GRUPOS DE LIE

1. Introdução

O conceito de grupo aparece pela primeira vez naquela que é hoje conhecida como a teoria de Galois, em honra do matemático francês Évariste Galois (1811-1832). Esta teoria versa sobre a resolubilidade de equações algébricas. Galois forneceu uma caracterização da resolubilidade por radicais duma equação polinomial em termos do grupo de simetria dessa equação.

Ainda no século XIX o matemático norueguês Sophus Lie (1842-1899) começou a estudar grupos contínuos, ou grupos de transformações, como simetrias de equações diferenciais. O seu objectivo era desenvolver para as equações diferenciais uma teoria análoga à teoria de Galois das equações algébricas. O nome do conceito abstracto 'Grupo de Lie' homenageia o trabalho sobre os grupos contínuos de Sophus Lie.

2. Transformações e Campos Vectoriais

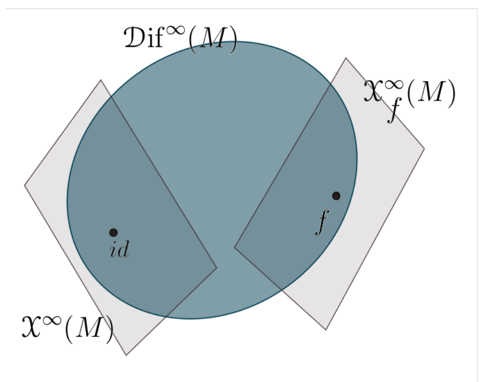
Seja M uma variedade diferenciável (de classe C^∞). O termo *transformação* será aqui usado como sinónimo de *difeomorfismo*. Consideremos os espaços

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(M) &= \{\, f : M \to \mathbb{R} \,:\, f \ \text{ é suave } \ C^\infty \,\}, \\ \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M) &= \{\, f : M \to M \,:\, f \ \text{ é um difeomorfismo } \ C^\infty \,\}, \\ \mathcal{X}^\infty(M) &= \{\, X \,:\, X \ \text{ é um campo vectorial suave tangente a } \ M \,\}. \end{aligned}$$

O primeiro destes espaços, $\mathcal{C}^\infty(M)$, é uma álgebra comutativa relativamente à multiplicação de funções, que claramente tem dimensão infinita. O segundo, $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, é um grupo e pode ser visto como uma variedade de dimensão infinita, não uma variedade de Banach mas uma variedade de Frechet[1]. De qualquer modo não iremos fazer uso desta estrutura de variedade nesta disciplina. O terceiro espaço, $\mathcal{X}^\infty(M)$, será uma *álgebra de Lie* em sentido a definir em baixo. Um campo vectorial tangente a M é uma secção do fibrado tangente TM, ou seja uma função suave que a cada ponto $p \in M$ associa um vector $X(p) \in T_pM$. Podemos pensar numa família de difeomorfismos $f_\lambda \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ como uma curva na variedade $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$. Supondo que $f_\lambda(p) = f(\lambda, p)$ é uma função

[1] Uma variedade de Banach, resp. Frechet, é uma variedade modelada num espaço de Banach, resp. Frechet, no sentido em que é localmente difeomorfa a um destes espaços.

de classe C^∞ nas duas variáveis (λ, p) e que $f_0 = id$ então $X(p) = \frac{df_\lambda}{d\lambda}(p)|_{\lambda=0}$ define um campo tangente a M. Neste sentido dizemos que o campo $X = \frac{df_\lambda}{d\lambda}|_{\lambda=0}$ é um 'vector' tangente à curva parametrizada f_λ no 'ponto' $f_0 = id$, pelo que é natural fazer a identificação $\mathcal{X}^\infty(M) = T_{id}\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$. Dado um difeomorfismo $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ chama-se *campo tangente a M ao longo de f* a uma função suave $p \mapsto X(p)$ que a cada ponto $p \in M$ associa um vector $X(p) \in T_{f(p)}M$, o que corresponde a pedir que X seja uma secção suave do fibrado pull-back f^*TM. Com esta definição temos que em geral $\frac{df_\lambda}{d\lambda}$ é um campo tangente a M ao longo de f_λ. Logo, designando por $\mathcal{X}^\infty_f(M)$ o espaço dos campos suaves tangentes a M ao longo de f, podemos identificar $\mathcal{X}^\infty_f(M) = T_f\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$. Observemos que dado $X \in \mathcal{X}^\infty(M)$, o campo $Y(p) = Df_pX(p)$ é tangente a M ao longo de f, i.e., $Y \in \mathcal{X}^\infty_f(M)$, e reciprocamente, dado $Y \in \mathcal{X}^\infty_f(M)$, o campo $X(p) = (Df_p)^{-1}Y(p)$ é tangente a M, i.e., $X \in \mathcal{X}^\infty(M)$.



Sem pretender usar qualquer forma de cálculo diferencial em dimensão infinita iremos várias vezes referir derivadas de funções definidas entre variedades de dimensão infinita num sentido formal que passamos a explicar. Consideremos uma função $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ entre duas variedades $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, e.g., $\mathcal{X}^\infty(M)$, $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ ou $\mathcal{L}(\mathcal{X}^\infty(M))$, este último representa a álgebra dos endomorfismos lineares do espaço $\mathcal{X}^\infty(M)$. Se para cada função suave $\lambda \mapsto f_\lambda \in \mathcal{M}$, interpretada como uma curva em $\mathcal{M}$, valer a igualdade

$$\frac{d}{d\lambda}\left[F(f_\lambda)\right] = B_{f_\lambda}\left(\frac{df_\lambda}{d\lambda}\right)$$

diremos que F tem *derivada formal* $DF_f\, u = B_f(u)$. É claro que, pela forma como está definida, esta derivada formal coincide com a derivada usual quando restringimos F a uma subvariedade de dimensão finita $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$.

Fixado um campo $X \in \mathcal{X}^\infty(M)$, nas álgebras de funções e campos vectoriais definem-se os seguintes operadores de derivação:

(1) *Derivada de Lie*: $D_X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ definida por $(D_X f)(p) := Df_p(X(p))$. É habitual escrever-se $L_X f$ ou $X(f)$ para designar esta derivada.
(2) *Derivada Afim*: $D_X : \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^\infty(M)$ definida por $(D_X Y)(p) := DY_p(X(p))$. Para definir esta derivada é necessário considerar em M uma conexão afim. Se a variedade M estiver mergulhada num espaço ambiente Euclideano, por exemplo $\mathbb{R}^n$, pode-se definir a derivada direccional $DY_p(X(p))$. O problema é que este vector está em $\mathbb{R}^n$ mas em geral não está em T_pM. Considerando em M a conexão afim (de Levi-Cività) associada à métrica Riemanniana induzida em M pela estrutura Euclideana ambiente, a derivada $(D_X Y)(p)$ corresponde à projecção ortogonal do vector $DY_p(X(p))$ sobre T_pM. Para o leitor não familiarizado com o conceito de conexão afim da Geometria Diferencial sugerimos que considere $M = \mathbb{R}^n$.
(3) *Derivada de Lie*: $L_X : \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^\infty(M)$ definida por $(L_X Y)(p) := DY_p(X(p)) - DX_p(Y(p)) = D_X Y(p) - D_Y X(p)$. O facto de se chamar a este operador derivada de Lie será justificado adiante. Esta derivada está bem definida quando $M = \mathbb{R}^n$ ou então se fixarmos em M uma conexão afim que nos permita usar as derivadas afins $D_X Y$ e $D_Y X$. Neste segundo caso prova-se que a derivada de Lie é independente da conexão escolhida. Um método alternativo, mais directo, consiste em definir a derivada de Lie $L_X Y$ em coordenadas, para depois mostrar que ela é independente do sistema de coordenadas usado. Esta independência segue duma fórmula de invariância da derivada de Lie dum campo de vectores que será assinalada adiante.

3. A Álgebra de Lie dos Campos Vectoriais

Chama-se *parêntesis de Lie* à seguinte operação sobre campos vectoriais

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}^\infty(M) \times \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^\infty(M)\ , \quad [X,Y] := L_Y X\ .$$

Proposição 1. *Quaisquer que sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, o parêntesis de Lie satisfaz as propriedades:*
(1) *É bilinear,* $[X+Y, Z] = [X,Z] + [Y,Z]$, $[\lambda\, X, Z] = \lambda\,[X,Z]$, *etc,*
(2) *É anti-simétrico,* $[X,Y] = -[Y,X]$,
(3) *Identidade de Jacobi:* $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$.

Prova. Exercício □

Chama-se *álgebra de Lie* a um espaço vectorial real ou complexo $\mathfrak{A}$ munido dum produto $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ que satisfaça as propriedades (1), (2), (3) da proposição 1. Mais precisamente, $\mathfrak{A}$ deve ser uma álgebra não associativa sobre um dos corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tal que quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathfrak{A}$,

(1) $[x, x] = 0$;
(2) $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$.

Um subconjunto $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ diz-se uma subálgebra de $\mathfrak{A}$ se for um subespaço vectorial de $\mathfrak{A}$ tal que $[\mathfrak{B}, \mathfrak{B}] = \{ [x, y] \,:\, x, y \in \mathfrak{B} \} \subseteq \mathfrak{B}$.

Exemplo 1. *Pela proposição 1, $\mathfrak{X}^\infty(M)$ é uma álgebra de Lie.*

Dado um espaço vectorial E real ou complexo, designamos por $\mathcal{L}(E)$ a álgebra dos operadores lineares em E.

Exemplo 2. *$\mathcal{L}(E)$ é uma álgebra de Lie com o produto $[A, B] = A \circ B - B \circ A$. $\mathcal{L}(E)$ é uma subálgebra de $\mathfrak{X}^\infty(E)$ porque quaisquer $A, B \in \mathcal{L}(E)$ são campos lineares em E tais que $D_B A = A \circ B$.*

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{A}$, chama-se *derivação em* $\mathfrak{A}$ a um endomorfismo $D \in \mathcal{L}(\mathfrak{A})$ tal que quaisquer que sejam $x, y \in \mathfrak{A}$, $D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$. Designa-se por $\mathcal{D}\mathrm{er}(\mathfrak{A})$ o espaço de todas as derivações em $\mathfrak{A}$.

Proposição 2. *Para qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{A}$, $\mathcal{D}\mathrm{er}(\mathfrak{A})$ é uma subálgebra de $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$.*

Prova. Exercício. □

Dadas duas álgebras de Lie $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ chama-se *homomorfismo* de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ a qualquer aplicação linear $L : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tal que $L([x, y]) = [L(x), L(y)]$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathfrak{A}$.

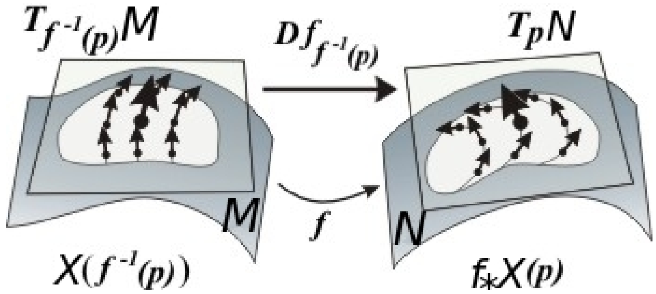
Proposição 3. *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra não associativa com uma multiplicação anti-simétrica. Definindo a aplicação linear $L : \mathfrak{A} \to \mathcal{L}(\mathfrak{A})$, $L_x(y) := [y, x]$, são equivalentes as propriedades:*
(1) *A identidade de Jacobi é válida em $\mathfrak{A}$,*
(2) *Para todo o $x \in \mathfrak{A}$, $L_x : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ é uma derivação,*
(3) *A aplicação $L : \mathfrak{A} \to \mathcal{L}(\mathfrak{A})$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

Prova. Exercício. □

Verificaremos adiante que a derivada de Lie L_X é em certo sentido uma derivada, o que em particular implicará que é uma derivação em $\mathfrak{X}^\infty(M)$. Da proposição 3 segue então que a aplicação $L : \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathcal{D}\mathrm{er}(\mathfrak{X}^\infty(M))$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, que se diz a *representação adjunta* da álgebra $\mathfrak{X}^\infty(M)$ e é denotada por $\mathrm{ad} : \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathcal{D}\mathrm{er}(\mathfrak{X}^\infty(M))$. Esta proposição também nos dá uma prova alternativa de que $\mathfrak{X}^\infty(M)$ é de facto uma álgebra de Lie.

4. Representação Adjunta do Grupo de Difeomorfismos

Dado um difeomorfismo $f : M \to N$ de classe C^∞ define-se o operador *push-forward* $f_* : \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^\infty(N)$ por $(f_*X)(p) := Df_{f^{-1}(p)}X(f^{-1}(p))$.



