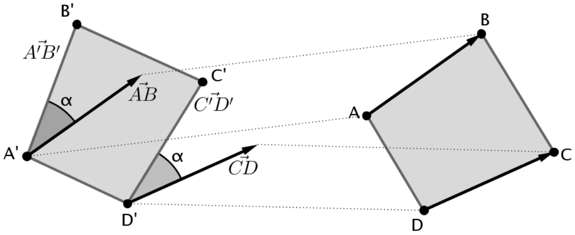
Problema

Problema 4 *Dados um quadrado* $\mathcal{Q} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ *e um ponto* X *num dos seus lados, inscreva um triângulo equilátero em* $\mathcal{Q} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ *com vértice* X.



Seja $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria, e usemos a notação $T(P) = P'$.

Proposição *Supondo que existe α tal que $\angle(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = \alpha$, quaisquer que sejam $A, B \in \mathcal{E}$, então T é uma rotação de ângulo α ou uma translação, se $\alpha = 360\,k$ com $k \in \mathbb{Z}$.*



Proposição *A composição de duas rotações* $(O_1;\alpha)$ *e* $(O_2;\beta)$ *é :*

(a) *uma translação, se* $\alpha+\beta$ *for múltiplo de* 360*;*

(b) *uma rotação de amplitude* $\alpha+\beta$*, caso contrário.*

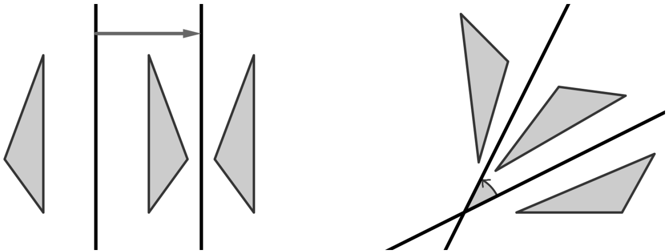
Proposição *A composição (por qualquer ordem) de uma rotação com uma translação é uma rotação da mesma amplitude.*

Composição de Reflexões

Proposição *A composição de duas reflexões em torno de rectas distintas* ℓ_1 *e* ℓ_2 *é :*

(a) *uma translação, se* ℓ_1 *e* ℓ_2 *forem paralelas;*

(b) *uma rotação, se* ℓ_1 *e* ℓ_2 *forem concorrentes.*



Caracterização das Rotações II

Sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ dois triângulos.

Proposição *Supondo que existe* $\alpha \in]0, 360[$ *tal que*

$$\angle(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = \alpha \;\; e \;\; |AB| = |A'B'|,$$
$$\angle(\vec{BC}, \vec{B'C'}) = \alpha \;\; e \;\; |BC| = |B'C'|,$$
$$\angle(\vec{AC}, \vec{A'C'}) = \alpha \;\; e \;\; |AC| = |A'C'|,$$

existe uma rotação $R : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *de ângulo* α *tal que*

$$R(A) = A', \;\; R(B) = B' \;\; e \;\; R(C) = C'.$$

Propriedades das Isometrias

Num contexto que envolva uma única isometria $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ usa-se a notação $P' = T(P)$.

Proposição *Toda a isometria preserva ângulos.*
Se $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *for uma isometria então* $\angle ABC \simeq \angle A'B'C'$*, quaisquer que sejam* $A, B, C \in \mathcal{E}$ *três pontos não colineares.*

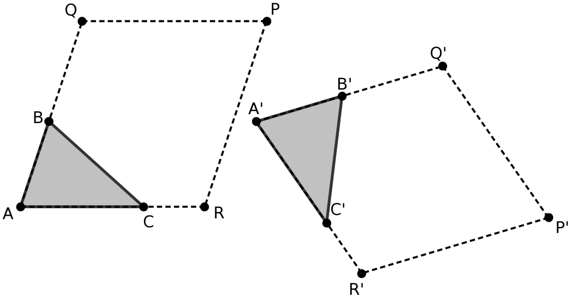
Proposição *Toda a isometria preserva o paralelismo.*
Se $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *for uma isometria, e* r, s *forem rectas paralelas então* $r' = T(r)$ *e* $s' = T(s)$ *são também paralelas.*

Critério de Igualdade para Isometrias

Proposição *Sejam* $T_1, T_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *isometrias. Se existirem três pontos não colineares* $A, B, C \in \mathcal{E}$ *tais que*

$$T_1(A) = T_2(A), \quad T_1(B) = T_2(B) \quad e \quad T_1(C) = T_2(C),$$

então $T_1 = T_2$.



Isometrias & Pontos Fixos

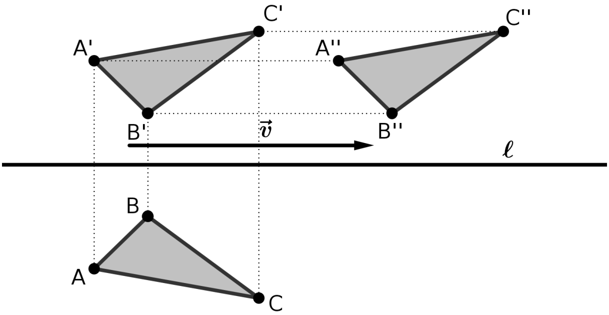
Proposição *Seja* $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *uma isometria.*

(a) *Se* T *tiver três pontos fixos não colineares então* $T = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

(b) *Se* T *tiver pelo menos um ponto fixo, então* T *é uma reflexão ou uma rotação.*

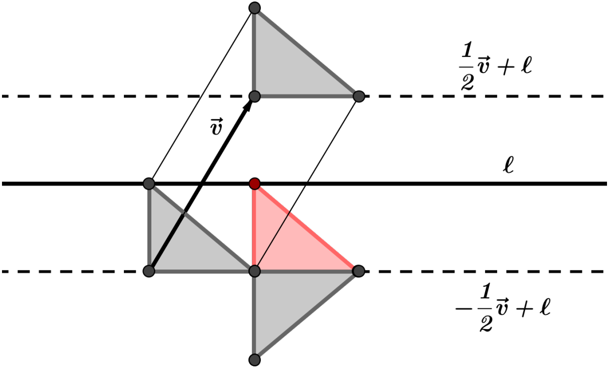
Reflexões Deslizantes

Chama-se **reflexão deslizante numa recta** ℓ à composição duma translação segundo um vector (não nulo) paralelo a ℓ com uma reflexão em torno de ℓ (não importa a ordem).



Proposição *Seja $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma reflexão deslizante na recta ℓ. Então $T(\ell) = \ell$ mas T não tem pontos fixos, i.e., $T(P) \neq P$, $\forall\, P \in \mathcal{E}$.*

Proposição *A composição duma translação com uma reflexão (não importa a ordem) é sempre uma reflexão deslizante.*



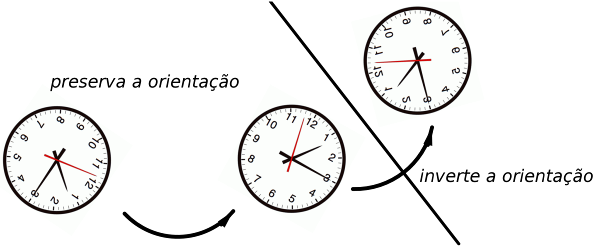
Isometrias que Preservam a Orientação

Seja $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria.

Dizemos que T **preserva a orientação**, ou que $\operatorname{sinal}(T) = +1$, $\Leftrightarrow$

$$\angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \angle(\vec{A'B'}, \vec{A'C'}), \quad \forall\, A, B, C \in \mathcal{E}.$$

Caso contrário vale $\angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\angle(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$, $\forall\, A, B, C \in \mathcal{E}$ e dizemos que T **inverte a orientação**, ou que $\operatorname{sinal}(T) = -1$.



Proposição *Sejam $T_1, T_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ isometrias. Então*

$$\operatorname{sinal}(T_1 \circ T_2) = \operatorname{sinal}(T_1)\operatorname{sinal}(T_2).$$

Tipos de Isometrias

Proposição *Toda a isometria do plano Euclideano, diferente da aplicação identidade, é:*

(a) *uma rotação ou reflexão, se tiver pontos fixos;*

(b) *uma translação ou reflexão deslizante, se não tiver;*

(c) *uma rotação ou translação, se preservar a orientação;*

(d) *reflexão ou reflexão deslizante, se inverter a orientação;*

Corolário *Toda a isometria do plano Euclideano é de um dos seguintes quatro tipos:*

(I) *Translação;*

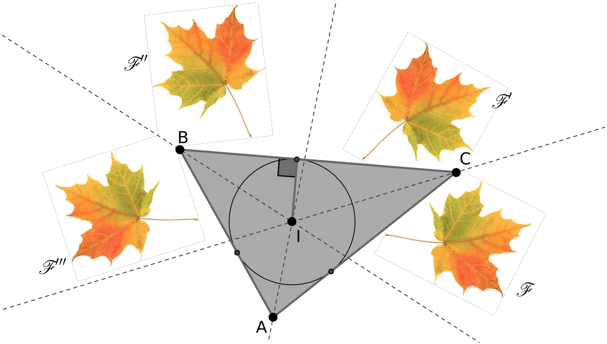
(II) *Reflexão;*

(III) *Rotação;*

(IV) *Reflexão deslizante.*

Problema

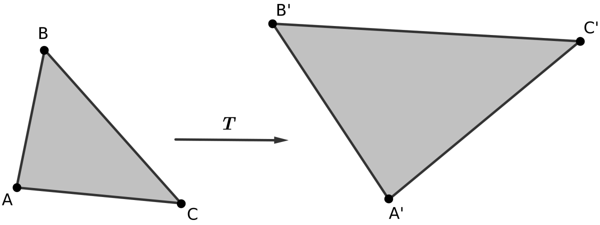
Problema *Mostre que a composta (por alguma ordem) das três reflexões nas três bissectrizes de um triângulo é a reflexão na recta perpendicular a um dos lados que passa pelo incentro do triângulo.*



Chama-se **transformação de semelhança de razão** $\lambda > 0$ a uma aplicação $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que

(a) T é bijectiva, i.e., $\forall\, P' \in \mathcal{E} \quad \exists^1\, P \in \mathcal{E}$ tal que $P' = T(P)$;

(b) T expande, ou contrai, distâncias pelo factor λ, i.e., $|T(P)T(Q)| = \lambda\,|PQ|$, $\forall\, P, Q \in \mathcal{E}$.



