Grupos de Lie

Pedro Duarte

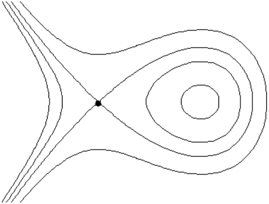
Março 2010

A aplicação Exponencial

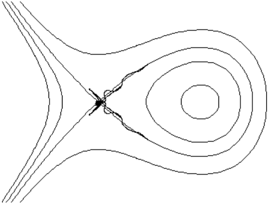
- $\mathfrak{X}^\infty(M)$ Álgebra de Lie dos campos tangentes a M
- $\mathfrak{Dif}^\infty(M)$ Grupo dos difeomorfismos de M
- $\exp : \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{Dif}^\infty(M)$, $\exp(tX) = e^{tX}$ fluxo de X
- $\mathfrak{X}^\infty(M) = T_{id}\mathfrak{Dif}^\infty(M)$
- $D\exp_0 : \mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^\infty(M)$ é a aplicação identidade.
- A exponencial não é um difeomorfismo local.
- É injectiva numa vizinhança de $id \in \mathfrak{Dif}^\infty(M)$.
- Mas **não é localmente sobrejectiva**.

A aplicação Exponencial

Seja $X \in \mathfrak{X}^\infty(M^2)$ um campo Hamiltoniano com uma conexão homoclínica numa superfície M^2.



Existem perturbações $f \approx e^{\epsilon X} \approx id$ que não podem ser da forma $f = e^Y$.



Chama-se **isotopia** a uma função suave $f : \mathbb{R} \times M \to M$ tal que $\forall\, t \in \mathbb{R},\;\; f_t = f(t,\cdot) \in \mathfrak{Dif}^\infty(M)$.

Proposição *Dada uma isotopia suave $f_t \in \mathfrak{Dif}^\infty(M)$ com $f_0 = id$ existe $X_t \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ família suave de campos tal que $e^{t\,X_t}$ tem o mesmo jacto infinito em $t = 0$ que a família f_t.*

Grupos de Difeomorfismos

Seja $G \subseteq \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ um subgrupo.

$X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ diz-se **tangente a** G sse existe uma isotopia suave $f_t \in G$ tal que $f_0 = id$ e $\frac{df_t}{dt}|_{t=0} = X$.

$T_{id}G = \{ X \in \mathfrak{X}^\infty(M) \, : \, X \text{ é tangente a } G \}$.

$\dim(G) := \dim(T_{id}G)$ diz-se a **dimensão do grupo**.

Proposição *$T_{id}G$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}^\infty(M)$.*

Grupos de Difeomorfismos

Seja $G \subseteq \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ um subgrupo.

Dado $h \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, $G \circ h = \{ g \circ h \, : g \in G \}$ diz-se uma **classe direita de G.**

Dado $g \in G \circ h$, $X \in \mathcal{X}_g^\infty(M)$ diz-se **tangente a $G \circ h$ em g** sse existe uma isotopia suave $f_t \in G \circ h$ tal que

$$f_0 = g \quad \text{e} \quad \frac{df_t}{dt}|_{t=0} = X \, .$$

$T_g(G \circ h) = \{ X \in \mathcal{X}_g^\infty(M) \, : \, X \text{ é tangente a } G \circ h \text{ em } g \}$.

Proposição *Dado $g \in G \circ h$,*

$$T_g(G \circ h) = (T_{id} G) \circ g = \{ X \circ g \, : \, X \in T_{id} G \} \, .$$

Grupos de Difeomorfismos

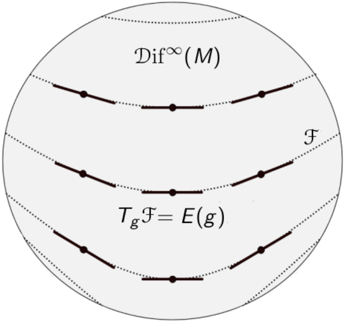
Seja $G \subseteq \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ um subgrupo com $\dim(G) < +\infty$.

Teorema

- $\exp(T_{id}G) \subseteq G$,
- $G \subset \mathcal{D}\mathrm{if}^1(M)$ *é uma subvariedade de classe* C^1,
- $\exp : T_{id}G \to G$ *é um difeo local numa viz. de* 0.

Grupos de Difeomorfismos

Para cada $g \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, seja $E(g) = (T_{id}G) \circ g \subset T_g \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$.
A função $g \mapsto E(g)$ é uma **distribuição** na variedade $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$.



Esta distribuição é integrável: $\forall\, h \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ $\exists$ folha $\mathcal{F}(h)$ tal que
$h \in \mathcal{F}(h)$ e $\forall\, g \in \mathcal{F}(h)$, $T_g \mathcal{F}(h) = E(g)$.

As folhas de E são as classes direitas $\mathcal{F}(h) = G \circ h$.

Heurística da Prova

A isotopia suave $g_t = e^{tX} \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ satisfaz

$$\frac{dg_t}{dt} = \frac{d}{dt} e^{tX} = X \circ e^{tX} \in (T_{id} G) \circ g_t = E(g_t)\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Logo $\{g_t = e^{tX}\} \subset \mathcal{F}$ para alguma folha $\mathcal{F}$ de E.