Proposição 4. *A operação pushforward* $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M) \times \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^\infty(M)$, $(f, X) \mapsto f_*X$, *satisfaz as propriedades:*

(1) $id_*X = X$,
(2) $f_*(g_*X) = (f \circ g)_*X$
(3) $f_*(X + Y) = f_*X + f_*Y$,
(4) $f_*(\lambda X) = \lambda f_*X$,
(5) $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$,

quaisquer que sejam $f, g \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova. Vamos apenas provar a propriedade (5), no caso em que $M = \mathbb{R}^n$. Sejam $\widetilde{X}(p) := (f_*X)(p) = Df_{f^{-1}(p)}X(f^{-1}(p))$ e $\widetilde{Y}(p) := (f_*Y)(p) = Df_{f^{-1}(p)}Y(f^{-1}(p))$. Consideremos a aplicação bilinear $\mathrm{av} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{av}(A, v) = A(v)$. Como $\widetilde{X}(p) = \mathrm{av}\left(Df_{f^{-1}(p)}, X(f^{-1}(p)) \right)$, pela regra de Leibnitz,

$$\begin{aligned} D\widetilde{X}_p(v) &= \mathrm{av}\left(D(Df)_{f^{-1}(p)} \circ Df_p^{-1}(v), X(f^{-1}(p)) \right) + \mathrm{av}\left(Df_{f^{-1}(p)}, DX_p(Df_p^{-1}(v)) \right) \\ &= D^2 f_{f^{-1}(p)} \left(Df_p^{-1}(v), X(f^{-1}(p)) \right) + Df_{f^{-1}(p)}(DX_p(Df_p^{-1}(v))) \end{aligned}$$

o que implica

$$D_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}(p) = D^2 f_{f^{-1}(p)} \left(Y(f^{-1}(p)), X(f^{-1}(p)) \right) + Df_{f^{-1}(p)}(D_Y X(f^{-1}(p))) \, .$$

Analogamente

$$D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}(p) = D^2 f_{f^{-1}(p)} \left(X(f^{-1}(p)), Y(f^{-1}(p)) \right) + Df_{f^{-1}(p)}(D_X Y(f^{-1}(p))) \, .$$

Logo, porque $Df^2_{f^{-1}(p)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação bilinear simétrica,

$$\begin{aligned}[f_*X, f_*Y](p) &= [\widetilde{X}, \widetilde{Y}](p) = D_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}(p) - D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}(p) \\ &= Df_{f^{-1}(p)}(D_Y X(f^{-1}(p))) - Df_{f^{-1}(p)}(D_X Y(f^{-1}(p))) \\ &= Df_{f^{-1}(p)}([X,Y](f^{-1}(p))) = (f_*[X,Y])(p) \ .\end{aligned}$$

No caso geral em que M é uma variedade, a propriedade de invariância (5) reduz-se em coordenadas locais à propriedade que acabámos de verificar. $\square$

Interpretando f como uma mudança de coordenadas, a propriedade de invariância (5) garante a consistência duma definição em coordenadas locais do parêntesis de Lie $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}^\infty(M) \times \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^\infty(M)$.

Chama-se *acção* dum grupo G num espaço M a uma aplicação $m : G \times M \to M$, $m(g,p) = g \cdot p$ satisfazendo:

(1) $1 \cdot p = p$,
(2) $g \cdot (h \cdot p) = (g\,h) \cdot p$,

quaisquer que sejam $g, h \in G$, $p \in M$, em que 1 denota o elemento neutro do grupo G. Designando por $\mathrm{S}(M)$ o grupo das bijecções de M em M, a acção $m : G \times M \to M$ determina um homomorfismo de grupos $\rho : G \to \mathrm{S}(M)$ definido por $\rho(g)\,p = g \cdot p$, que se diz uma *representação* de G em M. Estes dois conceitos, de acção e de representação são equivalentes entre si.

Se E for um espaço linear real ou complexo, dizemos que uma acção de G em E é *linear* sse para todo o $g \in G$, a aplicação $\rho(g) : E \to E$, $v \mapsto g \cdot v$, for linear. Neste caso $\rho : G \to \mathrm{Aut}(E)$ é um homomorfismo sobre o grupo dos automorfismos do espaço linear E. Um tal homomorfismo diz-se uma *representação linear* de G em E. De novo, o conceito de acção linear de G em E equivale ao de representação linear de G em E.

À luz destes conceitos as propriedades (1) e (2) da proposição 4 dizem-nos que a operação de push-forward $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M) \times \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^\infty(M)$ é uma acção do grupo $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ no espaço $\mathfrak{X}^\infty(M)$. As propriedades (3) e (4) garantem que esta acção é linear. Finalmente, a propriedade de invariância (5) diz-nos que para cada $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ a acção $f_* : \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^\infty(M)$ é um automorfismo da álgebra de Lie $\mathfrak{X}^\infty(M)$. Esta acção determina uma representação linear de $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ no espaço $\mathfrak{X}^\infty(M)$, que se diz a *representação adjunta* do grupo $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ e denota por $\mathrm{Ad} : \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{X}^\infty(M))$, $\mathrm{Ad}(f)\,X = f_*X$.

5. A Aplicação Exponencial

Chama-se *fluxo completo* em M a uma aplicação suave $\phi : \mathbb{R}\times M \to M \quad (t,p) \mapsto \phi^t(p)$ que satisfaça, quaisquer que sejam $t, s \in \mathbb{R}$,

(1) $\phi^0 = id_M$,
(2) $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$.

Dizemos que um campo $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ é um gerador infinitesimal do fluxo ϕ^t quando $\frac{d}{dt}\phi^t(p) = X \circ \phi^t(p)$ quaisquer que sejam $p \in M$, $t \in \mathbb{R}$. Da teoria das equações diferenciais ordinárias, sendo M uma variedade compacta, cada campo $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ determina um fluxo completo que será aqui denotado por ϕ_X^t. Em geral, quando M não é compacta, o campo X determina um fluxo incompleto em que as transformações ϕ^t não são difeomorfismos globais. Para $M = \mathbb{R}^n$, o subespaço $\mathfrak{X}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ dos campos vectoriais $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ com todas as derivada de ordem ≥ 1 limitadas, é uma subálgebra de $\mathfrak{X}^\infty(M)$ cujos campos sempre geram fluxos completos. A propriedade (2) (lei de grupo) do fluxo ϕ_X^t traduz o facto deste fluxo estar associado a uma equação autónoma $\dot{x} = X(x)$.

Proposição 5. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $\frac{d}{dt}(Y \circ \phi_X^t) = (D_X Y) \circ \phi_X^t$.*

Prova.

$$\frac{d}{dt}(Y \circ \phi_X^t)(p) = DY_{\phi_X^t(p)} \frac{d}{dt}\phi_X^t(p) = DY_{\phi_X^t(p)} X(\phi_X^t(p)) = (D_X Y) \circ \phi_X^t(p)$$

□

Corolário 1. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $n \in \mathbb{N}$, $\frac{d^n}{dt^n}(Y \circ \phi_X^t) = ((D_X)^n\, Y) \circ \phi_X^t$.*

Corolário 2. *Dado $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, o desenvolvimento de Taylor de ϕ_X^t em $t = 0$ é*

$$\phi_X^t \sim id + tX + \frac{t^2}{2}\, D_X X + \ldots = id + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(D_X)^{n-1}\, X\ . \tag{1}$$

Se M for uma variedade compacta analítica e $X \in \mathfrak{X}^\omega(M)$ for um campo analítico a série acima é convergente com raio de convergência infinito. Vale a igualdade $\phi_X^t = id + tX + \frac{t^2}{2}\, D_X X + \ldots$. O mesmo vale para campos analíticos em $\mathfrak{X}_b^\omega(\mathbb{R}^n)$. Em particular para campos lineares $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathfrak{X}_b^\omega(\mathbb{R}^n)$. Neste último caso tem-se

$$\phi_X^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n = e^{tX}\ .$$

Define-se a *aplicação exponencial* $\exp : \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ pondo $\exp(X) = \phi_X^1$. Analogamente, para $M = \mathbb{R}^n$ podemos definir $\exp : \mathfrak{X}_b^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

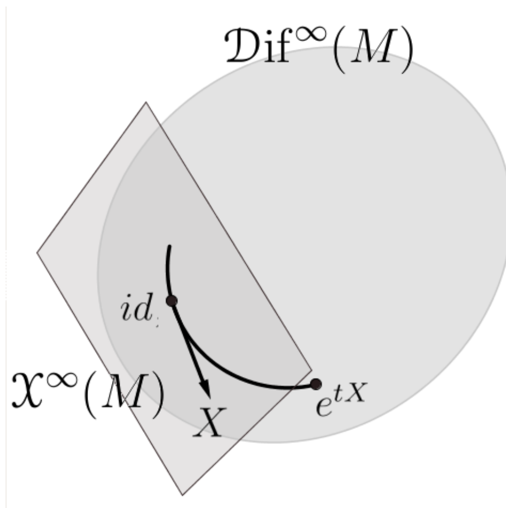
$\exp(X) = \phi_X^1$. Iremos usar a notação exponencial $\exp(tX) = e^{tX}$ para denotar o fluxo ϕ_X^t do campo X. Porque e^{tX} representa o fluxo gerado pelo campo X valem as seguintes propriedades.

Proposição 6. *Dado $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, quaisquer que sejam $t, s \in \mathbb{R}$,*

(1) $e^{0X} = id$,
(2) $e^{(t+s)X} = e^{tX} \circ e^{sX}$,
(3) $\frac{d}{dt} e^{tX} = X \circ e^{tX} = D(e^{tX})X$.

Prova. Para a segunda igualdade de (3) calcule $\frac{d}{ds}(e^{tX} \circ e^{sX})_{s=0}$. □

O fluxo e^{tX} dum campo de vectores $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ é uma curva especial no grupo variedade $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$. Definindo $f : \mathbb{R} \to \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, $f_t = e^{tX}$, f é um homomorfismo de grupos, e como tal $f_0 = id$. É habitual enfatizar este facto referindo $f_t = e^{tX}$ como um grupo a um parâmetro de difeomorfismos. O campo X é o 'vector' tangente $X = \frac{df_t}{dt}|_{t=0}$ à curva f_t no instante $t = 0$.



A proposição seguinte justifica o uso do nome *derivada de Lie segundo o campo* Y para o operador $L_Y(X) = [X, Y]$.

Proposição 7. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$,*

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\left((e^{tY})_* X\right)_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{(e^{tY})_* X - X}{t} \,.$$

Prova. Consideramos apenas o caso em que $M = \mathbb{R}^n$ ao qual se reduz, passando a coordenadas locais, o caso geral onde M é uma variedade. Usando a bilinearidade da aplicação avaliação temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left((e^{tX})_*Y\right)_{t=0}(p) &= \frac{d}{dt}\left(D(e^{tX})_{e^{-tX}p}Y(e^{-tX}p)\right)_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(D(e^{tX})_{e^{-tX}p}\right)_{t=0}Y(p) + \frac{d}{dt}\left(Y(e^{-tX}p)\right)_{t=0}\end{aligned}$$

Para calcular a primeira parcela define-se $\xi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ pondo $\xi(t,p) = D(e^{tX})_p$. Temos $\xi(0,p) = I$, $\frac{\partial \xi}{\partial x}(0,p) = 0$, $\frac{\partial \xi}{\partial t}(0,p) = DX_p$ e

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(D(e^{tX})_{e^{-tX}p}\right)_{t=0} &= \frac{d}{dt}\xi(t, e^{-tX}p)_{t=0} \\ &= \frac{\partial \xi}{\partial t}(0,p) + \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}(0,p)}_{=0}(-X(p)) = DX_p\ .\end{aligned} \tag{2}$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\left(D(e^{tX})_{e^{-tX}p}\right)_{t=0}Y(p) = (D_Y X)(p)\ .$$

Por outro lado

$$\frac{d}{dt}\left(Y(e^{-tX}p)\right)_{t=0} = DY_p\left(\frac{d}{dt}e^{-tX}p\right)_{t=0} = DY_p(-X(p)) = -(D_X Y)(p)\ . \tag{3}$$

Somando (2) e (3) obtemos

$$\frac{d}{dt}\left((e^{tY})_*X\right)_{t=0} = (D_Y X)(p) - (D_X Y)(p) = [X,Y](p)\ .$$

□

Notamos que a derivada de Lie do campo X segundo Y difere da derivada de X ao longo do fluxo e^{tY} de Y, que é simplesmente a derivada afim.

$$\lim_{t\to 0}\frac{(De^{tY})_p X(p) - X(p)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{X(e^{tY}p) - X(p)}{t} = \frac{d}{dt}\left\{X(e^{tY}p)\right\}_{t=0} = (D_Y X)(p)\ .$$

Pelo contrário, na definição da derivada de Lie do campo X segundo Y empurramos X pelo fluxo e^{tY}, para obter a família de campos $(e^{tY})_*X$ em $\mathcal{X}^\infty(M)$ e definimos depois $L_Y X = \frac{d}{dt}\left\{(e^{tY})_*X\right\}_{t=0}$.