Propriedades das Transformações de Semelhança

Proposição *Toda a transformação de semelhança preserva a colinearidade e os ângulos. Se* $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *for uma transformação de semelhança então* $\angle ABC \sim \angle A'B'C'$, *quaisquer que sejam* $A, B, C \in \mathcal{E}$ *três pontos não colineares.*

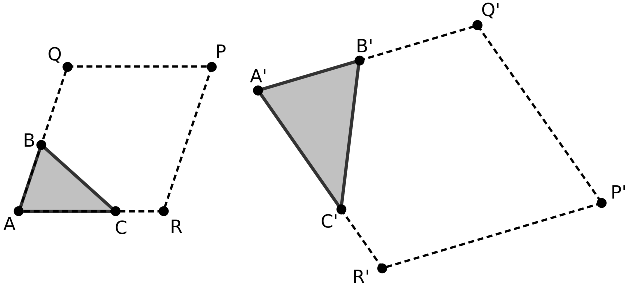
Proposição *Toda a transformação de semelhança preserva o paralelismo de rectas.*

Proposição *Toda a transformação de semelhança de razão* λ *transforma circunferências em circunferências, multiplicando o raio pelo factor* λ.

Proposição *Sejam* $T_1, T_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *transformações de semelhança. Se existirem três pontos não colineares* $A, B, C \in \mathcal{E}$ *tais que*

$$T_1(A) = T_2(A), \quad T_1(B) = T_2(B) \quad e \quad T_1(C) = T_2(C),$$

então $T_1 = T_2$.



Distâncias Orientadas

Seja ℓ uma recta **orientada**, i.e., com um sistema de coordenadas $f : \ell \to \mathbb{R}$ fixado.

Dados $A, B \in \ell$, chama-se **distância orientada** de A para B ao número

$$AB = f(B) - f(A) \ .$$

Proposição *Fixada uma recta orientada,* $\forall\ P, Q, R \in \ell$,

(a) $PP = 0$;

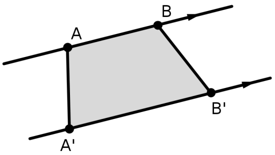
(b) $PQ = -QP$;

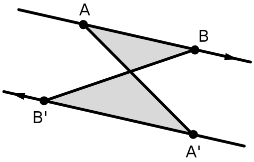
(c) $PR = PQ + QR$.

Orientações induzidas em rectas paralelas

Sejam $\ell, \ell' \subset \mathcal{E}$ rectas orientadas paralelas.

Dizemos que as orientações de ℓ e ℓ' **são compatíveis** sse fixados $A < B$ em ℓ e $A' < B'$ em ℓ', o quadrilátero $\overline{AB} \cup \overline{BB'} \cup \overline{B'A'} \cup \overline{A'A}$ tiver forma convexa.

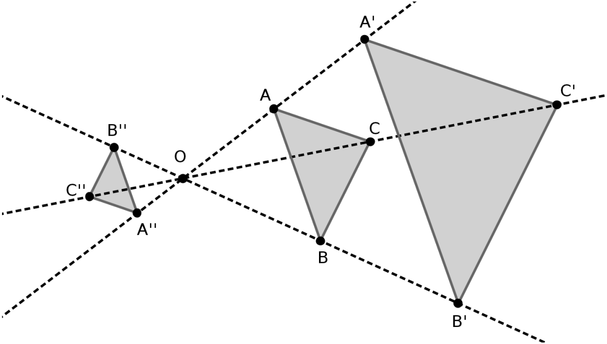




Proposição *Fixada a orientação de ℓ, existe uma única orientação na recta paralela ℓ' compatível com a orientação de ℓ, que se diz a* **orientação induzida** *por ℓ.*

Sejam $O \in \mathcal{E}$ e $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

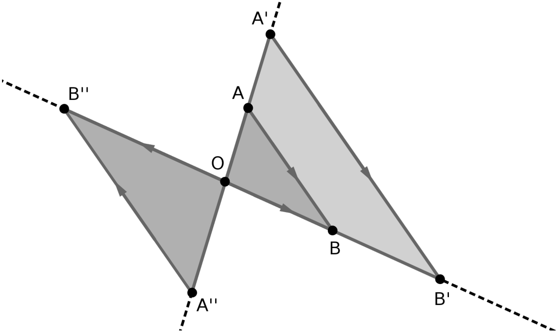
Chama-se **homotetia** de **centro** O e **razão** λ à transformação $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ que fixa O, $T(O) = O$, e envia cada ponto $P \in \mathcal{E}$, $P \neq O$, no único ponto P' da recta OP (orientada de O para P) tal que $OP' = \lambda\, OP$.



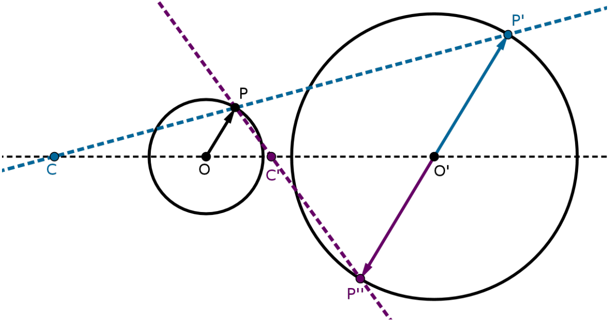
Proposição *Seja $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma homotetia de centro O e razão λ. Então:*

(a) *T envia cada recta numa recta paralela, ou na mesma, se ela passar por O, mantendo a orientação da recta se $\lambda > 0$, e invertendo-a se $\lambda < 0$;*

(b) *T é uma transformação de semelhança de razão $|\lambda|$.*

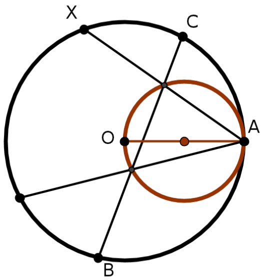


Proposição *Dadas duas circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ de raios r e r' distintos, existem exactamente duas homotetias que transformam $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$, uma de razão positiva e outra de razão negativa.*



Problema

Problema *Dados três pontos A, B, C numa circunferência $\mathcal{C}$, construa $X \in \mathcal{C}$ de modo que $\overline{BC}$ e $\overline{AX}$ se intersectem no ponto médio de $\overline{AX}$.*



Caracterização das Homotetias

Sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ dois triângulos.

Proposição *Supondo que existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ tal que*

$$AB = A'B' \text{ ou } AB \parallel A'B', \text{ e } \frac{A'B'}{AB} = \lambda,$$
$$BC = B'C' \text{ ou } BC \parallel B'C', \text{ e } \frac{B'C'}{BC} = \lambda,$$
$$AC = A'C' \text{ ou } AC \parallel A'C', \text{ e } \frac{A'C'}{AC} = \lambda,$$

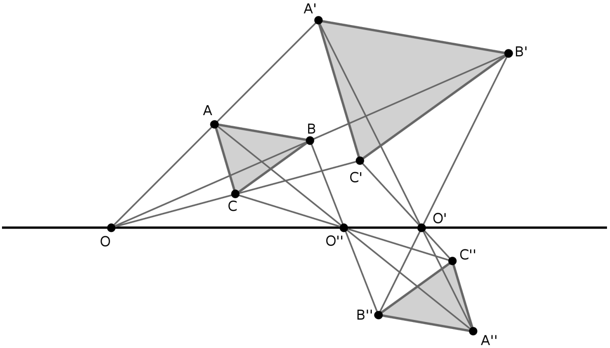
existe uma homotetia $H : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ de razão λ tal que

$$H(A) = A', \ H(B) = B' \quad \text{e} \quad H(C) = C'.$$

Proposição *A composição de homotetias de centros O_1 e O_2 e razões λ_1 e λ_2 é:*

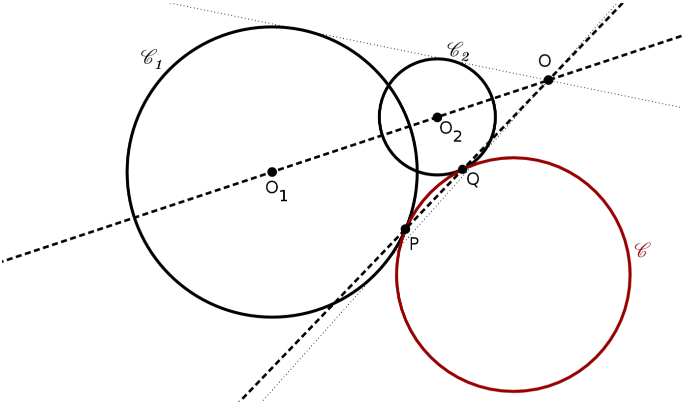
(a) *uma translação, se $\lambda_1\,\lambda_2 = 1$ e os centros O_1 e O_2 forem distintos, ou a identidade, se $\lambda_1\,\lambda_2 = 1$ e $O_1 = O_2$;*

(b) *uma homotetia de razão $\lambda_1\,\lambda_2$ e centro O colinear com O_1 e O_2, se $\lambda_1\,\lambda_2 \neq 1$.*



Problema

Problema *Uma circunferência $\mathcal{C}$ tem dois pontos de tangência P e Q com duas outras circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ (de raios $r_1 \neq r_2$). Mostre que a recta PQ passa pelo centro de uma das homotetias que transformam $\mathcal{C}_1$ em $\mathcal{C}_2$.*



Caracterização das Transformações de Semelhança

Sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ dois triângulos.