Como $g_0 = id$, $\mathcal{F} = G$ e $e^{tX} \in G$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Grupos de Difeomorfismos

Seja $G \subseteq \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ um subgrupo com $\dim(G) < +\infty$.

Define-se

$$L(G) = \{ X \in \mathfrak{X}^\infty(M) \,:\, e^{tX} \in G, \forall t \in \mathbb{R} \} .$$

Corolário $T_{id}G = L(G)$.

Transformações Equivariantes

Seja G um grupo com acções nos conjuntos M e M'.

Uma aplicação $f : M \to M'$ diz-se G-**equivariante** sse

$$f(g \cdot p) = g \cdot f(p)\,, \quad \forall\, g \in G,\ p \in M\,.$$

Relações entre Ad, ad e exp

Sejam $G \subseteq \mathfrak{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ um subgrupo e $\mathfrak{g} = T_{id}G$ com $\dim(\mathfrak{g}) < +\infty$.

A exponencial é G-equivariante

$$f \circ e^X \circ f^{-1} = e^{\mathrm{Ad}(f)X}, \quad \forall f \in G,\ X \in \mathfrak{g} .$$

O homomorfismo $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ preserva a exponencial

$$\mathrm{Ad}(e^X) = e^{\mathrm{ad} X}, \quad \forall X \in \mathfrak{g} .$$

Derivada da Exponencial

Sejam $G \subseteq \mathfrak{Dif}^\infty(M)$ um subgrupo e $\mathfrak{g} = T_{id}G$ com $\dim(\mathfrak{g}) < +\infty$.

Seja $\eta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\eta(z) := \int_0^1 e^{-tz}\, dt = \dfrac{1 - e^{-z}}{z}$.

A derivada da exponencial

$$D \exp_X(Y) = (De^X)\, \eta(\mathrm{ad} X)\, Y\,, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}\,.$$

Relação entre as operações da Álgebra e do Grupo

Sejam $G \subseteq \mathfrak{Dif}^\infty(M)$ um subgrupo e $\mathfrak{g} = T_{id} G$ com $\dim(\mathfrak{g}) < +\infty$.

A multiplicação do grupo está localmente determinada pelas operações da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ pequenos, existe um único $Z \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ próximo de 0, denotado por $Z = C(X, Y)$, tal que $e^Z = e^X \circ e^Y$.

$$C(X,Y) = \int_0^1 \eta \left(\log(e^{t\,\mathrm{ad} X} e^{t\,\mathrm{ad} Y})\right)^{-1} \left(e^{t\,\mathrm{ad} X} e^{t\,\mathrm{ad} Y} X + e^{t\,\mathrm{ad} Y} Y\right) dt$$

Em particular, $C(X, Y) \in \mathfrak{g}$!

Sejam $G \subseteq \mathfrak{Dif}^\infty(M)$ um subgrupo e $\mathfrak{g} = T_{id}G$ com $\dim(\mathfrak{g}) < +\infty$.

Fixemos $\epsilon > 0$ pequeno. Para cada $g \in G$ seja

$$\xi_g : B_\epsilon(0) \subset \mathfrak{g} \to G\,, \quad \xi_g(X) = g\, e^X\ .$$

Proposição *Para $\epsilon > 0$ suf. pequeno a família de parametrizações $\{\xi_g : B_\epsilon(0) \to G\}_{g\in G}$ forma um atlas que define uma estrutura de variedade analítica em G.*

Analiticidade do Grupo

Se $\xi_{g_1}(B_\epsilon(0)) \cap \xi_{g_2}(B_\epsilon(0)) \neq \emptyset$, então existem campos $X_1, X_2 \in B_\epsilon(0)$ tais que $g_1 \circ e^{X_1} = g_2 \circ e^{X_2}$.

Segue que

$$X \mapsto \left((\xi_{g_2})^{-1} \circ \xi_{g_1} \right)(X) = C\left(C(X_2, -X_1), X\right)$$

é uma função analítica de $X \in \mathfrak{g}$.

Grupos Topológicos

Chama-se **grupo topológico** a um grupo munido de uma topologia que torna contínuas as operações de multiplicação e de inversão.

Sejam G grupo topológico, e
G_0 a componente conexa de G que contém $e \in G$.

Proposição *G é localmente conexo $\Rightarrow$ G_0 é um subgrupo aberto e fechado de G.*

$\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ é um grupo topológico localmente conexo.

A Topologia Intrínseca

Sejam $G \subseteq \mathcal{D}\mathrm{if}^{\infty}(M)$ um subgrupo com $\dim(G) < +\infty$. G é um grupo topológico com qualquer das topologias:

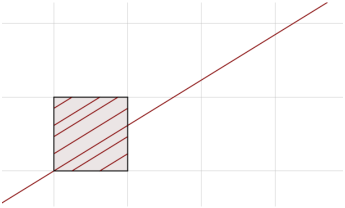
1. A topologia induzida como subespaço de $\mathcal{D}\mathrm{if}^{\infty}(M)$,
2. A topologia induzida pela família de parametrizações $\{\, \xi_g : B_\epsilon(0) \to G \,\}_{g \in G}$, que é mais fina do que a anterior.