Observação 1. *A fórmula da proposição anterior pode ser interpretada como a expressão da derivada da representação* $\mathrm{Ad} : \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{X}^\infty(M))$ *no elemento neutro do grupo* $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$*,*

$$D\mathrm{Ad}_{id}(X)(Y) = [X,Y]\ .$$

Corolário 3. *Para cada $Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $L_Y : \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^\infty(M)$ é uma derivação da álgebra de Lie $\mathfrak{X}^\infty(M)$.*

Prova. Regra de leibnitz. $\square$

Proposição 8. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$,*

$$\frac{d}{dt}\left\{(e^{tY})_* X\right\} = (e^{tY})_*[X,Y] = [(e^{tY})_* X, Y] \ .$$

Prova. Calculando a derivada $\frac{d}{ds}[\cdot]_{s=0}$ da função $(e^{(t+s)Y})_* X = (e^{tY})_*(e^{sY})_* X$ obtemos $\frac{d}{dt}\left\{(e^{tY})_* X\right\}$ derivando o lado esquerdo, e $(e^{tY})_*[X,Y]$ se derivarmos o lado direito. A segunda igualdade resulta de se ter $(e^{tY})_* Y = Y$, o que segue facilmente de e^{tY} ser o fluxo do campo Y. $\square$

Exercício 1. *Dados $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, mostre que*

(1) $[X,Y] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{tX} \circ e^{sY} = e^{sY} \circ e^{tX}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$,
(2) $f_* X = X \quad \Leftrightarrow \quad e^{tX} \circ f = f \circ e^{tX}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Corolário 4. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$,*

$$\frac{d^n}{dt^n}\left\{(e^{tY})_* X\right\} = [[\cdots[[(e^{tY})_* X, Y], Y], \cdots], Y] = \mathrm{ad}(Y)^n \left((e^{tY})_* X\right) \ .$$

Prova. Basta iterar a fórmula de derivação da proposição anterior. $\square$

Proposição 9. *Dados $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$,*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}(f)\, X = \frac{d}{dt}\left(f \circ e^{t\,X} \circ f^{-1} \right)|_{t=0} \ , \\ &e^{\mathrm{Ad}(f)\, X} = f \circ e^{X} \circ f^{-1} \ . \end{aligned}$$

Prova. Por definição, $\mathrm{Ad}(f)\, X = f_* X$. A regra da cadeia permite mostrar que o membro esquerdo na primeira igualdade também é igual a $f_* X = (D f_{f^{-1}}) X \circ f^{-1}$. Para mostrar que $e^{t\,\mathrm{Ad}(f)\, X} = f \circ e^{t\,X} \circ f^{-1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, observemos que ambos os lados representam fluxos em M. A igualdade dos fluxos segue dos respectivos geradores infinitésimais serem iguais.

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t\,\mathrm{Ad}(f)\, X} \right)|_{t=0} = \mathrm{Ad}(f)\, X = \frac{d}{dt}\left(f \circ e^{t\,X} \circ f^{-1} \right)|_{t=0} \ .$$

$\square$

Dadas duas acções dum grupo G sobre espaços M e M', dizemos que uma aplicação $h : M \to M'$ é *G-equivariante* sse $h(g\,p) = g\,h(p)$, quaisquer que sejam $g \in G$, $p \in M$. Pela proposição anterior

Observação 2. *A aplicação* $\exp : \mathcal{X}^\infty(M) \to \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ *é* $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$*-equivariante para a acção interior em* $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, $* : \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M) \times \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M) \to \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, $f_* g := f \circ g \circ f^{-1}$.

Proposição 10. *Dados* $X, Y \in \mathcal{X}^\infty(M)$ *vale o seguinte desenvolvimento assimptótico*

$$\mathrm{Ad}(e^{tY})X \sim e^{t\mathrm{ad}(Y)}X \quad (t \to 0) ,$$

onde a exponencial no lado direito representa a série formal $\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{ad}(Y)^n X$.

Prova. Consideremos a função $\varphi(t) = \mathrm{Ad}(e^{tY})X = (e^{tY})_* X$ com valores em $\mathcal{X}^\infty(M)$. Pelo corolário acima $\varphi^{(n)}(0) = \mathrm{ad}(Y)^n X$. Logo $\varphi(t)$ admite em $t = 0$ o desenvolvimento de Taylor

$$(e^{tY})_* X = \varphi(t) \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{ad}(Y)^n X = e^{t\mathrm{ad}Y} X \ .$$

$\square$

Vamos agora discutir algumas condições em que vale a igualdade

$$\mathrm{Ad}(e^{tY})X = e^{t\mathrm{ad}(Y)}X \ . \tag{4}$$

Comecemos por observar que tanto o lado esquerdo como o direito satisfazem leis de grupos. Por exemplo, $\mathrm{Ad}(e^{(t+s)Y}) = \mathrm{Ad}(e^{(tY})\mathrm{Ad}(e^{sY})$ porque Ad é um homomorfismo de grupos. O problema da convergência da série $e^{t\mathrm{ad}(Y)} = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{ad}(Y)^n$ provém de $\mathcal{X}^\infty(M)$ ser uma álgebra de dimensão infinita sem uma estrutura natural de espaço de Banach. Este problema pode ser contornado quando existe uma subálgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g} \subset \mathcal{X}^\infty(M)$ que contenha os campos X e Y. Neste caso, por restrição, podemos considerar que a álgebra de dimensão finita $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ contém o operador $\mathrm{ad}(Y)$, e que o grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, com dimensão finita, contém $\mathrm{Ad}(e^{tY})$. Isto resolve o problema da convergência da série da exponencial $e^{t\mathrm{ad}(Y)}$ em $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$. A igualdade vale porque $\mathrm{Ad}(e^{tY})$ e $e^{t\mathrm{ad}(Y)}$ são soluções do mesmo problema de valor inicial

$$\Phi'(t) = \mathrm{ad}(Y) \circ \Phi(t), \quad \Phi(0) = I ,$$

na álgebra de dimensão finita $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Um caso particular em que estas considerações se aplicam é o da subálgebra de Lie $\mathcal{L}(E) \subset \mathcal{X}^\infty(E)$ dos campos lineares num espaço vectorial de dimensão finita E. Mais geralmente, pode se provar que vale a igualdade (4) quando M é uma variedade analítica compacta e $X, Y \in \mathcal{X}^\omega(M)$ são campos analíticos, ou ainda quando $M = \mathbb{R}^n$ e $X, Y \in \mathfrak{X}_b^\omega(\mathbb{R}^n)$ são campos analíticos com derivadas de ordem ≥ 1 limitadas.

6. Derivada da Aplicação Exponencial

Consideremos a função inteira (analítica) $\eta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\eta(z) = \int_0^1 e^{-tz}\, dt \ .$$

Esta função pode igualmente ser definida por

$$\frac{1 - e^{-z}}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\, z^n \ ,$$

tendo esta série raio de convergência infinito. Copiando a expressão usada na definição de η podemos definir uma transformação não linear $\eta : \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathcal{L}(\mathfrak{X}^\infty(M))$ por

$$\eta(X)\, Y = \int_0^1 (e^{-tX})_* Y \, dt \ .$$

Proposição 11. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$,*

$$D \exp_X(Y) = (De^X)\eta(X)\, Y \ .$$

Mais precisamente, dada uma família suave $X_s(p) = X(s,p)$ de campos vectoriais $X_s \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ vale a igualdade

$$\frac{d}{ds}\left[e^{X_s} p\right] = (De^{X_s})_p \left\{\eta(X_s)\, \frac{dX}{ds}\right\}(p) \ .$$

Prova. Definimos a seguinte família a dois parâmetros de campos em $\mathfrak{X}^\infty(M)$

$$V(t,s)(p) = V(t,s,p) := \left(De^{tX_s}\right)_p^{-1} \frac{d}{ds}\left[e^{tX_s} p\right] \ .$$

Iremos mostrar que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (e^{-tX_s})_* \frac{\partial X}{\partial s} \ . \tag{5}$$

Como $V(0,s,p) = 0$ resulta então que

$$V(1,s) = \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial t}\, dt = \int_0^1 (e^{-tX_s})_* \frac{\partial X}{\partial s}\, dt = \eta(X_s) \frac{\partial X}{\partial s} \ .$$

Logo
$$\frac{d}{ds}\left[e^{X_s}p\right] = (De^{X_s})_p V(1,s)(p) = (De^{X_s})_p \left\{\eta(X_s)\frac{\partial X}{\partial s}\right\}(p)\ .$$
Para provar (5) consideramos apenas o caso em que $M = \mathbb{R}^n$ ao qual se reduz, passando a coordenadas locais, o caso geral onde M é uma variedade. Porque e^{tX} é o fluxo gerado pelo campo X temos
$$\frac{d}{dt}\left(De^{tX}\right) = \left(De^{tX}\right)\circ DX = (DX)_{e^{tX}}\circ\left(De^{tX}\right)\ .$$
Por outro lado, usando a fórmula de derivação para funções matriciais
$$\frac{d}{dt}A^{-1} = -A^{-1}\left(\frac{d}{dt}A\right)A^{-1}$$
obtemos que
$$\frac{d}{dt}\left(De^{tX}\right)^{-1} = -DX\circ\left(De^{tX}\right)^{-1}\ .$$
Logo
$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t}(t,s) &= \frac{d}{dt}\left(De^{tX_s}\right)^{-1}\frac{d}{ds}\left[e^{tX_s}\right] + \left(De^{tX_s}\right)^{-1}\frac{d}{ds}\frac{d}{dt}\left[e^{tX_s}\right] \\ &= -(DX_s)\left(De^{tX_s}\right)^{-1}\frac{d}{ds}\left[e^{X_s}\right] + \left(De^{tX_s}\right)^{-1}\frac{d}{ds}\left[X_s\circ e^{tX_s}\right] \\ &= \underbrace{-(DX_s)\left(De^{tX_s}\right)^{-1}\frac{d}{ds}\left[e^{X_s}\right] + \left(De^{tX_s}\right)^{-1}(DX_s)_{e^{tX_s}}\frac{d}{ds}\left[e^{tX_s}\right]}_{=0} + \\ &\qquad + \left(De^{tX_s}\right)^{-1}\frac{dX}{ds}e^{tX_s} = (e^{-tX_s})_*\frac{dX}{ds}\ .\end{aligned}$$

□

Teorema 1 (Teoria Espectral)**.** *Sejam E um espaço vectorial real ou complexo de dimensão finita e $A \in \mathcal{L}(E)$ um endomorfismo linear de E com espectro (valores próprios) $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}$. Seja $\varphi(z)$ uma função holomórfica definida como soma da série de potências $\varphi(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ no disco $|z-z_0| < R$. Supondo que $\|A - z_0 I\| < R$ então*

1. *A série $\sum_{n=0}^\infty a_n\,(A - z_0\,I)^n$ converge absolutamente,*
2. *Os valores próprios de A satisfazem $|\lambda_i - z_0| < R$, para cada $i = 1,\dots,n$,*
3. *Definindo $\varphi(A) = \sum_{n=0}^\infty a_n\,(A - z_0\,I)^n$ este endomorfismo tem exactamente os valores próprios $\varphi(\lambda_1),\dots,\varphi(\lambda_n)$,*

(4) *As matrizes A e $\varphi(A)$ têm os mesmos espaços próprios, i.e.,* $\operatorname{Nuc}[A-\lambda I] = \operatorname{Nuc}[\varphi(A)-\varphi(\lambda)I]$, *qualquer que seja* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Prova. Por hipótese a série complexa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ tem raio de convergência $\geq R$. Suponhamos que $\|A - z_0 I\| < R$. O item (1) resulta das desigualdades

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\,(A-z_0 I)^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\;\|A-z_0 I\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\;R^n < \infty\ .$$

Se $|\lambda - z_0| \geq R$ então λ não é valor próprio de A porque o endomorfismo

$$A-\lambda I = (A-z_0 I)-(\lambda-z_0)I = (z_0-\lambda)\,[I - \underbrace{(\lambda-z_0)^{-1}(A-z_0 I)}_{\|\cdot\|<1}]$$

é invertível. Logo todo o espectro de A está contido no disco $|z-z_0| < R$, o que prova (2). Finalmente, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio de A existe um vector no complexificado [2] $v \in E_{\mathbb{C}}$ tal que $A\,v = \lambda v$. Logo $(A-z_0 I)^n v = (\lambda - z_0)^n v$, o que implica

$$\begin{aligned}\varphi(A)\,v &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(A-z_0\,I)^n\;v\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\lambda-z_0)^n\;v = \varphi(\lambda)\,v\ ,\end{aligned}$$

ou seja que $\varphi(\lambda)$ é um valor próprio de A. □

Pelo teorema anterior podemos definir $\eta(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\,A^n$ para qualquer endomorfismo $A \in \mathcal{L}(E)$ num espaço E de dimensão finita.