Proposição *Dois quaisquer triângulos semelhantes estão sempre relacionados por uma única transformação de semelhança. Mais precisamente, se* $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ *então existe uma e uma só transformação de semelhança* $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *tal que* $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ *e* $T(C) = C'$.

Caracterização das Transformações de Semelhança

Seja $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma transformação de semelhança.

Teorema *Se T tem razão $r > 0$, $r \neq 1$, então existem $O \in \mathcal{E}$ e $R, H : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tais que*

(a) *H é uma homotetia de centro O e razão r;*

(b) *R é uma rotação de centro O, ou uma reflexão em torno duma recta que passa por O;*

(c) *$T = R \circ H = H \circ R$.*

Sejam $O' = O$ um ponto fixo de T, $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O, $\mathcal{C}' = T(\mathcal{C})$ e $H : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma homotetia de centro O tal que $H(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. Mostre que $R = H^{-1} \circ T$ é uma isometria: uma rotação ou uma reflexão nas condições da alínea (b).

Existência dum Ponto Fixo

Lema *Seja* $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *uma transformação de semelhança com razão* $r > 0$, $r \neq 1$. *Então* T *tem pelo menos um ponto fixo.*

Prova. Seja $0 < r < 1$.
Fixado $O \in \mathcal{E}$ e $O' = T(O)$ tome-se $R > \frac{|OO'|}{1-r}$.
Sejam $\mathcal{C}$ a circunferência de centro O e raio R, e
$\mathcal{D} = \mathcal{C} \cup \mathrm{Int}(\mathcal{C}) = \{\, X \in \mathcal{E} \,:\, |XO| \leq R \,\}$.

Então $T(\mathcal{D})$ é um disco com diâmetro $r\,R$ contido em $\mathrm{Int}(\mathcal{C})$.

$X \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad |XO| \leq R \quad \Rightarrow$

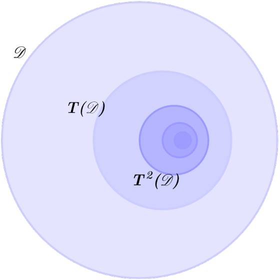
$$\begin{aligned} \left|X'O\right| &\leq \left|OO'\right| + \left|X'O'\right| \\ &= \left|OO'\right| + r\,|XO| \leq \left|OO'\right| + r\,R < R \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad T(X) = X' \in \mathrm{Int}(\mathcal{C})$.

Existência dum Ponto Fixo

Segue que

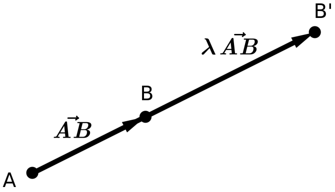
$$\mathcal{D} \supset T(\mathcal{D}) \supset T^2(\mathcal{D}) \supset \ldots \supset T^n(\mathcal{D}) \supset \ldots$$



$T^n(\mathcal{D})$ é um disco de diâmetro r^n ($r^n \to 0$ quando $n \to +\infty$).
Existe um único ponto $P \in \bigcap_{n\geq 0} T^n(\mathcal{D})$.
Esse ponto satisfaz $T(P) = P$.

Multiplicação dum Vector por um Escalar

Existe uma única operação $\cdot : R \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, de multiplicação de escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ por vectores livres $\vec{v} \in \mathcal{V}$, tal que:
$\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ e $\alpha \cdot \vec{AB} = \vec{AB'}$, onde B' é o único ponto da recta AB (orientada de A para B) tal que as distâncias orientadas AB e AB' satisfazem $AB' = \alpha\, AB$.



Propriedades da Multiplicação por um Escalar

Proposição *Dados vectores* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ *e escalares* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(a) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$;

(b) $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$;

(c) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha\, \beta) \cdot \vec{v}$;

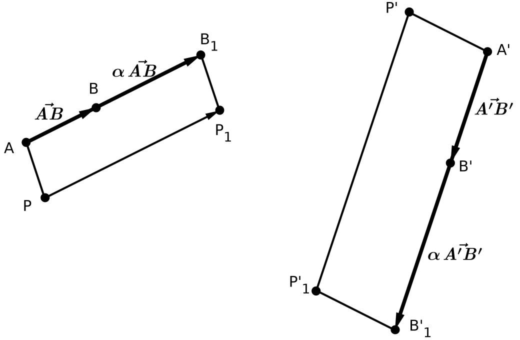
(d) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

Lineariedade das Transformações de Semelhança

Seja $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma Transformação de Semelhança.
Dados $A, B, \ldots \in \mathcal{E}$ escrevemos $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, etc.

Proposição *Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A, B \in \mathcal{E}$,*

$$T(P + \alpha \cdot \vec{AB}) = P' + \alpha \cdot \vec{A'B'} \ .$$



Transformação Linear Associada

Seja $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma Transformação de Semelhança.
Dados $A, B, \ldots \in \mathcal{E}$ escrevemos $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, etc.

Corolário *$T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ induz uma aplicação linear $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ definda por $T(\vec{AB}) = \vec{A'B'}$.*

Prova.

$$\begin{aligned} \vec{AB} = \vec{CD} \;&\Leftrightarrow\; D = C + \vec{AB} \\ &\Rightarrow\; D' = C' + \vec{A'B'} \\ &\Leftrightarrow\; \vec{C'D'} = \vec{A'B'}\ . \end{aligned}$$

Logo $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ está bem definida. $\square$

Matrizes duma Transformação de Semelhança

Fixado um *sistema de eixos cartesianos*, sejam O a origem dos eixos, $O' = T(O)$, e $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ os vectores livres de coordenadas $(1,0)$ e $(0,1)$ respectivamente.

Proposição *Dada uma transformação de semelhança* $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, *e pontos* $P, P' \in \mathcal{E}$ *com coordenadas* (x,y) *e* (x',y'), *respectivamente,* $T(P) = P' \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(O') \\ y(O') \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(T\vec{e}_1) & x(T\vec{e}_2) \\ y(T\vec{e}_1) & y(T\vec{e}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(T\vec{e}_1) & x(T\vec{e}_2) & x(O') \\ y(T\vec{e}_1) & y(T\vec{e}_2) & y(O') \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrizes que Representam uma Transf. de Semelhança

Dizemos que

$$M_T = \begin{bmatrix} x(T\vec{e}_1) & x(T\vec{e}_2) \\ y(T\vec{e}_1) & y(T\vec{e}_2) \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{M}_T = \begin{bmatrix} x(T\vec{e}_1) & x(T\vec{e}_2) & x(O') \\ y(T\vec{e}_1) & y(T\vec{e}_2) & y(O') \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

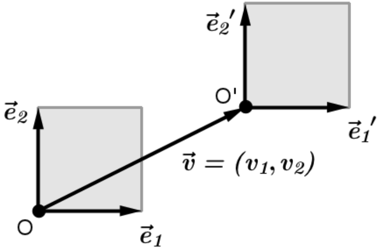
são as matrizes que **representam** as transformações $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ e $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, respectivamente.

Corolário *Dadas $T, T' : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ transformações de semelhança,*

$$M_{T' \circ T} = M_{T'}\, M_T \quad \text{e} \quad \tilde{M}_{T' \circ T} = \tilde{M}_{T'}\, \tilde{M}_T \,.$$

Matriz duma Translação segundo um vector $\vec{v}$

Seja T a translação segundo o vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$.



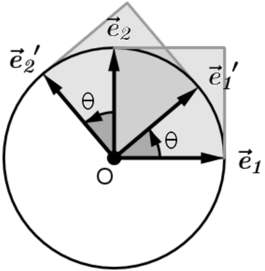
Temos $\quad T(\vec{e}_1) = (1, 0), \;\; T(\vec{e}_2) = (0, 1)$ e $\quad T(O) = (v_1, v_2)$.

Logo,

$$\tilde{M}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Matriz duma Rotação de ângulo θ em torno da origem

Seja T a rotação de ângulo θ em torno da origem.