Um Exemplo

Considere-se o homomorfismo de grupos $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $f_\lambda(t) = (t, \lambda\, t) \pmod{\mathbb{Z}^2}$. O subgrupo $H_\lambda = f_\lambda(\mathbb{R})$ é denso em $\mathbb{T}^2$ $\Leftrightarrow$ λ é irracional.

$\mathcal{G} \subset \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(\mathbb{T}^2)$: subgrupo das translações em $\mathbb{T}^2$. $\mathcal{G} \simeq \mathbb{T}^2$.

$\mathcal{H}_\lambda \subset \mathcal{G}$: subgrupo das translações em $\mathbb{T}^2$ paralelas a $(1, \lambda)$. $\mathcal{H}_\lambda \simeq H_\lambda$.



Se λ é irracional a topologia intrínseca de $\mathcal{H}_\lambda$ é mais fina do que a induzida por $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}^\infty(M)$ uma subálgebra de $\mathfrak{X}^\infty(M)$.

$$\Gamma(\mathfrak{g}) := \{\, e^{X_1} \circ \cdots \circ e^{X_k} \in \mathfrak{Dif}^\infty(M) \;:\; X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{g},\ k \in \mathbb{N} \,\}$$

diz-se o **grupo gerado pela subálgebra** $\mathfrak{g}$.

Sejam $G \subseteq \mathfrak{Dif}^\infty(M)$ um subgrupo e $\mathfrak{g} = T_{id}G$ com $\dim(\mathfrak{g}) < +\infty$.

Proposição $\Gamma(L(G)) \subseteq G$. *Além disso,*

$$\Gamma(L(G)) = G \quad \Leftrightarrow \quad G \text{ é conexo.}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subálgebras } \mathfrak{X}^\infty(M) \\ \text{com dim } < +\infty \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{subgrupos } \mathfrak{Dif}^\infty(M) \\ \text{conexos, dim } < +\infty \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \Gamma(\mathfrak{g}) \\ L(G) & \longleftarrow & G \end{array}$$

Proposição *Dada* $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{X}^\infty(M)$ *subálgebra com* $\dim \mathfrak{g} < +\infty$, $L(\Gamma(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$.

Prova. $\Gamma(\mathfrak{g}) = \cup_{k=1}^\infty V_\epsilon^k$, onde para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$V_\epsilon^k = \{ e^{X_1} \circ \ldots \circ e^{X_k} \ : \ X_1, \ldots, X_k \in B_\epsilon(0) \} .$$

$$\dim L(\Gamma(\mathfrak{g})) = \dim_{top} \Gamma(\mathfrak{g}) \leq \sup_k \dim_{top} V_\epsilon^k = \dim \mathfrak{g} .$$

Se $\mathfrak{g} \subseteq L(\Gamma(\mathfrak{g}))$ e $\dim L(\Gamma(\mathfrak{g})) = \dim \mathfrak{g}$ então $\mathfrak{g} = L(\Gamma(\mathfrak{g}))$. $\square$

A Correspondência de Lie

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subálgebras } \mathfrak{X}^\infty(M) \\ \text{com dim } < +\infty \end{array} \right\} \quad \to \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{subgrupos } \mathfrak{Dif}^\infty(M) \\ \text{conexos, dim } < +\infty \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{g} \quad \longrightarrow \quad \Gamma(\mathfrak{g})$$

Teorema *A aplicação* $\mathfrak{g} \mapsto G = \Gamma(\mathfrak{g})$ *é uma bijecção entre subálgebras de Lie com dimensão finita* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}^\infty(M)$*, e subgrupos de Lie conexos com dimensão finita* $G \subset \mathfrak{Dif}^\infty(M)$.

Grupos Abstractos

Chama-se **grupo de Lie** a um grupo G com uma estrutura de variedade suave tal que as operações de multiplicação e de inversão sejam suaves.

Para cada $g \in G$,
$L_g : G \to G$, $L_g(h) = g\,h$, diz-se uma **translação esquerda**
$R_g : G \to G$, $R_g(h) = h\,g$, diz-se uma **translação direita**

$$L_{g\,h} = L_g \circ L_h \quad \text{e} \quad R_{g\,h} = R_h \circ R_g \,, \quad \forall\, g, h \in G \,.$$

Grupos de translações em $\mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(G)$

$$\mathcal{G}_L(G) = \{\, L_g \;:\; g \in G \,\} \qquad G \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_L(G), \qquad g \mapsto L_g$$
$$\mathcal{G}_R(G) = \{\, R_g \;:\; g \in G \,\} \qquad G \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_R(G), \qquad g \mapsto R_{g^{-1}} \,.$$

Seja $X \in \mathfrak{X}^\infty(G)$,

X diz-se **invariante à esquerda** sse $(L_g)_* X = X$, $\forall g \in G$.
X diz-se **invariante à direita** sse $(R_g)_* X = X$, $\forall g \in G$.

$$\mathfrak{X}_L(G) = \{\, X \in \mathfrak{X}^\infty(G) \,:\, X \text{ é invariante à esquerda} \,\}$$
$$\mathfrak{X}_R(G) = \{\, X \in \mathfrak{X}^\infty(G) \,:\, X \text{ é invariante à direita} \,\}$$