Suponhamos agora que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}^\infty(M)$ é uma subálgebra de Lie com dimensão finita. Dado um campo $X \in \mathfrak{g}$, por restrição $\mathrm{ad}X$ induz um endomorfismo em $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, pelo que $\eta(\mathrm{ad}X)$ está definido em $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Por definição de η e usando (4) temos, quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\eta(X)\,Y = \int_0^1 \mathrm{Ad}(e^{-tX})Y\,dt = \int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ad}X}Y\,dt = \eta(\mathrm{ad}X)\,Y\ .$$

Neste contexto podemos reformular a proposição 11: quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$D\exp_X(Y) = (De^X)\,\eta(\mathrm{ad}X)\,Y\ . \tag{6}$$

[2] Se E é um espaço real, $E_{\mathbb{C}} = E \oplus i\,E$ denota o complexificado de E. Quando E for complexo consideramos $E_{\mathbb{C}} = E$.

7. Injectividade e Sobrejectividade Local da Exponencial

A aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{Dif}^\infty(M)$ não é um difeomorfismo local porque não é localmente sobrejectiva. Por exemplo

Proposição 12. *Se M for uma superfície munida duma forma de área ω existem transformações $f \in \mathfrak{Dif}^\infty(M)$ próximas da identidade, que preservam área, i.e., $f^*\omega = \omega$, e que não correspondem ao tempo-1 do fluxo de nenhum campo $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$.*

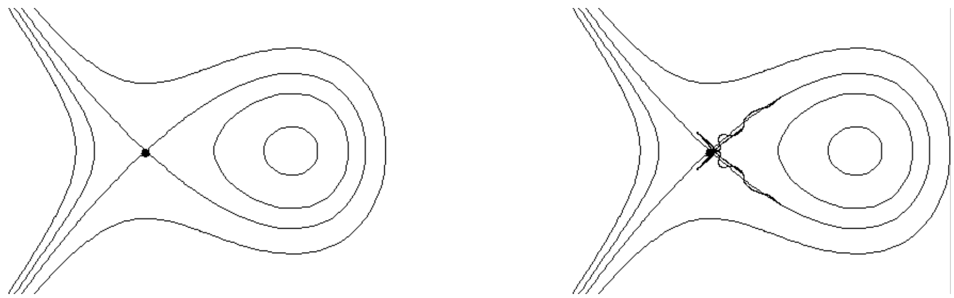
Diz-se que um campo tem *divergência zero* quando for nula a sua derivada de Lie, i.e., $L_X\omega := \frac{d}{dt}\left((e^{tX})^*\omega\right)_{t=0} = 0$. Porque M tem dimensão 2, os campos com divergência nula são precisamente os campos Hamiltonianos para a estrutura simpléctica ω. Se X tem divergência zero então $\frac{d}{dt}\left((e^{tX})^*\omega\right) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que implica que $(e^{tX})^*\omega = \omega$, e portanto que $f_t = e^{tX}$ é uma transformação que preserva a forma de área ω. Reciprocamente, também é válido que se $f = e^X$ preserva a forma de área ω então o campo X tem divergência zero. Observemos que o espaço das 2-formas lineares em cada plano T_pM tem dimensão 1. Logo, existe uma função suave $\alpha : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ tal que $(e^{tX})^*\omega = \alpha(t,\cdot)\,\omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A qualidade de grupo a um parâmetro da isotopia e^{tX} traduz-se em $\alpha(0,\cdot) = 1$ e $\alpha(t+s,\cdot) = \alpha(t,\cdot)\,\alpha(s,\cdot)$, quaisquer que sejam $t, s \in \mathbb{R}$. Logo existe uma função $\lambda \in C^\infty(M)$ tal que $\alpha(t,\cdot) = e^{t\lambda}$. Assumindo agora que $f = e^X$ preserva ω temos $e^\lambda = \alpha(1,\cdot)$ é constante igual a 1, e portanto que λ é a função nula. Segue que $(e^{tX})^*\omega = \omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que, por derivação, implica que X tenha divergência nula. Toda a singularidade $X(p) = 0$ do campo X corresponde a um ponto fixo $f(p) = p$ da transformação $f = e^X$. A singularidade p de X diz-se uma *sela* quando $DX_p : T_pM \to T_pM$ tiver dois valores próprios reais, um positivo e outro negativo. Isto corresponde à derivada $Df_p : T_pM \to T_pM$ no ponto fixo $f(p) = p$ ter dois valores próprios reais positivos, um > 1 e outro < 1. A toda a sela $p = f(p)$ do difeomorfismo f estão associadas duas curvas, chamadas respectivamente *variedade estável* e *variedade instável* de p, formadas pelos pontos que por iteração da transformação f tendem assintóticamente a p, respectivamente para tempos futuros e tempos passados. Estas variedades são caracterizadas por

$$W^s(p) = \{\, x \in M \,:\, \lim_{n\to+\infty} f^n(x) = p \,\}\,,$$
$$W^u(p) = \{\, x \in M \,:\, \lim_{n\to+\infty} f^{-n}(x) = p \,\}\,.$$

No caso dum campo X as definições das variedades estável e instável são

$$W^s(p) = \{\, x \in M \,:\, \lim_{t\to+\infty} e^{tX}(x) = p, \,\}\,,$$
$$W^u(p) = \{\, x \in M \,:\, \lim_{t\to+\infty} e^{-tX}(x) = p \,\}\,.$$

Os pontos na intersecção $W^s(p) \cap W^u(p) - \{p\}$ dizem-se pontos *homoclínicos*. Para campos vectoriais $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ esta intersecção é formada por uma ou duas órbitas (curvas) bi-assintóticas à sela p, a que é costume chamar *conexões homoclínicas*. Já para um difeomorfismo $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ as intersecções em $W^s(p) \cap W^u(p) - \{p\}$ são tipicamente transversais, o que acarreta uma enorme complexidade da dinâmica, percebida pela primeira vez há mais de cem anos por H. Poincaré. Logo, nenhum difeomorfismo $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ em que $W^s(p) \cap W^u(p) - \{p\}$ contenha intersecções transversais pode ser da forma $f = e^X$. A figura em baixo à esquerda representa o retrato de fases local dum campo Hamiltoniano $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ numa superfície M.



Tomando $\epsilon > 0$ pequeno, o campo $Y_\epsilon := \epsilon X$ e a transformação $g_\epsilon := e^{Y_\epsilon}$ têm o mesmo retrato de fases local que X. Se agora $f_\epsilon \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ for uma pequena mas típica perturbação de g_ϵ teremos f_ϵ perto da identidade com um retrato de fases como o da figura em cima à direita, em que a sela p de f_ϵ admite pontos homoclínicos transversais. Logo f_ϵ está próximo da identidade mas não é exponencial de nenhum campo em $\mathfrak{X}^\infty(M)$.

Apesar de não ser sobrejectiva a exponencial, toda a isotopia suave $f_t \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ com $f_0 = id$ é tangente com ordem de contacto infinita à subvariedade $\exp[\mathfrak{X}^\infty(M)]$. Este facto traduz uma espécie de sobrejectividade a um nível formal.

Proposição 13. *Dada uma isotopia suave $f_t \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ com $f_0 = id$ existe uma família suave de campos vectoriais $X_t \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ tal que $e^{t X_t}$ tem o mesmo jacto infinito em $t = 0$ que a família f_t.*

Prova. Vamos fazer a prova no caso $M = \mathbb{R}^n$. O caso geral reduz-se a este tomando um atlas finito e uma partição da unidade subordinada aos domínios dos sistemas de coordenadas nesse atlas. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $F_n = \frac{d^n f_t}{dt^n}|_{t=0}$, de modo que vale o desenvolvimento assintótico em $t = 0$

$$f_t \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} F_n \, .$$

Consideremos um campo de vectores formal representado através da seguinte série formal

$$X_t \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X_n$$

nas incógnitas X_0, X_1, $\cdots$, X_n, $\cdots$ cujos valores serão determinados em $\mathcal{X}^\infty(M)$. Seja $e^{s\,X_t}$ o desenvolvimento formal em $s=0$ do fluxo do campo X_t determinado em (1). Fazendo $t=s$ podemos calcular o desenvolvimento de Taylor em $t=0$,

$$e^{t\,X_t} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Y_n \ ,$$

onde cada coeficiente Y_n representa um campo de vectores em $\mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$, que pode ser explicitamente representado em função das incógnitas X_i,

$$Y_n = Y_n(X_0, \cdots, X_{n-1}) \ .$$

Vamos mostrar que o sistema de equações lineares

$$Y_n(X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}) = F_n \ , \quad n = 0, 1, \cdots \tag{7}$$

tem uma solução única $(X_0, X_1, \cdots) \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$. A existência e unicidade de solução em $\mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ resulta de cada Y_n depender de X_{n-1} da seguinte maneira invertível:

$$Y_n(X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}) = n\,X_{n-1} + Z_n(X_0, X_1, \cdots, X_{n-2})$$

o que mostra que a sequência de incógnitas pode ser determinada recursivamente a partir do sistema de equações (7). Substituindo X por $X_t = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} X_r$ em (1) obtemos

$$\begin{aligned} e^{t\,X_t} &\sim id + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} X_{n-1} + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_k=0}^{\infty} \frac{t^{r_1+\cdots+r_k+k}}{r_1! \cdots r_k!\, k!} D_{X_{r_1}} \cdots D_{X_{r_{k-1}}} X_{r_k} \\ &= id + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (n\,X_{n-1} + Z_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Y_n \end{aligned}$$

onde $Y_0 = id$, $Y_n = n\,X_{n-1} + Z_n$ e

$$Z_n = \sum_{k=2}^{n} \sum_{r_1+\cdots+r_k=n-k} \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!\, k!} D_{X_{r_1}} \cdots D_{X_{r_{k-1}}} X_{r_k}$$

depende somente de $X_0, X_1, \cdots, X_{n-2}$. Determinados os campos incógnitos X_n temos o problema da convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X_n$. Para contorná-lo tome-se, para cada

$\in \mathbb{N}$, uma função suave $\beta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\beta_n(t) = 1$ se $t \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ e $\beta_n(t) = 0$ quando $t \notin \left(-\frac{2}{n}, \frac{2}{n}\right)$. Definimos então X_t como soma da série

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \beta_n(t) X_n$$

Para $t = 0$ toda a parcela desta série é nula, excepto a primeira, e por isso a sua soma é X_0. Por outro lado em cada vizinhança de $t \neq 0$ que não contenha a origem 0 esta série tem apenas um número finito de termos não nulos. Logo X_t é uma soma finita de campos em $\mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$. É claro que esta família é suave e admite o desenvolvimento de Taylor em $t = 0$,

$$X_t \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X_n \, .$$

Logo, por construção

$$e^{t X_t} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} F_n \sim f_t \, ,$$

o que prova a proposição. □

Sejam $\mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$ o grupo dos difeomorfismos $f : M \to M$ de classe C^k, e $\mathcal{X}^k(M)$ o espaço dos campos de vectores de classe C^k tangentes a M, que é um espaço de Banach[3]. O grupo $\mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$ tem uma estrutura de variedade de Banach modelada em $\mathcal{X}^k(M)$[4]. A operação de composição em $\mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$ é contínua, mas não diferenciável.

[3]Para definir a norma $\|\cdot\|_{C^k}$ em $\mathcal{X}^k(M)$ toma-se uma cobertura finita $\{K_i\}_i$ de M em regiões compactas, cada uma delas dentro do domínio $U_i \subseteq M$ dum certo sistema de coordenadas $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ de M. A norma é então definida por

$$\|X\|_{C^k} = \max_i \max_{0 \le n \le k} \max\{ \, \|D^n(\phi_i)_* X(x)\| \, : \, x \in K_i \, \} \, .$$

Embora esta norma dependa das escolhas dos compactos K_i e dos sistemas de coordenadas ϕ_i, é possível demonstrar que qualquer outra escolha produz uma norma equivalente a esta.

[4]Define-se um atlas para a variedade $\mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$ do seguinte modo: Fixada uma estrutura Riemanniana em TM, seja $\exp : TM \to M$ a correspondente aplicação exponencial. Considere-se então $\Phi : C^k(M, M) \times \mathcal{X}^k(M) \to C^k(M, M)$ definida por $\Phi(f, X) = \Phi_f(X) = \exp(f, X \circ f)$. Para cada $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$, $\Phi_f : \mathcal{X}^k(M) \to C^k(M, M)$ é uma função de classe C^1 tal que $\Phi_f(0) = f$ e $D(\Phi_f)_0 X = X \circ f$. Designando por $\mathcal{X}^k_r(M) = \{ \, X \in \mathcal{X}^k_r(M) \, : \, \|X\|_{C^k} < r \, \}$ a bola de centro na origem e raio $r > 0$, para cada $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$ existe um número $r(f) > 0$ tal que $\Phi_f\left(\mathcal{X}^k_{r(f)}(M)\right) \subseteq \mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$ e $D(\Phi_f)_X$ é injectiva para todo $X \in \mathcal{X}^k_{r(f)}(M)$. A família de parametrizações $\Phi_f : \mathcal{X}^k_{r(f)}(M) \to \mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$ determina um atlas para uma estrutura de variedade de classe C^1 sobre o conjunto $\mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$.