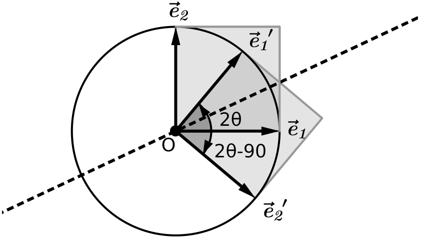
Temos $\quad T(O) = (0,0), \quad T(\vec{e}_1) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad$ e
$T(\vec{e}_2) = (\cos(90+\theta), \sin(90+\theta)) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

Logo,

$$\tilde{M}_T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz duma Reflexão em torno dum eixo pela origem

Seja T a reflexão em torno dum eixo que passa pela origem, fazendo um ângulo θ com o semi-eixo positivo das abcissas.



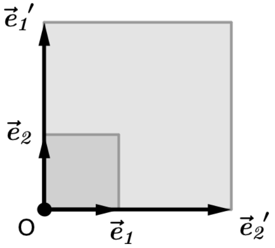
Temos $T(O) = (0,0)$, $T(\vec{e}_1) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$ e $T(\vec{e}_2) = (\cos(2\theta - 90), \sin(2\theta - 90)) = (\sin(2\theta), -\cos(2\theta))$.

Logo,

$$\tilde{M}_T = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz duma Homotetia de razão r em torno da origem

Seja T a homotetia de razão r em torno da origem.



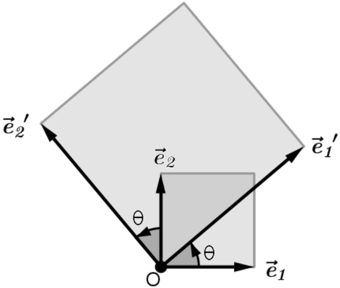
Temos $\quad T(O) = (0,0), \;\; T(\vec{e}_1) = (r,0) \quad$ e $\; T(\vec{e}_2) = (0,r)$.

Logo,

$$\tilde{M}_T = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

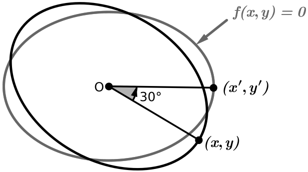
Matriz duma Transform. de Semelhança que fixe a origem

Toda a transformação de semelhança que fixe a origem tem uma matriz de uma das formas seguintes:



$$\tilde{M}_T = \begin{bmatrix} r\,\cos\theta & -r\,\sin\theta & 0 \\ r\,\sin\theta & r\,\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \tilde{M}_T = \begin{bmatrix} r\,\cos\theta & r\,\sin\theta & 0 \\ r\,\sin\theta & -r\,\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problema *Considere uma curva plana $\mathcal{C}$ de equação cartesiana $f(x,y)=0$. Encontre a equação cartesiana da curva $\mathcal{C}'$ que se obtem rodando $\mathcal{C}$ trinta graus no sentido horário.*



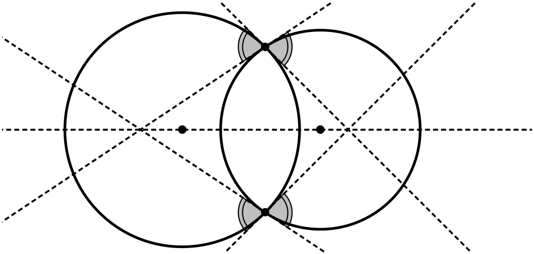
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30) & -\sin(30) \\ \sin(30) & \cos(30) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

Logo a equação da curva rodada é

$$f\left(\frac{\sqrt{3}x-y}{2}, \frac{x+\sqrt{3}y}{2}\right)=0\ .$$

Ângulo entre Circunferências

Chama-se **ângulo** entre duas circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ ao menor ângulo que as tangentes a $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ fazem nos pontos de intersecção.



$\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são tangentes $\Leftrightarrow$ o ângulo entre $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ é de 0 graus

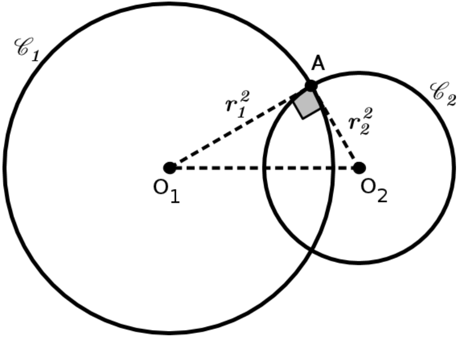
Duas circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ dizem-se **ortogonais** sse o ângulo entre $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ é de 90 graus.

Ortogonalidade de Circunferências

Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas circunferências, com centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2.

Proposição *$\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ intersectam-se ortogonalmente* $\Leftrightarrow$

$$|O_1 O_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 \ .$$

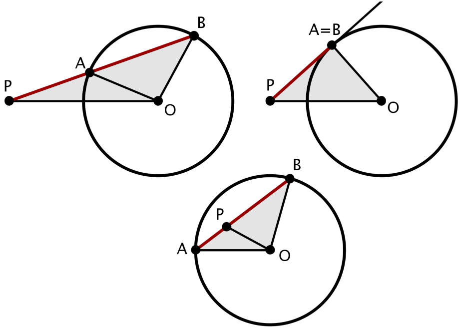


Distâncias Direccionais de um Ponto a uma Circunferência

Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O e raio r.

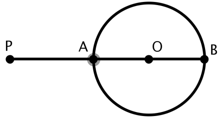
Proposição *Sejam P um ponto tal que $P \notin \mathcal{C}$, e ℓ uma recta por P, i.e., $P \in \ell$, que corta $\mathcal{C}$ nos pontos A e B. Então*

$$PA \cdot PB = |OP|^2 - r^2 .$$

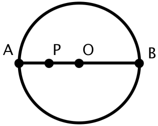


Prova (Caso 1)

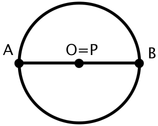
Caso $O \in \ell$, $P \neq O$



$$PA \cdot PB = (|OP| + r)(|OP| - r) = |OP|^2 - r^2$$

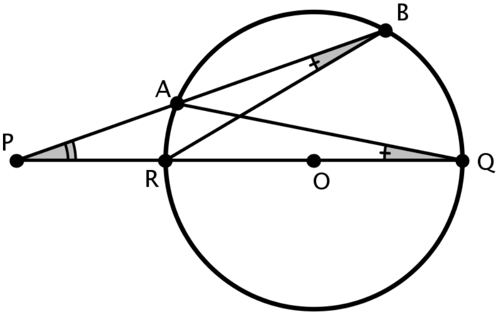


Caso $O \in \ell$, $P = O$



$$PA \cdot PB = OA \cdot OB = -r^2$$

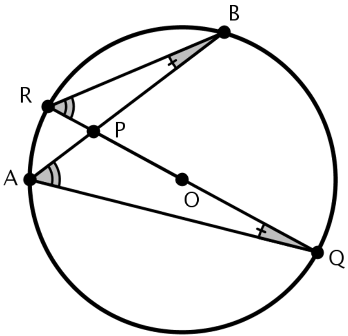
Prova (Caso 2)



$$\Delta AQP \sim \Delta RBP \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|PB|}{|PR|} = \frac{|PQ|}{|PA|}$$

$$\Leftrightarrow \quad |PA|\ |PB| = |PR|\ |PQ|\ .$$

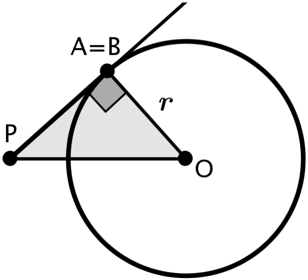
Prova (Caso 3)



$$\Delta AQP \sim \Delta RBP \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|PB|}{|PR|} = \frac{|PQ|}{|PA|}$$

$$\Leftrightarrow \quad |PA|\,|PB| = |PR|\,|PQ| \;.$$

Prova (Caso 4)



$$|PA|^2 + r^2 = |OP|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |PA|^2 = |OP|^2 - r^2 \ .$$

Potência dum Ponto relativa a uma Circunferência

Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O e raio r.

Chama-se **potência** de um ponto P relativamente a $\mathcal{C}$ ao número

$$\mathcal{P}\mathrm{ot}(P;\mathcal{C}) = |OP|^2 - r^2 \ .$$

Proposição *Para todo o ponto $P \in \mathcal{E}$,*

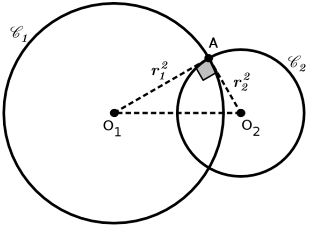
1. $\mathcal{P}\mathrm{ot}(P;\mathcal{C}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P \in \mathrm{Ext}(\mathcal{C})$;
2. $\mathcal{P}\mathrm{ot}(P;\mathcal{C}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P \in \mathcal{C}$;
3. $\mathcal{P}\mathrm{ot}(P;\mathcal{C}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad P \in \mathrm{Int}(\mathcal{C})$.

Ortogonalidade de Circunferências

Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ circunferências de centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2.

Proposição *São equivalentes:*

1. $\mathcal{C}_1 \perp \mathcal{C}_2$;
2. $\mathcal{P}\mathrm{ot}(O_1; \mathcal{C}_2) = r_1^2$;
3. $\mathcal{P}\mathrm{ot}(O_2; \mathcal{C}_1) = r_2^2$.