Proposição *$\mathfrak{X}_L(G)$ e $\mathfrak{X}_R(G)$ são subálgebras de Lie de $\mathfrak{X}^\infty(G)$.*

Dado $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(G)$,

- $f \in \mathcal{G}_L(G) \quad \Leftrightarrow \quad R_g \circ f = f \circ R_g, \quad \forall g \in G.$
- $f \in \mathcal{G}_R(G) \quad \Leftrightarrow \quad L_g \circ f = f \circ L_g, \quad \forall g \in G.$

Proposição

- $L\left(\mathcal{G}_L(G)\right) = \mathfrak{X}_R(G)$,
- $L\left(\mathcal{G}_R(G)\right) = \mathfrak{X}_L(G)$,
- $\Gamma\left(\mathfrak{X}_L(G)\right) \subseteq \mathcal{G}_R(G)$, *com igualdade sse G é conexo,*
- $\Gamma\left(\mathfrak{X}_R(G)\right) \subseteq \mathcal{G}_L(G)$, *com igualdade sse G é conexo.*

Álgebra de Lie dum Grupo Abstracto

$DL_e : T_eG \to \mathfrak{X}_R(G) = T_{id}\mathcal{G}_L(G)$ é um isomorfismo

Para cada $v \in T_eG$, definimos $X_v(g) := (DR_g)_e v$.
Tem-se $X_v \in \mathfrak{X}_R(G)$.

Proposição *A derivada DL_e e a sua inversa satisfazem*
$$DL_e v = X_v \quad e \quad (DL_e)^{-1}X = X(e).$$

T_eG é uma *álgebra de Lie* com o parêntesis

$$[u, v] := [(DL_e)u, (DL_e)v](e) = [X_u, X_v](e) \; .$$

Com esta operação $\mathfrak{g} = T_eG$ diz-se a **álgebra de Lie de** G.

A representação da álgebra de Lie

Chama-se **representação adjunta** de $\mathfrak{g} = T_e G$ ao homomorfismo de álgebras $\mathrm{ad}_G : T_e G \to \mathcal{L}(T_e G)$, $\mathrm{ad}_G(v)u = [u, v]$.

O diagrama
$$\begin{array}{ccc} T_e G & \xrightarrow{DL_e} & \mathcal{X}_R(G) \\ {\scriptstyle \mathrm{ad}_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ad}} \\ \mathcal{L}(T_e G) & \xrightarrow{(DL_e)_*} & \mathcal{L}(\mathcal{X}_R(G)) \end{array}$$
é comutativo ,

com $(DL_e)_* : \mathcal{L}(T_e G) \to \mathcal{L}(\mathcal{X}_R(G))$ definida por
$$(DL_e)_* A = (DL_e) \circ A \circ (DL_e)^{-1} .$$

O par $(DL_e, (DL_e)_*)$ é um isomorfismo entre as duas representações.

A aplicação exponencial

Chama-se **exponencial** de G à aplicação $\exp_G : T_eG \to G$, $\exp_G(v) := (\exp X_v)(e)$, onde $X_v \in \mathcal{X}_R(G)$, $X_v(e) = v$.

Proposição *Para cada* $v \in T_eG$, $f_v : \mathbb{R} \to G$, $f_v(t) := \exp_G(t\,v)$ *é um homomorfismo de grupos tal que* $f_v'(0) = v$.
Em particular, $(D\exp_G)_0 = id_{T_eG}$.

O diagrama
$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{DL_e} & \mathcal{X}_R(G) \\ {\scriptstyle \exp_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{L} & \mathcal{G}_L(G) \end{array}$$
comuta .

A representação do grupo

Chama-se **representação adjunta** de G ao homomorfismo de grupos $\mathrm{Ad}_G : G \to \mathrm{Aut}(T_e G)$ definido por

$$\mathrm{Ad}_G(g)\, v := \frac{d}{dt}\left\{g\, \exp_G(t\, v)\, g^{-1}\right\}_{t=0} = D(L_g \circ R_{g^{-1}})_e(v)$$
$$= (DL_g)_{g^{-1}}(DR_{g^{-1}})_e(v) = (DR_{g^{-1}})_g(DL_g)_e(v)\ .$$

A última igualdade segue de $L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g$.

O diagrama
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}_G"'] & \mathcal{G}_L(G) \arrow[d, "\mathrm{Ad}"] \\ \mathrm{Aut}(T_e G) \arrow[r, "(DL_e)_*"] & \mathrm{Aut}(\mathcal{X}_R(G)) \end{tikzcd}$$
é comutativo ,

O par $(DL_e, (DL_e)_*)$ é um isomorfismo entre as duas representações.