Assim, $\mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$ é um grupo topológico mas não um grupo de Lie. O espaço $\mathcal{X}^k(M)$ não é álgebra de Lie porque o parêntesis de Lie de dois campos de classe C^k é um campo de classe C^{k-1}. Por outro lado, a aplicação exponencial $exp : \mathcal{X}^k(M) \to \mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$ está bem definida porque é obtida por integração. É contínua mas não é de classe C^1. A derivada formal calculada na proposição 11 dá-nos explicitamente as derivadas direccionais, mas estas não determinem uma derivada total. O problema é que para cada $Y \in \mathcal{X}^k(M)$ a função $X \mapsto \eta(X)Y$ transforma campos de classe C^k em campos de classe C^{k-1}, pelo que $D\exp_X : \mathcal{X}^k(M) \to T_{e^X}\mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$ não está bem definida. No entanto, a restrição $exp : \mathcal{X}^{k+1}(M) \to \mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$ já é uma aplicação de classe C^1 porque $\eta : \mathcal{X}^{k+1}(M) \to \mathcal{L}(\mathcal{X}^k(M)),\ X \mapsto \eta(X)$, define uma função contínua com valores na álgebra de Banach dos operadores lineares contínuos em $\mathcal{X}^k(M)$. Como $D\exp_0$ é a aplicação identidade segue que a exponencial é localmente injectiva, com derivada injectiva, numa vizinhança do campo nulo em $\mathcal{X}^{k+1}(M)$. Em particular obtemos

Proposição 14. *Dada uma variedade compacta M existe um número $r > 0$ tal que se $X, Y \in \mathcal{X}^1(M)$ com $e^X = e^Y$ e $\|X\|_{C^1}, \|Y\|_{C^1} < r$ então $X = Y$.*

8. Relação entre as operações da Álgebra e do Grupo

Uma consequência importante de (6) é o facto da multiplicação do grupo ficar localmente determinada pelas operações da álgebra de Lie $\mathcal{X}^\infty(M)$.

Proposição 15. *Seja $\mathfrak{g} \subset \mathcal{X}^\infty(M)$ uma subálgebra de Lie com dimensão finita. Dados campos $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{g}$, seja $Z(t) \in \mathcal{X}^\infty(M)$ uma família suave de campos tal que $Z(0) = 0$ e para todo o t, $e^{Z(t)} = e^{tX_1} e^{tX_2} \cdots e^{tX_k}$ com $\|\mathrm{ad}Z(t)\| < \log 2$. Então $Z(t) \in \mathfrak{g}$ para todo t.*

Prova. Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned}
\left(De^{Z(t)}\right)^{-1} \frac{d}{dt}\left[e^{Z(t)}\right] &= \left(De^{tX_1} \cdots e^{tX_k}\right)^{-1} \frac{d}{dt}\left[e^{tX_1} \cdots e^{tX_k}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(e^{tX_i} \cdots e^{tX_k}\right)_* X_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Ad}(e^{tX_i}) \cdots \mathrm{Ad}(e^{tX_k})\, X_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} e^{t\mathrm{ad}X_i} \cdots e^{t\mathrm{ad}X_k}\, X_i \in \mathfrak{g}
\end{aligned}$$

porque cada exponencial $e^{t\mathrm{ad}X_i}$ induz um automorfismo de $\mathfrak{g}$. Por outro lado, de (6) resulta que

$$\eta(\mathrm{ad}Z(t))\,\frac{dZ}{dt} = \left(De^{Z(t)}\right)^{-1}\frac{d}{dt}\left[e^{Z(t)}\right] \in \mathfrak{g}\,.$$

Vejamos em seguida que o endomorfismo $\mathrm{ad}Z(t)$ preserva $\mathfrak{g}$ para todo o t. Temos $e^{Z(t)} = e^{tX_1}\,e^{tX_2}\,\cdots\,e^{tX_k}$ pelo que

$$e^{\mathrm{ad}Z(t)} = \mathrm{Ad}(e^{Z(t)}) = \mathrm{Ad}(e^{tX_1})\,\cdots\,\mathrm{Ad}(e^{tX_k}) = e^{t\mathrm{ad}X_1}\,\cdots\,e^{t\mathrm{ad}X_k}$$

e pelo teorema espectral, $\mathrm{ad}Z(t) = \log\left(e^{t\mathrm{ad}X_1}\,\cdots\,e^{t\mathrm{ad}X_k}\right) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{g})$. Para ver que este logaritmo está bem definido basta observar que $\log z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,(z-1)^n$ é analítica no disco $|z-1|<1$ e que $\left\|e^{\mathrm{ad}Z(t)} - I\right\| \leq e^{\|\mathrm{ad}Z(t)\|} - 1 < 1$. Como a função $1/\eta(z) = z/(1-e^{-z})$ é analítica no disco $|z|<2\pi$, pelo teorema espectral $\eta(\mathrm{ad}Z(t))^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{g})$. Logo $\frac{dZ}{dt} \in \mathfrak{g}$ para todo o t, e como $Z(0)=0$, por primitivação vem que $Z(t) \in \mathfrak{g}$ para todo o t. $\square$

Da prova acima resulta:

Proposição 16. *Dada uma subálgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}^\infty(M)$ com dimensão finita, fixados um inteiro $k \in \mathbb{N}$ e uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathfrak{g}$, existe $r>0$ tal que quaisquer que sejam $X_1,\ldots,X_k \in \mathfrak{g}$ com $\|X_i\| < r$ para cada $i=1,\ldots,k$, existe um único campo $Z = C(X_1,\ldots,X_k) \in \mathfrak{g}$ próximo de 0 tal que $e^Z = e^{X_1}\,e^{X_2}\,\cdots\,e^{X_k}$. O campo Z é dado por*

$$Z = \int_0^1 \eta\left(\log\left(e^{t\mathrm{ad}X_1}\,\cdots\,e^{t\mathrm{ad}X_k}\right)\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} e^{t\mathrm{ad}X_i}\,\cdots\,e^{t\mathrm{ad}X_k}\,X_i\right)dt\,. \tag{8}$$

Prova. Comecemos por supor que está definida uma família de campos $Z(t) \in \mathfrak{g}$ tal que $Z(0)=0$ e para todo t, $e^{Z(t)} = e^{tX_1}\,\cdots\,e^{tX_k}$. Vimos na demonstração acima que

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{dt} &= \eta(\mathrm{ad}Z(t))^{-1}\,\left(De^{Z(t)}\right)^{-1}\frac{d}{dt}\left[e^{Z(t)}\right]\\ &= \eta\left(\log\left(e^{t\mathrm{ad}X_1}\,\cdots\,e^{t\mathrm{ad}X_k}\right)\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} e^{t\mathrm{ad}X_i}\,\cdots\,e^{t\mathrm{ad}X_k}\,X_i\right)\,,\end{aligned}$$

onde esta última expressão estará bem definida desde que para certo $\epsilon>0$ suficientemente pequeno se tenha $\|\mathrm{ad}X_i\| < \epsilon$, para $i=1,\ldots,k$. A expressão

$$\eta\left(\log\left(e^{t\mathrm{ad}X_1}\,\cdots\,e^{t\mathrm{ad}X_k}\right)\right)$$

define um endomorfismo em $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$, que está bem definido porque para todo $0\leq t\leq 1$, $\left\|e^{t\mathrm{ad}X_1}\,\cdots\,e^{t\mathrm{ad}X_k} - I\right\| < 1$, e é invertível uma vez que $\left\|\log\left(e^{t\mathrm{ad}X_1}\,\cdots\,e^{t\mathrm{ad}X_k}\right)\right\| < 2\pi$, para todo $0\leq t\leq 1$. Integrando de 0 e 1 a igualdade anterior obtemos (8), pois

$Z(0)=0$. A unicidade local de $Z\in\mathfrak{g}$ tal que $e^Z=e^{X_1}\,\cdots\,e^{X_k}$ segue da proposição 14. A existência da curva suave $Z(t)\in\mathfrak{g}$ nas condições acima descritas resulta da restrição da exponencial a uma vizinhança da origem em $\mathfrak{g}$ ser um difeomorfismo local sobre o grupo gerado pelos difeomorfismos e^X com $X\in\mathfrak{g}$, facto que será provado adiante no teorema 3. □

Como as funções η e log em (8) são analíticas, usando os respectivos desenvolvimentos de Taylor, podemos transformar esta fórmula num desenvolvimento para $C(X_1,\ldots,X_k)$ como soma duma série de potências em $\mathfrak{g}$ nas variáveis $X_1,\ldots,X_k$. No caso $k=2$, isto conduz-nos ao seguinte resultado devido a Dynkin mas habitualmente conhecido como a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, cujos trabalhos, na mesma direcção, precedem o de Dynkin

Teorema 2. *Dada uma subálgebra de Lie $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{X}^\infty(M)$ com dimensão finita, fixada uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathfrak{g}$, existe $r>0$ tal que quaisquer que sejam $X,Y\in\mathfrak{g}$ com $\|X\|<r$ e $\|Y\|<r$, existe um único campo $Z=C(X,Y)\in\mathfrak{g}$ próximo de 0 tal que $e^Z=e^X\,e^Y$. Este campo é soma da seguinte série convergente*

$$C(X,Y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum\frac{1}{(i_1+j_1)+\cdots+(i_k+j_k)}\frac{[X^{(i_1)}Y^{(j_1)}\cdots X^{(i_k)}Y^{(j_k)}]}{i_1!j_1!\,\cdots\,i_k!j_k!}$$

efectuada sobre os multi-índices $(i_1,j_1,\ldots,i_k,j_k)\in\mathbb{N}^{2k}$ tais que $i_s+j_s\geq 1$ para todo $s=1,\ldots,k$. O termo

$$[X^{(i_1)}Y^{(j_1)}\cdots X^{(i_k)}Y^{(j_k)}]=[[\underbrace{X,[X\cdots[X}_{i_1},\underbrace{Y,[Y\cdots[Y}_{j_1},\cdots,\underbrace{X,[X\cdots[X}_{i_k},\underbrace{Y,[Y\cdots[Y,Y]}_{j_k}\cdots]]$$

anula-se sempre que $j_k\geq 1$ ou $j_k=1$ e $i_k\geq 2$.

Os primeiros termos da série de Dynkin são

$$C(X,Y)=X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\cdots \tag{9}$$

9. Grupos de Difeomorfismos

Dado um subgrupo $G\subseteq\mathfrak{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ dizemos que um campo $X\in\mathfrak{X}^\infty(M)$ é *tangente a G* quando existe uma função suave $f:\mathbb{R}\times M\to M$ tal que para todo o $t\in\mathbb{R}$ $f_t=f(t,\cdot)\in G$, $f_0=id$ e $\frac{df_t}{dt}|_{t=0}=X$. A família f_t diz-se uma *isotopia suave em G*. Definimos $T_{id}G$ como o espaço dos campos de vectores tangentes a G. Vamos chamar *dimensão* de G à dimensão do espaço linear $T_{id}G$.

Proposição 17. *Dado um grupo de difeomorfismos $G \subseteq \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ com dimensão finita, $T_{id}G$ é uma subálgebra de Lie de $\mathcal{X}^\infty(M)$.*

Prova. Sejam f_t e g_t duas isotopias suaves em G tais que $f_0 = g_0 = id$, $\frac{df_t}{dt}|_{t=0} = X$ e $\frac{dg_t}{dt}|_{t=0} = Y$.

(1) $X + Y \in T_{id}G$ porque $\frac{d}{dt}(f_t\, g_t)|_{t=0} = X + Y$.

(2) $\lambda X \in T_{id}G$ porque $\frac{d}{dt} f_{\lambda t}|_{t=0} = \lambda X$, qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) $[X,Y] \in T_{id}G$. Dados $t, s \in \mathbb{R}$, $f_t \circ g_s \circ (f_t)^{-1} \in G$, pelo que $(f_t)_* Y = \frac{d}{ds}\left(f_t \circ g_s \circ (f_t)^{-1}\right)|_{s=0} \in T_{id}G$. Como já vimos que $T_{id}G$ é um espaço vectorial, e este espaço tem dimensão finita, segue então que $[X,Y] = \frac{d}{dt}(f_t)_* Y|_{t=0} \in T_{id}G$. $\square$

Dado um grupo $G \subseteq \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ e difeomorfismos $g, h \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ tais que $g \in G \circ h$, dizemos que um campo $X \in \mathcal{X}^\infty_g(M)$ é *tangente à classe $G \circ h$ em g* quando existe uma isotopia suave f_t em $G \circ h$ tal que $f_0 = g$ e $\frac{df_t}{dt}|_{t=0} = X$. Definimos $T_g(G \circ h)$ como o espaço dos campos tangentes à classe $G \circ h$ em g.