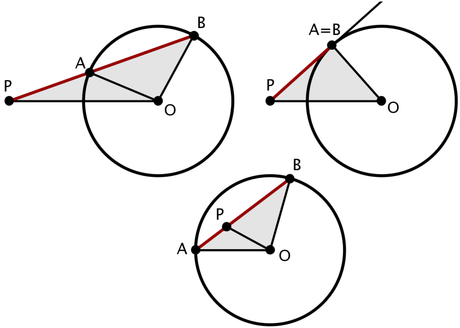


Distâncias Direccionais de um Ponto a uma Circunferência

Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O e raio r.

Proposição *Sejam P um ponto tal que $P \notin \mathcal{C}$, e ℓ uma recta por P, i.e., $P \in \ell$, que corta $\mathcal{C}$ nos pontos A e B. Então*

$$PA \cdot PB = \mathcal{P}\mathrm{ot}(P;\mathcal{C}) \ .$$



Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O e raio r.

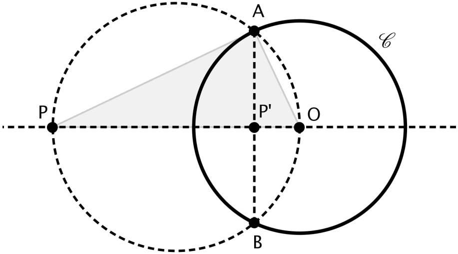
Chama-se **inversão em torno** de $\mathcal{C}$, ou de **polo** O, à transformação $T : \mathcal{E} - \{O\} \to \mathcal{E} - \{O\}$ que a cada ponto $P \neq O$ associa o único ponto $P' \in OP$ tal que

$$OP \cdot OP' = r^2 \ .$$

Proposição *A inversão T em torno de $\mathcal{C}$ satisfaz:*

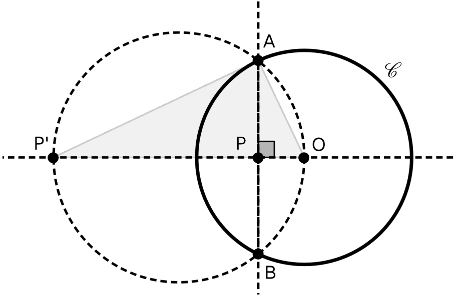
1. $T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$;
2. $T(\mathrm{Int}(\mathcal{C}) - \{O\}) = \mathrm{Ext}(\mathcal{C})$;
3. $T(\mathrm{Ext}(\mathcal{C})) = \mathrm{Int}(\mathcal{C}) - \{O\}$.

Construção do Inverso (I)



Input: $\mathcal{C}$ circunferência (centro O e raio r), e $P \in \mathrm{Ext}(\mathcal{C})$.
(P1) Trace a circunferência $\mathcal{C}'$ de diâmetro OP;
(P2) Marque os pontos de intersecção A e B de $\mathcal{C}'$ com $\mathcal{C}$;
(P3) Encontre o ponto de intersecção P' de AB com OP.
Output: O ponto P'.

Construção do Inverso (II)



Input: $\mathcal{C}$ circunferência (centro O e raio r), e $P \in \mathrm{Int}(\mathcal{C}) - \{O\}$.

(P1) Trace a perpendicular ℓ a OP por P;

(P2) Marque os pontos de intersecção A e B de ℓ com $\mathcal{C}$;

(P3) Trace a circunferência $\mathcal{C}'$ pelos pontos A e B e O;

(P4) Encontre o ponto de intersecção $P' \neq O$ de $\mathcal{C}'$ com OP.

Output: O ponto P'.

Eixo Radical de duas Circunferências

Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas circunferências, com centros distintos O_1 e O_2, respectivamente

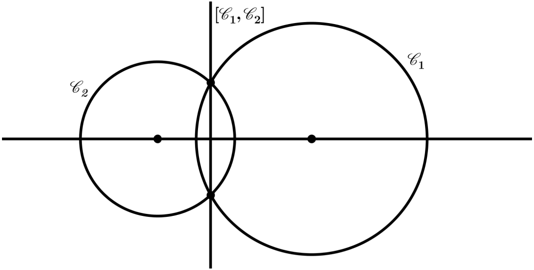
Chama-se **eixo radical** de duas circunferências ao conjunto dos pontos do plano equipontentes de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$,

$$[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2] = \{ \, P \in \mathcal{E} \, : \, \mathcal{P}\mathrm{ot}(P; \mathcal{C}_1) = \mathcal{P}\mathrm{ot}(P; \mathcal{C}_2) \, \} \, .$$

Proposição $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$ *é uma recta ortogonal à recta* $O_1 O_2$.

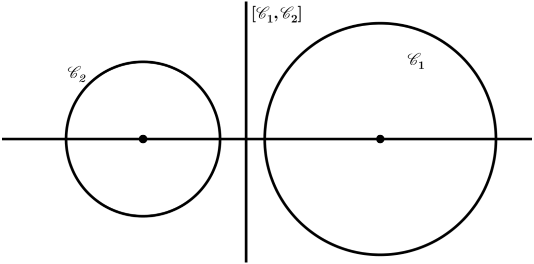
Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas circunferências não concêntricas.

Proposição *Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ se intersectarem em dois pontos A e B, então $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2] = AB$. Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ se intersectarem num único ponto $A = B$, então $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$ é a tangente comum nesse ponto.*



Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas circunferências não concêntricas.

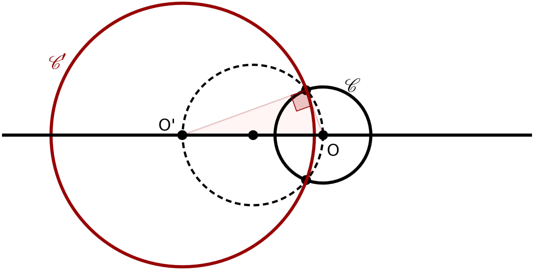
Proposição *Se* $\mathcal{C}_1$ *e* $\mathcal{C}_2$ *forem disjuntas então o eixo radical* $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$ *é exterior a ambas.*



Circunferência ortogonal a uma dada

Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O e raio r.

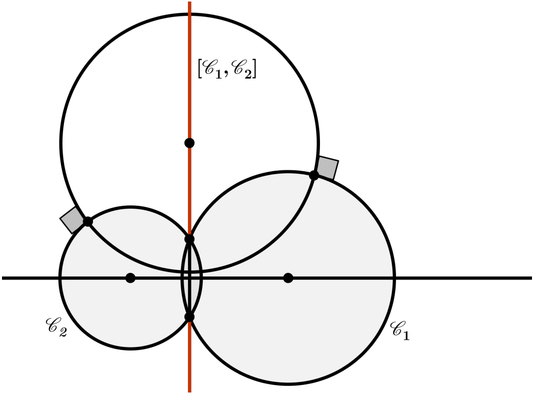
Proposição *Dado $O' \in \mathcal{E} - (\mathcal{C} \cup \{O\})$, existe uma única circunferência $\mathcal{C}'$ de centro O' que é ortogonal a $\mathcal{C}$.*



Circunferências ortogonais a um par

Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas circunferências não concêntricas.

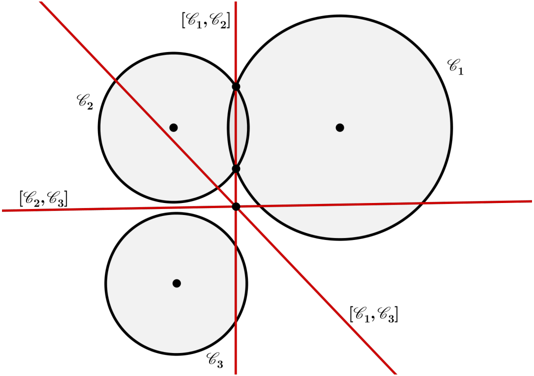
Proposição *O lugar geométrico dos centros das circunferências ortogonais a* $\mathcal{C}_1$ *e* $\mathcal{C}_2$ *é a intersecção do eixo radical* $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$ *com* $\mathrm{Ext}(\mathcal{C}_1)$ *(ou com* $\mathrm{Ext}(\mathcal{C}_2)$ *).*



Concorrência dos Eixos de três Circunferências

Sejam $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ três circunferências.

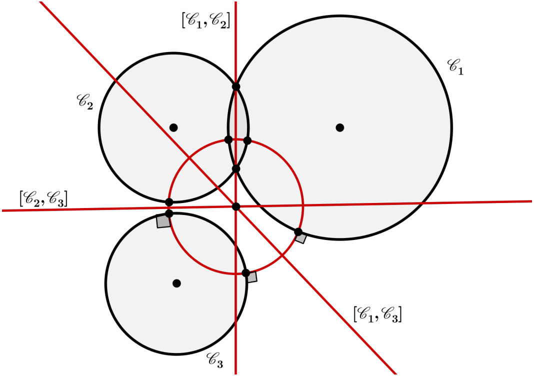
Proposição *Se os centros de* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *e* $\mathcal{C}_3$ *forem não colineares então os três eixos radicais* $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$, $[\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3]$ *e* $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3]$ *são concorrentes.*



Existência duma circunferência ortogonal a três

Sejam $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ três circunferências.

Corolário *Se os centros de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ forem não colineares então existe uma única circunferência simultâneamente ortogonal a $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$.*



Imagens de Rectas e Circunferências

Seja $T : \mathcal{E} - \{O\} \to \mathcal{E} - \{O\}$ uma inversão de polo O.