Relações entre o grupo e a sua álgebra de Lie

Proposição *Quaisquer que sejam* $g \in G$, $v, w \in T_e G$,

$$\exp_G(\mathrm{Ad}_G(g)\, v) = g\, \exp_G(v)\, g^{-1}$$
$$\mathrm{Ad}_G(\exp_G(v)) = e^{\mathrm{ad}_G v}$$
$$(D \exp_G)_v\, w = (DL_{\exp_G v})_e\, \eta(\mathrm{ad}_G v)\, w$$

Teorema *Seja* G *um grupo de Lie de dimensão finita* G. *A aplicação* $\mathfrak{h} \mapsto \Gamma(\mathfrak{h}) =$ *subgrupo de* G *gerado por* $\exp_G(T_e G)$, *estabelece uma bijecção entre o conjunto das subálgebras de Lie de* $\mathfrak{g} = T_e G$, *e o conjunto dos subgrupos conexos de* G.

Relações entre o grupo e a sua álgebra de Lie

Dados $X, Y \in T_e G$ com normas suficientemente pequenas

$$C(X,Y) = \int_0^1 \eta\left(\log\left(e^{t\,\mathrm{ad} X}\, e^{t\,\mathrm{ad} Y}\right)\right)^{-1}\left(e^{t\,\mathrm{ad} X}\, e^{t\,\mathrm{ad} Y}\, X + e^{t\,\mathrm{ad} Y}\, Y\right)\, dt$$
$$= X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \dots$$

Exercício *Dado um homomorfismo suave $\phi : G \to G'$ entre dois grupos de Lie G e G',*

$$f(\exp_G(v)) = \exp_{G'}(Df_e\, v))\,, \quad \forall v \in T_e G\,.$$

Por outras palavras,
$$\begin{tikzcd} T_e G \arrow[r, "Df_e"] \arrow[d, "\exp_G"'] & T_e G' \arrow[d, "\exp_{G'}"] \\ G \arrow[r, "f"] & G' \end{tikzcd}$$
comuta.

Simetrias duma Subvariedade

Seja $S \subset M$ uma subvariedade. Chama-se **grupo das simetrias** de S ao grupo de difeomorfismos

$$\mathcal{G}(S) = \{\, f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^{\infty}(M) \,:\, f(S) = S \,\} \,.$$

Define-se

$$\mathcal{X}(S) = \{\, X \in \mathcal{X}^{\infty}(M) \,:\, X(p) \in T_p S, \ \forall p \in S \,\} \,.$$

Os elementos $X \in \mathcal{X}(S)$ dizem-se **simetrias infinitésimais** de S.

Proposição *$\mathcal{X}(S)$ é a álgebra de Lie do grupo $\mathcal{G}(S)$.*

Proposição *Se* $S = F^{-1}(0) = \cap_{i=1}^{m}\{f_i = 0\}$ *é um nível regular duma função* $F = (f_1, \ldots, f_m) : M \to \mathbb{R}^m$*, então*

$$\mathfrak{X}(S) = \{\, X \in \mathfrak{X}^{\infty}(M) \;:\; L_X f_i = 0 \;\; \textit{sobre} \;\; S,\ \forall i = 1, \ldots, m \,\} \, .$$

Prova.

$$T_p S = \cap_{i=1}^{m} \mathrm{Nuc}(Df_i)_p$$

$$(L_X f_i)(p) = (Df_i)_p X(p)$$

$\square$

Jatos

$$I(n,k) = \{\, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k \;:\; |\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \leq n \,\}$$

Seja $\qquad J^n_k(\mathbb{R}^\ell) := (\mathbb{R}^\ell)^{I(n,k)}$.

Dada $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ suave, chama-se **jato de ordem n de ϕ no ponto** x ao elemento

$$j^n_k \phi(x) := \left(\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}(x) \right)_{|\alpha| \leq n} \in J^n_k(\mathbb{R}^\ell)$$

Dada uma subvariedade $M \subseteq \mathbb{R}^\ell$,

$$J^n_k(M) := \{\, j^n_k\phi(x) \in J^n_k(\mathbb{R}^\ell) \ : \ \phi : \mathbb{R}^k \to M \ \text{ suave }, \ x \in \mathbb{R}^k \,\}$$

Se $U \subseteq \mathbb{R}^\ell$ é um aberto,

$$J^n_k(U) = \{\, \underline{u} = (u_\alpha) \in J^n_k(\mathbb{R}^\ell) \ : \ u_0 \in U \,\}$$

$J^n_k(M)$ é um fibrado sobre M com a projecção
$\pi : J^n_k(M) \to M, \quad \pi(u_\alpha)_\alpha = u_0$

Não é um fibrado vectorial!

Fórmula de Faà di Bruno

Dada uma função suave entre abertos $f : U \to V$, para cada função suave $\phi : \mathbb{R}^k \to U$, e cada $\alpha \in \mathbb{N}^k$,

$$\frac{\partial^\alpha (f \circ \phi)}{\partial x^\alpha}(x) = \sum \frac{\alpha!}{\gamma_1! \cdots \gamma_m!} D^{\sum_{i=1}^m \gamma_i} f_{\phi(x)} \left(\frac{\frac{\partial^{\beta^1} \phi}{\partial x^{\beta^1}}(x)}{(\beta^1)!}, \ldots, \frac{\frac{\partial^{\beta^m} \phi}{\partial x^{\beta^m}}(x)}{(\beta^m)!} \right)$$

soma tomada sobre todos $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{N}^m$, $m \in \mathbb{N}$, tais que

$$\gamma_1 \beta^1 + \gamma_2 \beta^2 + \ldots + \gamma_m \beta^m = \alpha \qquad \beta^i \in \mathbb{N}^k .$$