Proposição 18. *Dado um subgrupo $G \subseteq \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ e difeomorfismos $g, h \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ tais que $g \in G \circ h$, $T_g(G \circ h) = (T_{id}G) \circ g = \{\, X \circ g \,:\, X \in T_{id}G \,\}$.*

Prova. Definindo $R_g : \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M) \to \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, $R_g(f) = f \circ g$, porque G é um grupo R_g é um difeomorfismo tal que $R_g G = G \circ g = G \circ h$, para todo $g \in G \circ h$. O difeomorfismo inverso é $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$. Logo, $(DR_g)_{id} : T_{id}G \to T_g(G \circ h)$ é um isomorfismo tal que $(DR_g)_{id} T_{id}G = T_g(G \circ h)$. O resultado segue de se ter $(DR_g)_{id} X = X \circ g$, para todo $X \in \mathcal{X}^\infty(M) = T_{id}\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$. $\square$

Teorema 3. *Dado um grupo de difeomorfismos $G \subseteq \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ com dimensão finita, $\exp(T_{id}G) \subseteq G$. Além disso, G é uma subvariedade de classe C^1 imersa na variedade de Banach $\mathcal{D}\mathrm{if}^1(M)$, e a aplicação $\exp : T_{id}G \to G$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de 0 tal que $D\exp_0 X = X$ para todo $X \in T_{id}G$.*

Para cada $g \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, seja $E(g) := (T_{id}G) \circ g \subset T_g\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$. A função $g \mapsto E(g)$ é o que se chama uma *distribuição* na variedade $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$. Esta distribuição é integrável, o que significa que para cada $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ existe uma subvariedade, localmente única, $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ tal que $T_g\mathcal{F} = E(g)$ para todo $g \in \mathcal{F}$. Uma tal subvariedade $\mathcal{F}$ diz-se uma *folha* da distribuição E. As folhas da distribuição E são as classe direitas $G \circ g$, com $g \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$. Notamos que estas classes formam uma partição do grupo $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$. Seja $\mathcal{F} = G \circ h$, com $h \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$. Pela proposição 18, dado $g \in G \circ h$, $T_g\mathcal{F} = T_g(G \circ g) = (T_{id}G) \circ g = E(g)$, o que mostra que $\mathcal{F} = G \circ g$ é uma folha de E. O teorema resulta do seguinte princípio:

Dada uma isotopia suave $g_t \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ tal que $\frac{dg_t}{dt} \in (T_{id}G) \circ g_t = E(g_t)$ para todo o t então $\{g_t\} \subset \mathcal{F}$ para alguma folha $\mathcal{F}$ de E.
É claro que este princípio pressupõem que G seja uma variedade. Considerando agora $X \in T_{id}G$ e definindo $g_t = e^{tX}$, temos $g_0 = id$ e $\frac{dg_t}{dt} = \frac{d}{dt}e^{tX} = X \circ e^{tX} \in (T_{id}G) \circ g_t = E(g_t)$, para todo o t. Logo, por aplicação do referido princípio $e^{tX} = g_t \in G \circ g_0 = G$ para todo t.

Os teoremas da função inversa e da função implícita são válidos em espaços de Banach. Eles sustentam uma extensão da Geometria Diferencial a espaços de Banach de dimensão infinita [1]. Na demonstração seguinte fazemos breve uso do conceito de variedade de Banach.

Prova. Dada uma base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathfrak{g} = T_{id}G$ consideremos isotopias suaves $g_1(t)$, ..., $g_n(t)$ em G tais que $g_i(0) = id$ e $\frac{dg_i}{dt}(0) = X_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Definimos a aplicação suave $g : \mathfrak{g} \to G$ por $g(t_1X_1 + \ldots + t_nX_n) = g_1(t_1) \cdots g_n(t_n)$. É claro que $Dg_0 = id_{\mathfrak{g}}$. Consideremos agora a variedade de Banach $\mathcal{D}\mathrm{if}^1(M)$. Existe uma aplicação de classe C^1, $e : \mathcal{X}^1(M) \to \mathcal{D}\mathrm{if}^1(M)$, tal que $e(0) = id$ e $De_0 = id_{\mathcal{X}^1(M)}$. Como vimos na secção 7, a aplicação exponencial $\exp : \mathcal{X}^1(M) \to \mathcal{D}\mathrm{if}^1(M)$ não é de classe C^1. Considerando em M uma estrutura Riemanniana, ela determina uma aplicação, também chamada *exponencial*, $\exp : TM \to M$. Para cada $v \in T_pM$, $\exp(p, v)$ dá-nos a posição, ao fim duma unidade de tempo, da geodésica que passa por p com velocidade v. Com esta exponencial definimos $e : \mathcal{X}^1(M) \to \mathcal{D}\mathrm{if}^1(M)$ por $e(X)\,p = \exp(p, X(p))$. Facilmente se vê que esta aplicação é de classe C^1 com $e(0) = id$ e $De_0 = id_{\mathcal{X}^1(M)}$. O subespaço de dimensão finita $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{X}^1(M)$ admite um suplemento fechado $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}^1(M)$ com $\mathcal{X}^1(M) = \mathfrak{g} \oplus \mathcal{E}$. Definimos então $f : \mathcal{X}^1(M) \to \mathcal{D}\mathrm{if}^1(M)$ pondo $f(X + Y) = g(X) \circ e(Y)$. Esta aplicação é uma extensão C^1 de g que ainda satisfaz $f(0) = id$ e $Df_0 = id_{\mathcal{X}^1(M)}$. Pelo teorema da função inversa, existem vizinhanças $\mathcal{U}$ de id em $\mathcal{D}\mathrm{if}^1(M)$ e $\mathcal{V}$ de 0 em $\mathcal{X}^1(M)$ onde a inversa $f^{-1} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ está bem definida e é de classe C^1. Designando por $\Pi : \mathcal{X}^1(M) \to \mathcal{E}$ a projecção linear paralela a $\mathfrak{g}$, definimos $V : \mathcal{U} \subset \mathcal{D}\mathrm{if}^1(M) \to \mathcal{E}$ por $V(h) = \Pi \circ f^{-1}(h)$. A função V é de classe C^1 e por definição satisfaz a igualdade

$$V(g(X) \circ e(Y)) = Y \quad \text{para todo } Y \in \mathcal{E}\,. \tag{10}$$

Em particular temos que $h \in G$ para todo $h \in \mathcal{U}$ tal que $V(h) = 0$. Como veremos isto implica que

$$DV_h(X \circ h) = 0 \quad \text{para todo } h \in \mathcal{U} \text{ e } X \in \mathfrak{g}\,. \tag{11}$$

Vamos concluir a prova do teorema antes de provar (11). Para relacionar a prova que segue com o argumento heurístico acima observamos que as pré-imagens de V formam uma folheação de classe C^1 no aberto $\mathcal{U}$ que corresponde à decomposição em classes direitas. Dado $X \in \mathfrak{g}$, temos $V(e^{0\,X}) = V(id) = 0$ porque $f(0) = id$. Por (11) temos

$$\frac{d}{dt} V(e^{tX}) = DV_{e^{tX}}(X \circ e^{tX}) = 0 \quad \text{para } t \text{ suficientemente pequeno .}$$

Logo $V(e^{tX})$ é constante igual a zero, o que implica que $e^{tX} \in G$ para todo o t tal que $e^{tX} \in \mathcal{U}$. Mas como G é um grupo, $e^{tX} \in G$ para todo o $t \in \mathbb{R}$. Em particular $\exp(X) = e^X \in G$.

Para provar (11) definimos para cada $Y \in \mathcal{E}$, $G_Y := g(\mathfrak{g} \cap \mathcal{V}) \circ e(Y) = \mathcal{U} \cap V^{-1}(Y)$. Observamos que $G_0 := g(\mathfrak{g} \cap \mathcal{V}) = \mathcal{U} \cap V^{-1}(0)$ é uma região aberta de G. Como $Df_0^{-1} = id$ temos que $DV_{id} = \Pi : \mathcal{X}^1(M) \to \mathcal{E}$ é uma aplicação linear contínua e sobrejectiva. Logo escolhendo $\mathcal{U}$ suficientemente pequena podemos supor que $DV_h : T_h \mathcal{D}\mathrm{if}^1(M) \to \mathcal{E}$ é sobrejectiva para todo $h \in \mathcal{U}$. Segue daqui que cada G_Y, com $Y \in \mathcal{E} \cap \mathcal{V}$, é uma subvariedade de classe C^1 em $\mathcal{D}\mathrm{if}^1(M)$. Por (10) temos que $V(h)$ é constante igual a Y sobre G_Y o que implica que $DV_h(Z) = 0$ para todo o vector $Z \in T_h G_Y$, $h \in G_Y$. Finalmente, (11) resulta de adaptar o argumento da proposição 18 às variedades G_Y.

A partir do difeomorfismo $g : \mathfrak{g} \cap \mathcal{V} \to G_0$ podemos definir para cada $h \in G$ um novo difeomorfismo $g_h : \mathfrak{g} \cap \mathcal{V} \to h\, G_0$, pondo $g_h(Y) := h \circ g(Y)$. Esta família de aplicações de classe C^1 determina em G uma estrutura de subvariedade imersa em $\mathcal{D}\mathrm{if}^1(M)$ de classe C^1. $\square$

Definamos agora

$$L(G) = \{\, X \in \mathcal{X}^\infty(M) \,:\, e^{tX} \in G, \forall t \in \mathbb{R} \,\} .$$

Corolário 5. *Dado um grupo de difeomorfismos $G \subseteq \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ com dimensão finita, $T_{id}G = L(G)$.*

Prova. Dado $X \in L(G)$, $f_t = e^{tX}$ é uma isotopia suave em G tal que $f_0 = id$ e $\frac{df_t}{dt}|_{t=0} = X$. Logo $X \in T_{id}G$. A inclusão recíproca, $T_{id}G \subseteq L(G)$, segue do teorema 3. $\square$

10. Grupos Topológicos

Chama-se *grupo topológico* a um grupo G munido de uma topologia que torna contínuas as operações de multiplicação $m : G \times G \to G$, $m(g,h) = g\,h$, e de inversão $i : G \to G$, $i(g) = g^{-1}$. A topologia num grupo topológico G fica determinada por um sistema fundamental de vizinhanças do elemento neutro $e \in G$, no sentido que se $\{U_i\}_i$ for um tal sistema de vizinhanças então para cada $g \in G$, $\{g\,U_i\}_i$ é um sistema fundamental de vizinhanças do elemento g. Isto segue das translações à esquerda $L_g : G \to G, \quad L_g(h) = g\,h$, serem homeomorfismos de G. Recordemos que um grupo topológico G se diz *conexo* quando os únicos subconjuntos de G simultâneamente abertos e fechados são $\emptyset$ e G. Um grupo topológico G diz-se *localmente conexo* se o elemento neutro $e \in G$ admitir um sistema fundamental de vizinhanças conexas.

Proposição 19. *Para qualquer grupo topológico localmente conexo G, a componente conexa G_0 de G que contém o elemento neutro $e \in G$ é um subgrupo aberto e fechado de G.*

Prova. Como $m(G_0 \times G_0)$ é um conexo que contém $e \in G$, $m(G_0 \times G_0) \subseteq G_0$. Analogamente, porque $i(G_0)$ é um conexo que contém $e \in G$, $i(G_0) \subseteq G_0$. Logo G_0 é um subgrupo de G. Como G é localmente conexo, G_0 é uma vizinhança do elemento neutro, pelo que, sendo um subgrupo, G_0 é aberto. Todo o subgrupo aberto $G_0 \subset G$ é também fechado porque G_0 é o complementar em G da união de todas as classes $g\,G_0$ distintas de G_0, todas elas abertas. $\square$

Supondo M compacta $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ é um grupo topológico com uma topologia definida à custa da seguinte noção de convergência: Dados difeomorfismos $f, f_n \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, f_n converge para f em $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ sse $f_n \to f$ em $\mathcal{D}\mathrm{if}^k(M)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Este grupo é localmente conexo porque qualquer difeomorfismo próximo da identidade é suavemente isotópico à identidade em $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$. Em geral não é conexo. Por exemplo, se a variedade M for orientável então a componente conexa da identidade em $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ não contém transformações que invertam a orientação.

Para cada grupo de difeomorfismos $G \subseteq \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ com dimensão finita, podemos considerar em G duas topologias que fazem dele um grupo topológico:

(1) A topologia induzida como subespaço topológico de $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$,
(2) A topologia induzida pela aplicação $\exp : T_{id}G \to G$. Designando por $B_\epsilon(0)$ a bola de raio $\epsilon > 0$ em $T_{id}G$, $\{\exp B_\epsilon(0)\}_{\epsilon>0}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do elemento neutro em $id \in G$. Esta topologia é mais fina do que a anterior, o que significa que a aplicação inclusão de G em $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ é contínua.

Vamos nos referir à segunda como a *topologia intrínseca* de G. O grupo G é sempre localmente conexo relativamente à topologia intrínseca. Adiante veremos exemplos em que as duas topologias diferem.