A imagem por T de uma recta nem sempre é uma recta.
A imagem por T de uma circunferência nem sempre é uma circunferência. No entanto,

Teorema *A inversão T transforma toda a recta, e toda a circunferência, numa recta ou numa circunferência.*

Imagem duma recta que passe por O

Seja $T : \mathcal{E} - \{O\} \to \mathcal{E} - \{O\}$ uma inversão de polo O.

Proposição *A imagem duma recta que passe por O é ela própria. Mais precisamente, $T(\ell - \{O\}) = \ell - \{O\}$, para toda a recta ℓ tal que $O \in \ell$.*

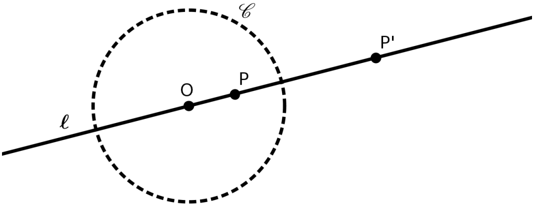


Imagem duma circunferência que passe por O

Seja $T : \mathcal{E} - \{O\} \to \mathcal{E} - \{O\}$ uma inversão em torno de $\mathcal{C}$.

Proposição *A imagem duma circunferência $\mathcal{D}$ que passe por O é uma recta ortogonal à recta que une os centros de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Mais precisamente, sendo $\tilde{O}$ o centro de $\mathcal{D}$, $P \in O\tilde{O}$ o ponto de $\mathcal{D}$ diametralmente oposto a O, $P' = T(P)$, e ℓ a recta perpendicular a $O\tilde{O}$ por P', então, $T(\mathcal{D} - \{O\}) = \ell$.*

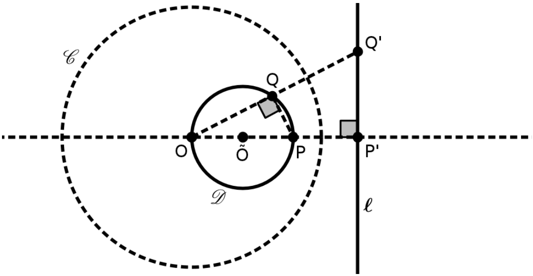


Imagem duma recta que não passe por O

Seja $T : \mathcal{E} - \{O\} \to \mathcal{E} - \{O\}$ uma inversão em torno de $\mathcal{C}$.

Proposição *A imagem duma recta ℓ que não passe por O é uma circunferência que passa por O, com centro na perpendicular a ℓ pelo ponto O. Mais precisamente, sendo ℓ uma recta tal que $O \notin \ell$, P o pé da perpendicular de O sobre ℓ, $P' = T(P)$, e $\mathcal{D}$ a circunferência de diâmetro $\overline{OP'}$, então, $T(\ell) = \mathcal{D} - \{O\}$.*

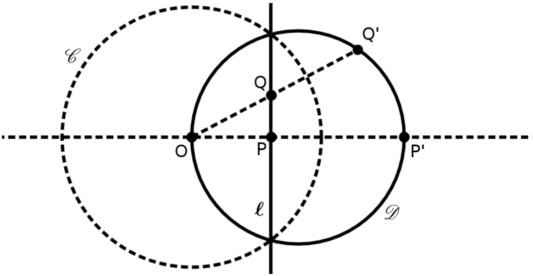
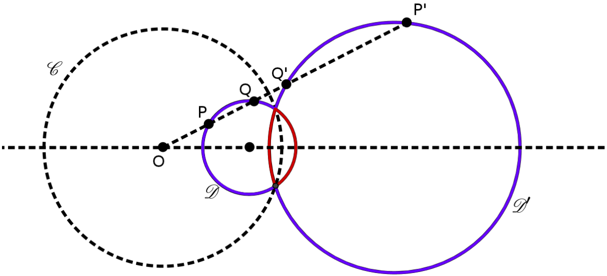


Imagem duma circunferência que não passe por O

Seja $T : \mathcal{E} - \{O\} \to \mathcal{E} - \{O\}$ uma inversão em torno da circunferência $\mathcal{C}$ de centro O e raio r.

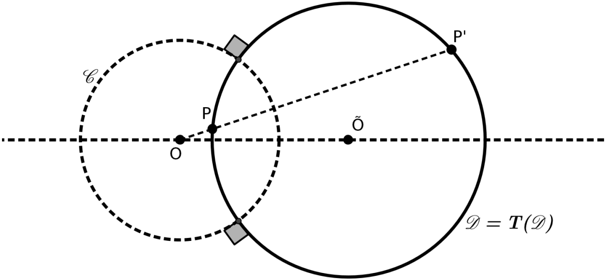
Proposição *A imagem duma circunferência $\mathcal{D}$ que não passe por O é uma circunferência que não passa por O. Mais precisamente, se $p = \mathcal{P}\mathrm{ot}(O; \mathcal{D})$ então a imagem $\mathcal{D}' = T(\mathcal{D})$ coincide com a imagem de $\mathcal{D}$ pela homotetia de centro O e razão r^2/p.*



Circunferências Invariantes por Inversão

Seja $T : \mathcal{E} - \{O\} \to \mathcal{E} - \{O\}$ uma inversão em torno da circunferência $\mathcal{C}$.

Corolário *As únicas circunferências invariantes, i.e., tais que $\mathcal{D} = T(\mathcal{D})$, são as circunferências ortogonais a $\mathcal{C}$.*



Circunferência Ortogonal por dois Pontos

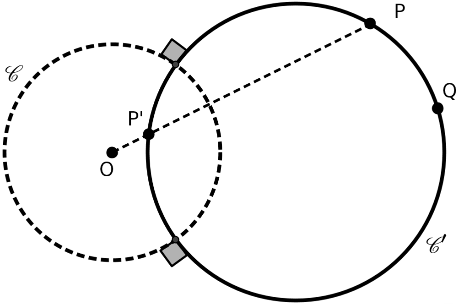
Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O.

Proposição *Dados dois pontos $P, Q \notin \mathcal{C}$, não existe mais do que uma circunferência $\mathcal{C}'$ tal que*

(a) $\mathcal{C}' \perp \mathcal{C}$;

(b) $P, Q \in \mathcal{C}'$.

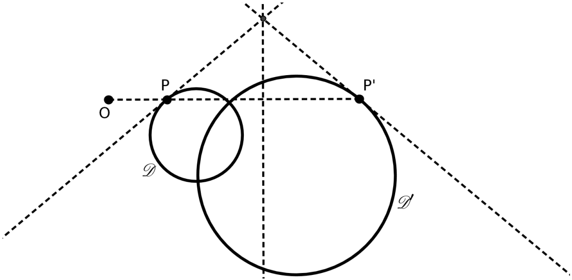
Além disso, uma tal circunferência existe sse P, Q, O não forem colineares.



Tangentes a uma Circunferência e sua Imagem

Seja $T : \mathcal{E} - \{O\} \to \mathcal{E} - \{O\}$ uma inversão de polo O.

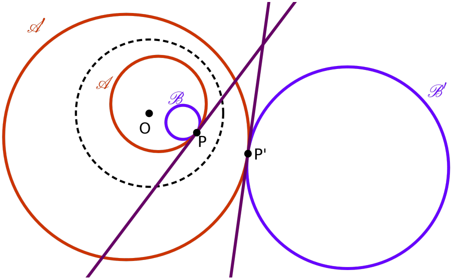
Teorema *Sejam $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ circunferências inversas uma da outra pela inversão T. Dado $P \in \mathcal{D}$, a tangente a $\mathcal{D}'$ no ponto $P' = T(P)$ é a imagem da tangente a $\mathcal{D}$ no ponto P pela reflexão em torno da mediatriz do segmento $\overline{PP'}$. Quando $P = P'$ considera-se a perpendicular a OP no ponto P em vez da mediatriz.*



As Inversões Preservam Tangências

Seja $T : \mathcal{E} - \{O\} \to \mathcal{E} - \{O\}$ uma inversão de polo O.

Proposição *A inversão preserva a relação de tangência.*
Mais precisamente, dadas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, rectas ou circunferências, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são tangentes em P $\Leftrightarrow$ $T(\mathcal{A})$ e $T(\mathcal{B})$ são tangentes em $T(P)$.



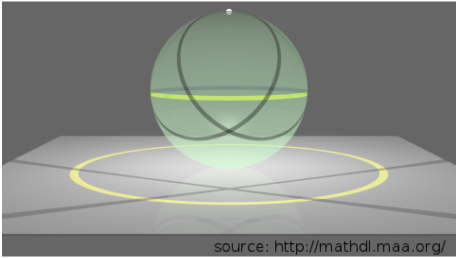
O Plano Inversivo

Define-se o **plano inversivo** como $\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup \{\infty\}$.

Dada uma inversão $T : \mathcal{E} - \{O\} \to \mathcal{E} - \{O\}$ de polo O convecionamos escrever

$$T(O) = \infty \quad \text{e} \quad T(\infty) = O \,.$$

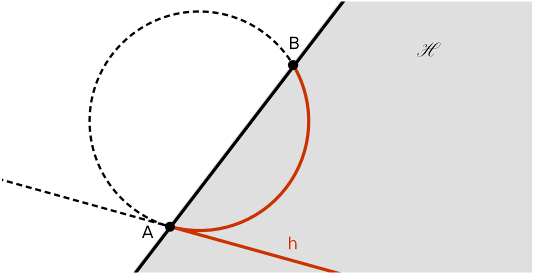
A inversão induz uma involução no plano inversivo $T : \dot{\mathcal{E}} \to \dot{\mathcal{E}}$



Tangente a um Arco de Circunferência num ponto

Seja $\widehat{\mathrm{AB}}$ o arco obtido por intersecção da circunferência $\mathcal{C}$ com o semiplano $\mathcal{H}$ limitado pela recta secante AB.