Prolongamento ao Fibrado dos Jatos

Dada uma função suave entre abertos $f : U \to V$, definimos $J^n_k f : J^n_k(U) \to J^n_k(V)$, que se diz um **prolongamento de** f, pondo

$$(J^n_k f\, \underline{u})(\alpha) = \sum \frac{\alpha!}{\gamma_1! \cdots \gamma_m!} D^{\sum_{i=1}^m \gamma_i} f_{u_0}\left(\frac{u_{\beta^1}}{(\beta^1)!}, \ldots, \frac{u_{\beta^m}}{(\beta^m)!} \right) .$$

Proposição *Para cada função suave* $\phi : \mathbb{R}^k \to U$, *o prolongamento* $J^n_k f : J^n_k(U) \to J^n_k(V)$ *actua nos jatos de ordem* n *de* ϕ *como*

$$J^n_k f \,[j^n_k \phi(x)] = j^n_k (f \circ \phi)(x) .$$

Functorialidade do Prolongamento

Proposição *Dadas funções suaves $f : U \to V$ e $g : W \to U$, definidas entre abertos de espaços euclideanos*

- $J^n_k(id_U) = id_{J^n_k(U)}$
- $J^n_k(f \circ g) = J^n_k(f) \circ J^n_k(g)$

Proposição *Se $M \subseteq \mathbb{R}^\ell$ é uma subvariedade então $J^n_k(M) \subseteq J^n_k(\mathbb{R}^\ell)$ é uma subvariedade. Além disso, se $\{\phi : U \subset \mathbb{R}^m \to M\}_i$ é um atlas de M então $\{J^n_k(\phi) : J^n_k(U) \subset J^n_k(\mathbb{R}^m) \to J^n_k(M)\}_i$ é um atlas de $J^n_k(M)$.*

Proposição *O prolongamento J^n_k é um functor da categoria das variedades na categoria dos fibrados.*

Prolongamento dum campo de vectores

Dado $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $J^n_k(e^{tX})$ define um fluxo em $J^n_k(M)$. Chama-se **prolongamento de** X ao campo de vectores

$$J^n_k(X) = \frac{d}{dt}\left\{J^n_k(e^{tX})\right\}_{t=0} \ .$$

Proposição *Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto e $X : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de vectores suave, então o prolongamento de X como campo coincide com o prolongamento de X como função.*

Sistemas de Equações Diferenciais

Consideremos o sistema de equações diferenciais de ordem n

$$\Delta \;:\qquad \Delta_i\,\phi(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

em k variáveis independentes $x \in \mathbb{R}^k$,
e ℓ variáveis dependentes $u = \phi(x) \in \mathbb{R}^\ell$.

Os gráficos das soluções ϕ do sistema Δ

$$\mathrm{graf}(\phi) = \{\, (x, \phi(x)) \,:\, x \in \mathbb{R}^k \,\}$$

são subvariedades de $M = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$.

$f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$ diz-se uma **simetria** de Δ sse f transforma gráficos de soluções de Δ em gráficos de soluções de Δ. $\mathcal{G}(\Delta)$ denotará o grupo das simetrias de Δ.

Subvariedade dum Sistema

$\mathcal{J} = \mathbb{R}^k \times J^n_k(\mathbb{R}^\ell)$ é um fibrado sobre $M = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$.

O sistema de equações diferenciais Δ pode ser descrito por m funções $\Delta_i : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$:

$$\Delta \ : \qquad \Delta_i \left(x, \left\{ \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}(x) \right\}_{|\alpha| \le n} \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

Subvariedade dum Sistema

Definimos a subvariedade $\mathcal{S}_\Delta \subset \mathcal{J}$

$$\mathcal{S}_\Delta := \{\, (x, (u_\alpha)_\alpha) \in \mathcal{J} \,:\, \Delta_i(x, (u_\alpha)_\alpha) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, m \,\}$$

Proposição *Dada uma função suave* $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$, $u = \phi(x)$ *é solução do sistema* $\Delta \quad \Leftrightarrow \quad (x, j^n_k\phi(x)) \in \mathcal{S}_\Delta,\ \forall x \in U.$

Transformada de Gráficos

Dado $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, $f(x,u) = (f_1(x,u), f_2(x,u))$,
se $f_1 \circ (id, \phi)$ for invertível então $f(\mathrm{graf}(\phi))$ é o gráfico da função

$$\Gamma_f(\phi)(x) = [\, f_2 \circ (id, \phi)\,] \circ [\, f_1 \circ (id, \phi)\,]^{-1}$$

ou seja $f(\mathrm{graf}(\phi)) = \mathrm{graf}(\Gamma_f(\phi))$. Dizemos que $\phi \mapsto \Gamma_f(\phi)$ é a **transformada de gráficos** determinada pelo difeo f.

Prolongamento dum difeomorfismo

Dado $f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M)$, existe um difeo (possivelmente parcial) $\mathrm{pr}(f) : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$, chamado o **prolongamento de** f a $\mathcal{J}$ tal que

$$\mathrm{pr}(f)(x, j^n_k \phi(x)) = (\, f_1(x, \phi(x)), \, j^n_k \Gamma_f(\phi)(\, f_1(x, \phi(x))\,)\,)$$

para toda a função suave $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$.