11. Coordenadas Exponenciais

Seja $G \subseteq \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ um grupo de difeomorfismos com dimensão finita. Fixemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que a aplicação exponencial seja um difeomorfismo de $B_\epsilon(0) \subset T_{id}G$ em $V_\epsilon = \exp B_\epsilon(0) \subset G$. Para cada $g \in G$ definimos $\xi_g : B_\epsilon(0) \to g\,V_\epsilon$, por $\xi_g(X) = g\, e^X$. Dizemos que cada ξ_g é um *sistema de coordenadas exponencial* do grupo G.

Proposição 20. *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno a família $\{\xi_g : B_\epsilon(0) \to G\}_{g\in G}$ forma um atlas que define uma estrutura diferenciável analítica na variedade G. Este atlas determina também a topologia intrínseca de G.*

Prova. Suponhamos que $\xi_{g_1}(B_\epsilon(0)) \cap \xi_{g_2}(B_\epsilon(0)) \neq \emptyset$. Sejam $X_1, X_2 \in B_\epsilon(0)$ tais que $g_1 \circ e^{X_1} = g_2 \circ e^{X_2}$. Então $(g_2)^{-1} \circ g_1 = e^{X_2} \circ e^{-X_1} = e^{C(X_2,-X_1)}$. Seja $Z = C(X_2, -X_1)$. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, se $Y = (\xi_{g_2})^{-1} \circ \xi_{g_1}(X)$ então $\xi_{g_2}(Y) = \xi_{g_1}(X)$, o que implica

$$e^Z = (g_2)^{-1} \circ g_1 = e^Y \circ e^{-X}\ .$$

Logo $e^Y = e^Z \circ e^X$, e portanto

$$\left((\xi_{g_2})^{-1} \circ \xi_{g_1} \right)(X) = Y = C(Z, X)$$

é uma função analítica de $X \in \mathfrak{g}$. Ao longo das contas acima necessitamos tomar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que a expressão $C(C(X_2, -X_1), X)$ esteja bem definida quaisquer que sejam $X_1, X_2, X \in B_\epsilon(0)$. $\square$

12. A Correspondência de Lie

Dada uma subálgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}^\infty(M)$ podemos associar-lhe o subgrupo

$$\Gamma(\mathfrak{g}) = \{\, e^{X_1} \circ \cdots \circ e^{X_k} \in \mathfrak{Dif}^\infty(M)\ :\ X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{g},\ k \in \mathbb{N}\,\}$$

gerado pela subálgebra $\mathfrak{g}$.

Proposição 21. *Dado um grupo de difeomorfismos $G \subseteq \mathfrak{Dif}^\infty(M)$ com dimensão finita, se G é conexo então $\Gamma(L(G)) = G$.*

Prova. É óbvio que $\Gamma(L(G)) \subseteq G$. Como $L(G) = T_{id}G$, pelo teorema 3 o subgrupo $\Gamma(L(G))$ é aberto de G. Logo também é fechado, e como G é conexo, $G = \Gamma(L(G))$. $\square$

Proposição 22. *Dada $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{X}^\infty(M)$ subálgebra de dimensão finita,* $L(\Gamma(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$.

A demonstração seguinte faz uso do conceito de dimensão topológica, do qual usamos apenas as seguintes propriedades:

(1) A dimensão topológica dum espaço linear real coincide com a sua dimensão algébrica.
(2) Toda a união numerável de subespaços topológicos de dimensão $\leq n$ tem ainda dimensão topológica $\leq n$.

Referimos o livro [3] para o conceito de dimensão topológica. A prova pode também ser facilmente modificada substituindo a dimensão topológica pelo conceito mais elementar de conjunto residual (de 2ª categoria), fazendo depois uso do Teorema de Baire.

Prova. Consideremos as vizinhanças $B_\epsilon(0)$ de 0 em $\mathfrak{g}$ e $V_\epsilon = \{\, e^X \,:\, X \in B_\epsilon(0)\,\}$ de id em $\Gamma(\mathfrak{g})$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$V_\epsilon^k = \{\, e^{X_1} \circ \ldots \circ e^{X_k} \,:\, X_1, \ldots, X_k \in B_\epsilon(0)\,\}\ .$$

Combinando o teorema 3 com a proposição 15, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o conjunto V_ϵ^k é imagem pelo difeomorfismo local exponencial duma certa região aberta em $\mathfrak{g}$. Logo V_ϵ^k tem dimensão topológica $\dim_{\mathrm{top}}(V_\epsilon^k) = \dim \mathfrak{g}$. De $\Gamma(\mathfrak{g}) = \cup_{k=1}^\infty V_\epsilon^k$ segue que $\dim_{\mathrm{top}}(\Gamma(\mathfrak{g})) = \dim \mathfrak{g}$. Como o grupo $G = \Gamma(\mathfrak{g})$ tem álgebra de Lie $T_{id}G = L(\Gamma(\mathfrak{g}))$, temos $\dim_{\mathrm{top}}(\Gamma(\mathfrak{g})) = \dim L(\Gamma(\mathfrak{g}))$, o que implica que $\dim L(\Gamma(\mathfrak{g})) = \dim \mathfrak{g}$. Finalmente, porque a inclusão de espaços vectoriais $\mathfrak{g} \subseteq L(\Gamma(\mathfrak{g}))$ é óbvia, a igualdade segue. $\square$

Juntando as duas proposições obtemos o teorema fundamental da Teoria de Lie.

Teorema 4. *A aplicação $\mathfrak{g} \mapsto G = \Gamma(\mathfrak{g})$ estabelece uma bijecção entre subálgebras de Lie com dimensão finita $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}^\infty(M)$, e subgrupos de Lie conexos com dimensão finita $G \subset \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$.*

13. Grupos de Lie Abstractos

Chama-se *grupo de Lie* a um grupo com uma estrutura de variedade suave (C^∞) tal que as operações de multiplicação $m : G \times G \to G$, $m(g,h) = g\,h$, e de inversão $i : G \to G$, $i(g) = g^{-1}$, sejam suaves.

Ao longo desta secção G representará sempre um grupo de Lie. Para cada $g \in G$ definem-se $L_g : G \to G$, $L_g(h) = g\,h$, e $R_g : G \to G$, $R_g(h) = h\,g$. A aplicação L_g diz-se uma *translação esquerda* de G, enquanto R_g se diz uma *translação direita* de G. Estas translações satisfazem, quaisquer que sejam $g, h \in G$

$$L_{g\,h} = L_g \circ L_h \quad \text{e} \quad R_{g\,h} = R_h \circ R_g\ , \tag{12}$$

sendo em particular difeomorfismos com $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ e $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$. Definimos

$$\mathcal{G}_L(G) = \{\, L_g \,:\, g \in G\,\} \subset \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(G)\ ,$$

$$\mathcal{G}_R(G) = \{\, R_g \,:\, g \in G\,\} \subset \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(G)\ .$$

As relações (12) mostram que estes conjuntos são subgrupos de $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(G)$ isomorfos a G. Na verdade as aplicações $L : G \to \mathcal{G}_L(G)$, $g \mapsto L_g$, e $R^{-1} : G \to \mathcal{G}_L(G)$, $g \mapsto R_{g^{-1}}$, são isomorfismos de grupos.

Um campo $X \in \mathcal{X}^\infty(G)$ diz-se *invariante à esquerda* quando $(L_g)_* X = X$ para todo $g \in G$. Analogamente, dizemos que $X \in \mathcal{X}^\infty(G)$ é *invariante à direita* se $(R_g)_* X = X$ para todo $g \in G$. Designamos por $\mathcal{X}_L(G)$, respectivamente $\mathcal{X}_R(G)$, o conjunto de todos os campos $X \in \mathcal{X}^\infty(G)$ invariantes à esquerda, respectivamente à direita.

Proposição 23. *$\mathcal{X}_L(G)$ e $\mathcal{X}_R(G)$ são subálgebras de Lie de $\mathcal{X}^\infty(G)$.*

Prova. Exercício. $\square$

Proposição 24. *Dado $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(G)$,*
(1) $f \in \mathcal{G}_L(G) \quad \Leftrightarrow \quad R_g \circ f = f \circ R_g, \quad \forall g \in G.$
(2) $f \in \mathcal{G}_R(G) \quad \Leftrightarrow \quad L_g \circ f = f \circ L_g, \quad \forall g \in G.$

Prova. Exercício. $\square$

A proposição seguinte mostra que $\mathcal{X}_R(G) = T_{id}\mathcal{G}_L(G)$ é a álgebra de Lie de $\mathcal{G}_L(G)$, enquanto $\mathcal{X}_L(G) = T_{id}\mathcal{G}_R(G)$ é a álgebra de Lie de $\mathcal{G}_R(G)$.

Proposição 25. *Valem as relações*
(1) $L\left(\mathcal{G}_L(G)\right) = \mathcal{X}_R(G)$,
(2) $L\left(\mathcal{G}_R(G)\right) = \mathcal{X}_L(G)$,
(3) $\Gamma\left(\mathcal{X}_L(G)\right) \subseteq \mathcal{G}_R(G)$, *com igualdade sse G é conexo,*
(4) $\Gamma\left(\mathcal{X}_R(G)\right) \subseteq \mathcal{G}_L(G)$, *com igualdade sse G é conexo.*

Prova. Dado $X \in \mathcal{X}_R(G)$, por ser invariante à direita temos

$$\frac{d}{dt}(R_g \circ e^{tX})(x) = (DR_g)_{e^{tX}x} X(e^{tX}x) = X\left(R_g \circ e^{tX}(x)\right) ,$$

o que prova que $(R_g \circ e^{tX})(x)$ e $e^{tX} R_g(x)$ são soluções do mesmo problema de valor inicial. Logo $R_g \circ e^{tX} = e^{tX} \circ R_g$ para todo $g \in G$, o que pela proposição 24 implica que $e^{tX} \in \mathcal{G}_L(G)$, e portanto que $X \in L\left(\mathcal{G}_L(G)\right)$. Este mesmo argumento serve para mostrar a inclusão $\Gamma\left(\mathcal{X}_R(G)\right) \subseteq \mathcal{G}_L(G)$ no item (4). Reciprocamente, se $X \in L\left(\mathcal{G}_L(G)\right)$, de novo pela proposição 24 temos $R_g \circ e^{tX} = e^{tX} \circ R_g$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $g \in G$. Derivando esta relação em $t = 0$ obtemos que $(R_g)_* X = X$, donde $X \in \mathcal{X}_R(G)$. Fica assim provado (1). A igualdade em (4) quando G é conexo resulta de $\Gamma\left(\mathcal{X}_R(G)\right)$ ser um subgrupo aberto de $\mathcal{G}_L(G)$. As provas dos itens (2) e (3) são análogas. $\square$

Vamos agora usar o isomorfismo de grupos $L : G \to \mathcal{G}_L(G)$, que é também um difeomorfismo de variedades, para definir a álgebra de Lie, a aplicação exponencial e as representações adjuntas do grupo de Lie abstracto G.

13.1. **A álgebra de Lie.** A derivada do difeomorfismo L no elemento neutro e de G é um isomorfismo $DL_e : T_eG \to \mathcal{X}_R(G) = T_{id}\mathcal{G}_L(G)$, que podemos usar para puxar para T_eG a estrutura de álgebra de Lie em $\mathcal{X}_R(G)$. Assim, define-se o parêntesis de Lie em T_eG por $[u, v] := [(DL_e)u, (DL_e)v](e)$, onde o parêntesis à direita corresponde à derivada de Lie de dois campos invariantes à direita.

Para cada $v \in T_eG$ definimos

$$X_v(g) = (DR_g)_e v \ . \tag{13}$$

Por construção é óbvio que X_v é um campo invariante à direita, i.e., $X_v \in \mathcal{X}_R(G)$.