Chama-se **semirecta tangente** a $\widehat{\mathrm{AB}}$ no ponto A à única semirecta $h \subset AB$ com origem A tal que $h - \{A\} \subset \mathcal{H}$.



Qualquer semirecta $\dot{A}B$ será considerada **tangente** a si mesmo na extremidade origem A.

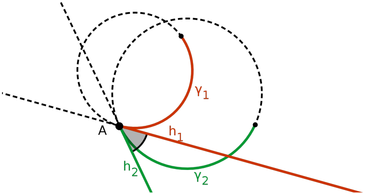
Ângulos entre Arcos e Semirectas

Vamos usar o termo "**arco**" como sinónimo de *arco de circunferência*, *semirecta*, ou *segmento de recta*.

Sejam γ_1 e γ_2 dois arcos com extremidade comum $A \in \mathcal{E}$. Chama-se **ângulo entre os arcos** no ponto A à amplitude

$$\angle_A(\gamma_1, \gamma_2) = m(\angle(h_1, h_2)) ,$$

onde h_1 e h_2 designam, respectivamente, as semirectas tangentes aos arcos γ_1 e γ_2 no ponto A.



Quando $h_1 = h_2$, definimos que $\angle_A(\gamma_1, \gamma_2) = 0$. Se h_1 e h_2 forem semirectas opostas, definimos $\angle_A(\gamma_1, \gamma_2) = 180$.

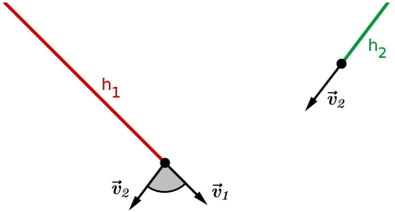
Ângulo entre Semirectas no ∞

Sejam h_1 e h_2 duas semirectas.

Chama-se **ângulo** entre h_1 e h_2 **no infinito** ao ângulo não orientado

$$\angle_\infty(h_1, h_2) = \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \ ,$$

formado pelos vectores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente paralelos a h_1 e h_2, mas com sentidos opostos a estas semirectas.

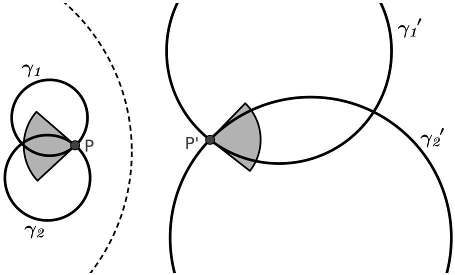


As Inversões preservam Ângulos

Teorema *As inversões preservam ângulos. Mais precisamente, se* γ_1 *e* γ_2 *são arcos com a extremidade comum* $A \in \dot{\mathcal{E}}$, *então*

$$\angle_{A'}(\gamma_1', \gamma_2') = \angle_A(\gamma_1, \gamma_2) ,$$

onde $\gamma_1' = T(\gamma_1)$, $\gamma_2' = T(\gamma_2)$ *e* $A_1' = T(A)$.



Seja $\mathcal{C}_0$ uma circunferência de centro O_0 e raio r_0, fixada de uma vez por todas.

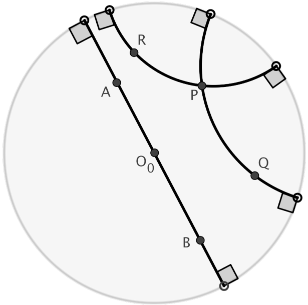
O **disco** $\mathcal{H} = \mathrm{Int}(\mathcal{C}_0)$ será chamado de **“plano” hiperbólico**.

Os elementos de $\mathcal{H}$ serão chamados **“pontos”**.

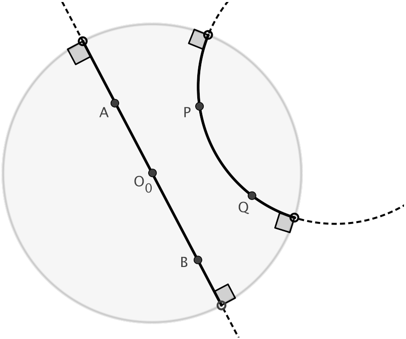
Chama-se **“recta”** à intersecção de $\mathcal{H}$ com :

- uma recta Euclideana que passe pela origem O_0; ou
- uma circunferência que intersecte $\mathcal{C}_0$ ortogonalmente.

Proposição *O modelo de Poincaré $\mathcal{H}$ não satisfaz o Axioma das Paralelas, i.e., o axioma* **A12**.



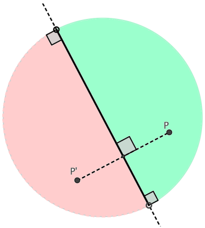
Proposição *O modelo de Poincaré $\mathcal{H}$ satisfaz os axiomas* **A1**, **A2** *e* **A3**.



“Reflexões” de $\mathcal{H}$ (I)

Sejam ℓ uma recta passando por O_0, e
S_1, S_2 os semiplanos limitados por ℓ.

Proposição *A reflexão* $R : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *em torno de* ℓ *satisfaz:*
$R(\mathcal{H} \cap \ell) = \mathcal{H} \cap \ell$, $R(\mathcal{H} \cap S_2) = \mathcal{H} \cap S_1$ *e* $R(\mathcal{H} \cap S_2) = \mathcal{H} \cap S_1$.
Em particular, $R(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

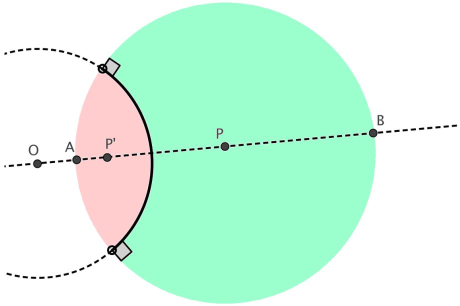


Os conjuntos $S_1 \cap \mathcal{H}$ e $S_2 \cap \mathcal{H}$ dizem-se os **“semiplanos”** limitados pela “recta” $\ell \cap \mathcal{H}$.

“Reflexões” de $\mathcal{H}$ (II)

Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O ortogonal a $\mathcal{C}_0$.

Proposição *A inversão I em torno de $\mathcal{C}$ satisfaz:*
$I(\mathcal{H} \cap \mathrm{Int}(\mathcal{C})) = \mathcal{H} \cap \mathrm{Ext}(\mathcal{C})$, $\quad I(\mathcal{H} \cap \mathrm{Ext}(\mathcal{C})) = \mathcal{H} \cap \mathrm{Int}(\mathcal{C})$
e $I(\mathcal{H} \cap \mathcal{C}) = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$. *Em particular,* $I(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

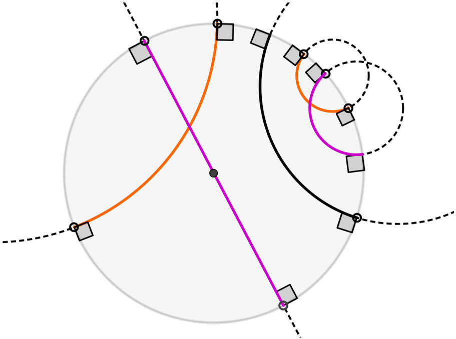


Os conjuntos $\mathrm{Int}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{H}$ e $\mathrm{Ext}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{H}$ dizem-se os **“semiplanos”** limitados pela “recta” $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$.

Vamos chamar de **“reflexão”** a uma transformação $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ obtida por restrição a $\mathcal{H}$ de uma:

- reflexão Euclideana em torno de uma recta ℓ por O_0; ou
- inversão em torno de uma circunferência $\mathcal{C}$ ortogonal a $\mathcal{C}_0$.

Proposição *Toda a “reflexão” transforma “rectas” em “rectas”.*

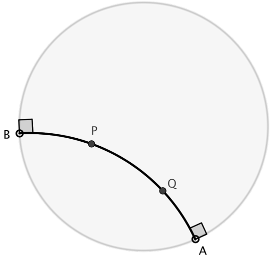


As “Reflexões” actuam transitivamente em $\mathcal{H}$

Proposição *Dados dois “pontos” $P, Q \in \mathcal{H}$, existe pelo menos uma “reflexão” $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $T(P) = Q$.*

A distância em $\mathcal{H}$

Sejam P e Q "pontos" em $\mathcal{H}$, e A, B as extremidades em $\mathcal{C}_0$ da "recta" definida por P e Q.



Define-se **distância** de P a Q por

$$d(P,Q) = \left| \log \left(\frac{|PA|}{|PB|} \cdot \frac{|QB|}{|QA|} \right) \right|$$

A Razão Dupla

Sejam A, B, P e Q pontos tais que $\{A, B\} \cap \{P, Q\} = \emptyset$.

Chama-se **razão dupla** dos pares de pontos (A, B) e (P, Q) à quantidade

$$[A, B; P, Q] = \frac{|PA|}{|PB|} \cdot \frac{|QB|}{|QA|} .$$

As inversões preservam a Razão Dupla

Sejam A, B, P e Q pontos tais que $\{A, B\} \cap \{P, Q\} = \emptyset$.