Proposição *Se* $f = id \times h$ *com* $h \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ *então*

- $\Gamma_f(\phi) = h \circ \phi$,
- $\mathrm{pr}(f)(x, \underline{u}) = (x, J^n_k h\, \underline{u}), \;\; \forall\, (x, \underline{u}) \in \mathcal{J}$.

Em particular, $\mathrm{pr}(f) \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(\mathcal{J})$.

Prolongamento dum difeomorfismo

Proposição *Se* $f = g \times id$ *com* $g \in \mathcal{D}\mathrm{if}^{\infty}(\mathbb{R}^k)$ *então*

- $\Gamma_f(\phi) = \phi \circ g^{-1}$,
- $\mathrm{pr}(f)(x, j^n_k\phi(x)) = (g(x), j^n_k(\phi \circ g^{-1})(g(x)))$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^k$, $\forall\, \phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ *suave.*

Proposição *O grupo das simetrias do sistema de equações diferenciais Δ é caracterizado por*

$$\mathcal{G}(\Delta) = \{ f \in \mathcal{D}\mathrm{if}^\infty(M) \, : \, \mathrm{pr}(f)(\mathcal{S}_\Delta) = \mathcal{S}_\Delta \} \, .$$

Prova.

$$\phi \text{ é solução de } \Delta \quad \Leftrightarrow \quad (x, j_k^n \phi(x)) \in \mathcal{S}_\Delta, \ \forall x.$$

$$\begin{aligned} \Gamma_f(\phi) \text{ é solução de } \Delta \quad &\Leftrightarrow \quad (x, j_k^n \Gamma_f(\phi)(x)) \in \mathcal{S}_\Delta, \ \forall x, \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{pr}(f)(x, j_k^n \phi(x)) \in \mathcal{S}_\Delta, \ \forall x \end{aligned}$$

$\square$

Prolongamento dum campo de vectores

Dado $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, existe um campo $\mathrm{pr}(X) \in \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{J})$, chamado o **prolongamento de X** a $\mathcal{J}$ definido por

$$\mathrm{pr}(X)(x, \underline{u}) := \frac{d}{dt}\left\{\mathrm{pr}(e^{tX})(x, \underline{u})\right\}_{t=0} .$$

Proposição *Se $X = (0, Y)$ com $Y \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ então*

- $\Gamma_{e^{tX}}(\phi) = e^{tY} \circ \phi$,
- $\mathrm{pr}(X)(x, \underline{u}) = (0, J_k^n Y\, \underline{u}),\ \forall\, (x, \underline{u}) \in \mathcal{J}$.

Prolongamento dum campo de vectores

Proposição *Se* $X = (Y, 0)$ *com* $Y \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^k)$ *então*

- $\Gamma_{e^{tX}}(\phi) = \phi \circ e^{-tY}$,
- $\mathrm{pr}(X)(x, \underline{u}) = (Y(x),\, F_Y(x, \underline{u})),\ \forall (x, \underline{u}) \in \mathcal{J}$. *com*

$$F_Y(x, \underline{u})_\alpha := -\sum_{i=1}^{k} \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{\partial^\beta Y_i}{\partial x^\beta}(x)\, u_{\alpha-\beta+\epsilon_i} \ .$$

Prova.

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}(X)(x, j^n_k\phi(x)) &= \frac{d}{dt}\left(e^{tY}x,\ j^n_k(\phi \circ e^{-tY})(e^{tY}x) \right)_{t=0} \\ &= (\, Y(x),\ \underbrace{L_Y(j^n_k\phi)(x) - j^n_k(L_Y\phi)(x)}_{F_Y(x,\underline{u})}\,) \end{aligned}$$

Prolongamento dum campo de vectores

$$
\begin{aligned}
F_Y(x, j_k^n\phi(x))_\alpha &= L_Y\left(\frac{\partial^\alpha\phi}{\partial x^\alpha}\right)(x) - \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)(L_Y\phi)(x) \\
&= \sum_{i=1}^k Y_i(x)\,\left(\frac{\partial^{\alpha+\epsilon_i}\phi}{\partial x^{\alpha+\epsilon_i}}\right)(x) - \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\sum_{i=1}^k Y_i(x)\,\frac{\partial^{\epsilon_i}\phi}{\partial x^{\epsilon_i}}(x) \\
&= -\sum_{i=1}^k \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{\partial^\beta Y_i}{\partial x^\beta}(x)\,\frac{\partial^{\alpha-\beta+\epsilon_i}\phi}{\partial x^{\alpha-\beta+\epsilon_i}}\ .
\end{aligned}
$$

$$
\epsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \epsilon_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \text{etc.}
$$

$\square$

Simetrias Infinitésimais do Sistema Δ

Proposição *A álgebra de Lie do grupo das simetrias $\mathcal{G}(\Delta)$ é caracterizada por*

$$\mathcal{X}(\Delta) = \{\, X \in \mathcal{X}^\infty(M) \,:\, L_{\mathrm{pr}(X)}\Delta_i = 0 \;\; \textit{sobre} \;\; \mathcal{S}_\Delta, \; \forall i = 1, \ldots, m \,\} \, .$$