Proposição 26. *O isomorfismo* $DL_e : T_eG \to \mathcal{X}_R(G)$ *é dado explicitamente por* $DL_e v = X_v$*, enquanto o isomorfismo inverso* $(DL_e)^{-1} : \mathcal{X}_R(G) \to T_eG$ *é dado por* $(DL_e)^{-1}X = X(e)$*.*

Prova. Seja $g(t)$ uma curva suave em G tal que $g(0) = e$, $g'(0) = v$. Derivando temos

$$\frac{d}{dt} L_{g(t)}(h) = \frac{d}{dt}(g(t)\, h) = \frac{d}{dt} R_h(g(t)) = (DR_h)_{g(t)} g'(t) \ .$$

Observemos que $L_{g(t)}$ é uma isotopia suave em $\mathcal{G}_L(G)$ tal que $L_{g(0)} = id$. Fazendo $t = 0$ obtemos

$$\{(DL_e)v\}(h) = \frac{d}{dt} L_{g(t)}(h)|_{t=0} = (DR_h)_e v = X_v(h) \ .$$

Como $X_v(e) = v$ a expressão do isomorfismo inverso $(DL_e)^{-1} : \mathcal{X}_R(G) \to T_eG$ corresponde à avaliação em e. $\square$

13.2. **A representação da álgebra de Lie.** A *representação adjunta* da álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_eG$ do grupo G define-se por $\mathrm{ad}_G : T_eG \to \mathcal{D}\mathrm{er}(T_eG)$, $\mathrm{ad}_G(v)u = [u, v]$. Pela proposição 2, $\mathcal{D}\mathrm{er}(T_eG)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathcal{L}(T_eG)$, e usando a proposição 3, vemos que $\mathrm{ad}_G : T_eG \to \mathcal{D}\mathrm{er}(T_eG)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Com o objectivo de relacionar as duas representações adjuntas $\mathrm{ad}_G : T_eG \to \mathcal{D}\mathrm{er}(T_eG)$ e $\mathrm{ad} : \mathcal{X}_R(G) \to \mathcal{D}\mathrm{er}(\mathcal{X}_R(G))$ consideremos a seguinte definição. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ álgebras de Lie, e E, E' espaços lineares. Dizemos que duas representações $\rho : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}(E)$ e $\rho' : \mathfrak{g}' \to \mathcal{L}(E')$ são isomorfas quando existem um isomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ e um isomorfismo linear $\xi : E \to E'$ tais que $\rho'(\phi(x))\, y = \xi(\rho(x)\, \xi^{-1} y)$, quaisquer que sejam $x \in \mathfrak{g}$, $y \in E'$. Por outras palavras, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{g}' \\ {\scriptstyle\rho}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho'} \\ \mathcal{L}(E) & \xrightarrow{\xi_*} & \mathcal{L}(E') \end{array} \ ,$$

onde $\xi_* : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E')$ é definido por $\xi_* A = \xi \circ A \circ \xi^{-1}$. Dizemos então que o par (ϕ, ξ) é o isomorfismo entre as duas representações.

Proposição 27. *As representações* $\mathrm{ad}_G : T_eG \to \mathcal{L}(T_eG)$ *e* $\mathrm{ad} : \mathfrak{X}_R(G) \to \mathcal{L}(\mathfrak{X}_R(G))$ *são isomorfas através do isomorfismo* $(DL_e, (DL_e)_*)$.

Prova. Exercício. $\square$

13.3. **A aplicação exponencial.** A exponencial de G é a aplicação $\exp_G : T_eG \to G$ definida por $\exp_G(v) := (\exp X_v)\, e$, sendo X_v o campo invariante à direita definido em (13). Observemos que para cada $v \in T_eG$, a função $f_v : \mathbb{R} \to G$ definida por $f_v(t) = \exp_G(t\, v)$ é o único homomorfismo de grupos suave tal que $f_v'(0) = v$.

Proposição 28. *O diagrama seguinte é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{DL_e} & \mathfrak{X}_R(G) \\ {\scriptstyle\exp_G}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\exp} \\ G & \xrightarrow{L} & \mathcal{G}_L(G) \end{array}$$

Prova. Exercício. $\square$

Por definição tem-se $(D\exp_G)_0 = id_{T_eG}$.

13.4. **A representação do grupo.** A representação adjunta do grupo G é a aplicação $\mathrm{Ad}_G : G \to \mathcal{L}(T_eG)$ definida por

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_G(g)\, v &:= \frac{d}{dt}\left(g\, \exp_G(t\, v)\, g^{-1}\right)_{t=0} = D(L_g \circ R_{g^{-1}})_e v \\ &= (DL_g)_{g^{-1}}(DR_{g^{-1}})_e\, v = (DR_{g^{-1}})_g (DL_g)_e\, v \ . \end{aligned}$$

A igualdade entre as duas últimas expressões é consequência da relação de comutatividade $L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g$. Esta aplicação é um homomorfismo de grupos com valores no grupo $\mathrm{Aut}(T_eG)$ dos automorfismos lineares de T_eG.

Sejam G e G' grupos, e E, E' espaços lineares. Dizemos que duas representações $\rho : G \to \mathrm{Aut}(E)$ e $\rho' : G' \to \mathrm{Aut}(E')$ são isomorfas quando existem um isomorfismo de grupos $\phi : G \to G'$ e um isomorfismo linear $\xi : E \to E'$ tais que $\rho'(\phi(g))\, x = \xi(\rho(g)\, \xi^{-1} x)$, quaisquer que sejam $g \in G$, $x \in E'$. Por outras palavras, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & G' \\ {\scriptstyle\rho}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho'} \\ \mathrm{Aut}(E) & \xrightarrow{\xi_*} & \mathrm{Aut}(E') \end{array} \quad ,$$

onde $\xi_* : \mathrm{Aut}(E) \to \mathrm{Aut}(E')$ é definido por $\xi_* A = \xi \circ A \circ \xi^{-1}$. Dizemos então que o par (ϕ, ξ) é o isomorfismo entre as duas representações.

Proposição 29. *As representações* $\mathrm{Ad}_G : G \to \mathrm{Aut}(T_e G)$ *e* $\mathrm{Ad} : \mathcal{G}_L(G) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{X}_R(G))$ *são isomorfas através do isomorfismo* $(L, (DL_e)_*)$.

Prova.

$$\begin{aligned} (DL_e)^{-1}\, (\mathrm{Ad}(L_g)(DL_e)v) &= \{\mathrm{Ad}(L_g) X_v\}(e) = (DL_g)_{g^{-1}} X_v(g^{-1}) \\ &= (DL_g)_{g^{-1}} (DR_{g^{-1}})_e v = \mathrm{Ad}(g)\, v \end{aligned}$$

que equivale a

$$\mathrm{Ad}(L_g) X = (DL_e)(\mathrm{Ad}(g)\, (DL_e)^{-1} X) \; .$$

□

14. Relações entre um grupo de Lie abstracto e a sua álgebra de Lie

Os grupos de Lie abstractos satisfazem com as respectivas álgebras de Lie exactamente as mesmas relações que os subgrupos de $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ com dimensão finita.

Proposição 30. *Dado um grupo de Lie de dimensão finita G, quaisquer que sejam $g \in G$, $v, w \in T_e G$,*

$$\begin{aligned} &\exp_G(\mathrm{Ad}_G(g)\, v) = g\, \exp_G(v)\, g^{-1} \\ &\mathrm{Ad}_G(\exp_G(v)) = e^{\mathrm{ad}_G v} \\ &(D \exp_G)_v\, w = (DL_{\exp_G v})_e\, \eta(\mathrm{ad}_G v)\, w \end{aligned}$$

Prova. Exercício. □

Teorema 5. *Em qualquer grupo de Lie de dimensão finita G, a aplicação $\mathfrak{h} \mapsto \Gamma(\mathfrak{h})$, onde $\Gamma(\mathfrak{h})$ representa o subgrupo de G gerado por $\exp_G(T_eG)$, estabelece uma bijecção entre o conjunto das subálgebras de Lie de $\mathfrak{g} = T_eG$, e o conjunto dos subgrupos conexos de G.*

Prova. Exercício. $\square$

Proposição 31. *Dado um homomorfismo suave $\phi : G \to G'$ entre dois grupos de Lie G e G', qualquer que seja $v \in T_eG$,*

$$f(\exp_G(v)) = \exp_{G'}(Df_e\, v)) \ .$$

Por outras palavras, o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{Df_e} & T_eG' \\ {\scriptstyle \exp_G}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp_{G'}} \\ G & \xrightarrow{f} & G' \end{array}$$

Prova. Exercício. $\square$

Valem as mesmas fórmulas para a multiplicação do grupo em coordenadas exponenciais. Por exemplo, dados $X, Y \in T_eG$ com normas suficientemente pequenas

$$C(X,Y) = \int_0^1 \eta\left(\log\left(e^{t\mathrm{ad}X}\, e^{t\mathrm{ad}Y}\right)\right)^{-1}\left(e^{t\mathrm{ad}X}\, e^{t\mathrm{ad}Y}\, X + e^{t\mathrm{ad}Y}\, Y\right)\, dt \ .$$

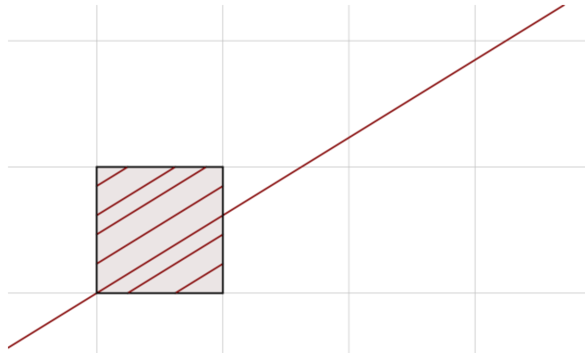
15. Subgrupos não fechados

Consideremos o grupo comutativo $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. A álgebra de Lie de $\mathbb{T}^2$ é $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$ munida do parêntesis de Lie comutativo (nulo), enquanto a exponencial de $\mathbb{T}^2$ é dada por $\exp_{\mathbb{T}^2}(v) = v \bmod \mathbb{Z}^2$. Fixado $\lambda \in \mathbb{R}$, seja $\mathfrak{h}_\lambda$ a recta paralela ao vector $(1, \lambda)$. Como $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$ é comutativo, o subespaço $\mathfrak{h}_\lambda$ é uma subálgebra. Consideremos o subgrupo associado à subálgebra $\mathfrak{h}_\lambda$, $H_\lambda = \{\, (t, \lambda\, t) \in \mathbb{T}^2 \,:\, t \in \mathbb{R}\} = \exp_{\mathbb{T}^2}(\mathfrak{h}_\lambda) = \Gamma(\mathfrak{h}_\lambda)$.

Proposição 32. *Dado $\lambda \in \mathbb{R}$,*

(1) *Se $\lambda \in \mathbb{Q}$ então H_λ é uma curva fechada. Neste caso a topologia intrínseca de H_λ coincide com a topologia induzida por $\mathbb{T}^2$.*
(2) *Se $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ então H_λ é denso em $\mathbb{T}^2$. Neste caso a topologia intrínseca de H_λ é mais fina do que a topologia induzida por $\mathbb{T}^2$.*

Prova. Consideremos o homomorfismo $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$, $f_\lambda(t) = (1, \lambda\, t) \bmod \mathbb{Z}^2$, cuja imagem coincide com o subgrupo H_λ. É óbvio que H_λ é uma curva fechada sse a função f_λ é periódica com período inteiro, ou seja sse $(p, \lambda\, p) = (p, n)$ para certos inteiros $p, n \in \mathbb{Z}$, e esta última condição é equivalente a $\lambda = n/p \in \mathbb{Q}$. Neste caso H_λ é compacto, o que implica a coincidência das duas topologias.



Suponhamos agora que $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. O conjunto $E = \{\, n + \lambda\, m \;:\; n, m \in \mathbb{Z}\,\}$ é um subgrupo não cíclico de $\mathbb{R}$. Logo E é denso em $\mathbb{R}$, o que implica que $f_\lambda(\mathbb{Z})$ seja denso em $\{0\} \times \mathbb{T}$ e $H_\lambda = f_\lambda(\mathbb{R})$ seja denso em $\mathbb{T}^2$. Com a topologia intrínseca em H_λ, $f_\lambda : \mathbb{R} \to H_\lambda$ é um homeomorfismo. A topologia induzida por $\mathbb{T}^2$ em H_λ é menos fina. Dois pontos $p = f_\lambda(t)$ e $q = f_\lambda(s)$ estão próximos nesta topologia quando a distância entre p e q medida em $\mathbb{T}^2$ for pequena, mesmo que $|t - s|$ seja grande e $p = f_\lambda(t)$ e $q = f_\lambda(s)$ estejam afastados na topologia intrínseca. $\square$

A álgebra de Lie dos campos invariantes (à esquerda e à direita) $\mathfrak{X}_i(\mathbb{T}^2)$ é formada pelos campos de vectores constantes $X_v \equiv v$. O grupo a um parâmetro de difeomorfismos associado ao campo constante X_v é definido por $e^{tX_v}\, p = (p + t\, v) \bmod \mathbb{Z}^2$. Seja $\mathcal{G}_i(\mathbb{T}^2)$ o grupo, isomorfo a $\mathbb{T}^2$, de todas as translações em $\mathbb{T}^2$. Da proposição anterior resulta que

Exemplo 3. *A topologia intrínseca do subgrupo $G_\lambda \subset \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(\mathbb{T}^2)$ das translações paralelas ao vector $(1, \lambda)$ coincide com a topologia induzida por $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(\mathbb{T}^2)$ sse λ for racional.*

References

[1] Lang, S., *Differentiable Manifolds.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1972.
[2] Helgason, S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces.* Academic Press, 1962.
[3] Hurewicz, W. and Wallman, H., *Dimension Theory.* Princeton University Press, 1941.
[4] Omori, H., *Infinite Dimensional Lie Transformation Groups.* Lecture Notes in Mathematics 427, Springer-Verlag, 1974.
[5] Rossmann, W., *Lie Groups. An introduction through linear groups.* Oxford University Press, 2002.