Proposição *Toda a inversão preserva a razão dupla.*
Mais precisamente, se T for uma inversão,
$$[T(A), T(B); T(P), T(Q)] = [A, B; P, Q].$$

Corolário *Toda a "reflexão" é uma isometria.*
Mais precisamente, se $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ for uma "reflexão",
$$d(T(P), T(Q)) = d(P, Q), \quad \forall\, P, Q \in \mathcal{H}.$$

Propriedades da Razão Dupla

Sejam A, B, P e Q pontos tais que $\{A, B\} \cap \{P, Q\} = \emptyset$.

Proposição *A razão dupla satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $[B, A; P, Q] = [A, B; P, Q]^{-1}$;

(b) $[A, B; Q, P] = [A, B; P, Q]^{-1}$;

(c) $[A, B; P, P] = 1$;

(d) *Supondo que P, Q são interiores a um "arco" de extremidades A e B,*

$$[A, B; P, Q] = 1 \;\Leftrightarrow\; P = Q.$$

Axiomas A4 e A5

Proposição *O modelo de Poincaré $\mathcal{H}$ satisfaz os axiomas* **A4** *e* **A5**.

Proposição *Seja ℓ uma "recta" que passa pela origem O_0 de $\mathcal{H}$, e sejam A e B as extremidades de ℓ em $\mathcal{C}_0$. Então $f : \ell \to \mathbb{R}$, definida por $f(P) = \log\left(\frac{|PA|}{|PB|}\right)$, é um sistema de coordenadas.*

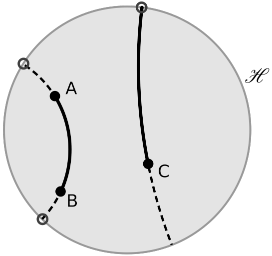
“Segmentos de recta” de $\mathcal{H}$

Proposição *Os “segmentos” de “recta” e as “semirectas” de $\mathcal{H}$ são de dois tipos:*

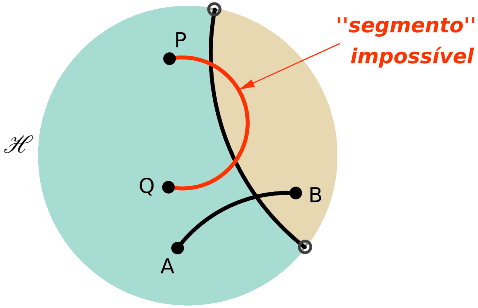
(1) *segmentos de rectas colineares com O_0;*

(2) *arcos de circunferências ortogonais a $\mathcal{C}_0$.*

Nos “segmentos” ambas as extremidades do “arco” estão em $\mathcal{H}$, enquanto nas “semirectas” uma extremidade está em $\mathcal{H}$ e a outra em $\mathcal{C}_0$.

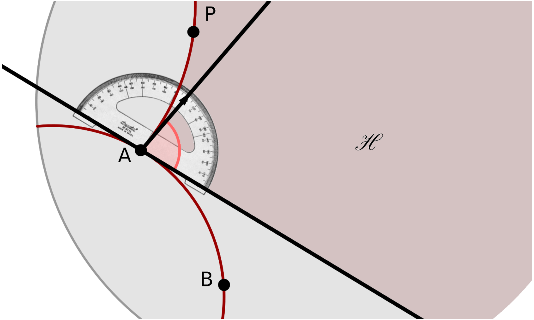


Proposição *O modelo de Poincaré* $\mathcal{H}$ *satisfaz o axioma* **A6**.



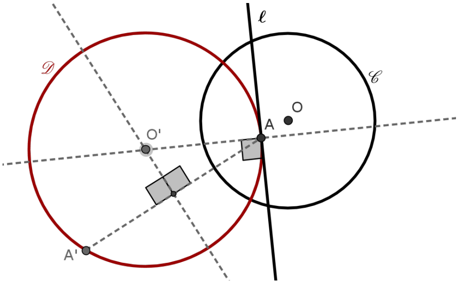
Axiomas A7 e A8

Proposição *O modelo de Poincaré $\mathcal{H}$ satisfaz os axiomas* **A7** *e* **A8**.

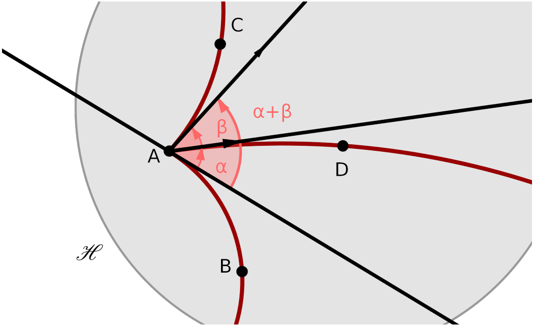


Seja $\mathcal{C}$ a circunferência de centro O e raio r.

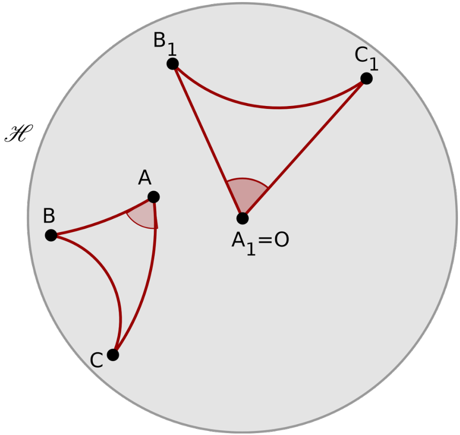
Proposição *Dada uma recta ℓ tal que $O \notin \ell$, e um ponto $A \in \ell$, existe uma única circunferência $\mathcal{D}$ tangente a ℓ no ponto A que é ortogonal a $\mathcal{C}$.*



Proposição *O modelo de Poincaré $\mathcal{H}$ satisfaz os axiomas* **A9** *e* **A10**.



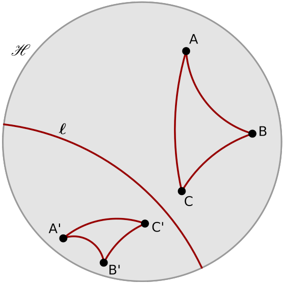
Proposição *O modelo de Poincaré $\mathcal{H}$ satisfaz o axioma* **A11**.



Proposição *Seja* $R : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *uma "reflexão". Dados três "pontos" não colineares* $A, B, C \in \mathcal{H}$, *então*

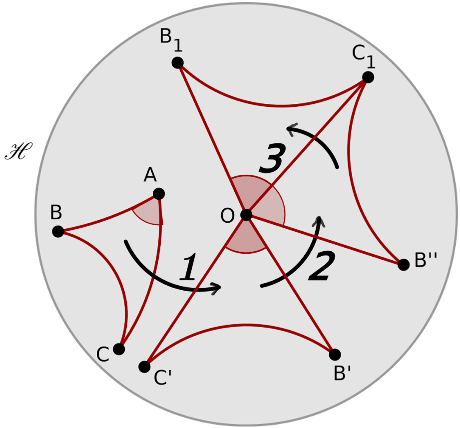
$$\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C' \ ,$$

onde $A' = R(A)$, $B' = R(B)$ *e* $C' = R(C)$.



Axioma A11

Proposição *O modelo de Poincaré* $\mathcal{H}$ *satisfaz o axioma* **A11**.



A Geometria Hiperbólica

Chama-se **Geometria Hiperbólica Abstracta** à teoria baseada nos axiomas **A1**-**A11**, e na negação do axioma **A12**.

Suponhamos *consistente* a Teoria de Conjuntos, contendo os Reais, onde temos estado a desenvolver a Geometria Euclideana via Axiomática de Edwin Moise.

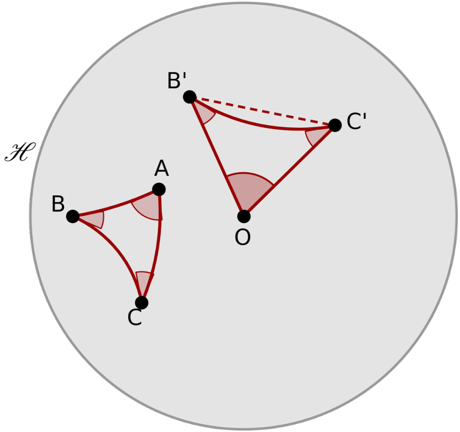
Teorema *A Geometria Hiperbólica Abstracta é uma teoria consistente.*

Prova. O modelo de Poincaré $\mathcal{H}$ satisfaz todos os axiomas da Geometria Hiperbólica Abstracta. $\square$

A Soma dos Ângulos dum Triângulo

No contexto da **Geometria Hiperbólica Abstracta** prova-se

Teorema *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor que* 180.



No contexto da **Geometria Hiperbólica Abstracta**,

Corolário *Dada uma recta* ℓ *e um ponto* $P \notin \ell$*, há pelo menos duas rectas paralelas a* ℓ *que passam pelo ponto* P*.*

Corolário *A soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero de forma convexa é menor que* 360*.*

Corolário **(Critério de Congruência AAA)**
Sejam ΔABC *e* ΔDEF *dois triângulos tais que* $\angle A \simeq \angle D$*,* $\angle B \simeq \angle E$ *e* $\angle C \simeq \angle F$*. Então* $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$*.*