Prova.

$$\mathcal{S}_\Delta = \cap_{i=1}^m \{\Delta_i = 0\}$$

Logo,

$$\mathrm{pr}(X) \text{ é tangente a } \mathcal{S}_\Delta \quad \Leftrightarrow \quad L_{\mathrm{pr}(X)}\Delta_i = 0, \;\; \forall i = 1, \ldots, m \qquad \square$$

Equações de Cauchy Riemann

$$(\Delta) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Neste caso $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{J} = \mathbb{R}^2 \times J_2^1(\mathbb{R}^2)$.

$$\mathcal{S}_\Delta = \{ (x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) \in \mathcal{J} \,:\, u_x = v_y,\ u_y = -v_x \}$$

O campo $X(x, y) = (\xi(x, y), \eta(x, y), 0, 0)$ em M tem o prolongamento

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}(X) = \Big(\xi, \eta, 0, 0, -\frac{\partial \xi}{\partial x} u_x - \frac{\partial \eta}{\partial x} u_y, -\frac{\partial \xi}{\partial y} u_x - \frac{\partial \eta}{\partial y} u_y \\ -\frac{\partial \xi}{\partial x} v_x - \frac{\partial \eta}{\partial x} v_y, -\frac{\partial \xi}{\partial y} v_x - \frac{\partial \eta}{\partial y} v_y\Big)\end{aligned}$$

Cauchy Riemann: Geradores Infinitésimais

$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x}\, u_x + \frac{\partial \eta}{\partial x}\, u_y &= \frac{\partial \xi}{\partial y}\, v_x + \frac{\partial \eta}{\partial y}\, v_y \\ \frac{\partial \xi}{\partial y}\, u_x + \frac{\partial \eta}{\partial y}\, u_y &= -\frac{\partial \xi}{\partial x}\, v_x - \frac{\partial \eta}{\partial x}\, v_y \end{aligned}$$

Escolhendo $\;u_x = v_y = 0\;$ e $\;u_y = 1 = -v_x \;\Rightarrow$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$\Rightarrow \quad X$ holomórfico $\quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}(\Delta)$ contém o grupo das transformações holomórficas.

Simetrias dum Campo

$$(\Delta) \quad \frac{dx}{dt} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Neste caso $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{J} = \mathbb{R} \times J^1_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{S}_\Delta = \{ (t, x, v) \in \mathcal{J} \,:\, F(t, x, v) := v - X(x) = 0 \}$$

O campo $Z(t, x) = (0, \xi(x))$ em M tem o prolongamento

$$\mathrm{pr}(Z)(t, x, v) = (0, \xi(x), D\xi_x\, v)$$

Simetrias dum Campo

$$v = X(x) \;\Rightarrow\; L_{\mathrm{pr}(Z)} F(t,x,v) = D\xi_x\, v - DX_x\, \xi(x) = 0$$

Escolhendo $\quad v = X(x) \quad \Rightarrow$

$$[X,\xi](x) = D\xi_x\, X(x) - DX_x\, \xi(x) = 0$$

$\Rightarrow \quad \xi$ comuta com $X \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{X}(\Delta)$ contém a álgebra de Lie

$$\{\, (0, Y) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \;:\; [X, Y] = 0 \,\}\,.$$

Referência

Peter Olver, **Lie Groups and Differential Equations**
Graduate Texts in Mathematics 107, Springer Verlag

O grupo 'Geral Linear Real' $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

Seja V um espaço vectorial real.

$\mathrm{gl}(V) := \mathcal{L}(V)$ é uma álgebra de Lie $\quad ([A, B] := A\,B - B\,A)$.

$\mathrm{GL}(V) := \mathrm{Aut}(V)$ é o grupo de Lie associado.

Como casos particulares definimos

$$\mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) := \mathrm{gl}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) := \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$$

Identificamos as aplicações lineares em $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ e $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ com as **matrizes reais** que as representam relativamente à base canónica.

O grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$

$$\dim \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \dim \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) = n^2$$

O grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ é desconexo com duas componentes conexas:

- $\mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \,:\, \det A > 0 \,\}$
- $\mathrm{GL}_-(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \,:\, \det A < 0 \,\}$

$\mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})$ é um subgrupo aberto de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$

O grupo 'Geral Linear Complexo' $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Seja V um espaço vectorial complexo.

$\mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V) := \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V)$ é uma álgebra de Lie.

$\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V) := \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ é o grupo de Lie associado.

Como casos particulares definimos

$$\mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) := \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \quad \text{e} \quad \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) := \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$$

Identificamos as aplicações lineares complexas em $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ e $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ com as **matrizes complexas** que as representam.

O grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é uma variedade analítica complexa

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) = n^2$$

$$\dim \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \dim \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) = 2n^2$$

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é um grupo conexo

Relações entre os grupos $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ e $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$

$$\mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{gl}(n,\mathbb{C}) \subset \mathrm{gl}(2n,\mathbb{R})$$
$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$$

- $A \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$ admite uma extensão linear $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$
- $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \;\; i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \;\; J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$

  $\forall\, A \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C}), \;\; Z = (x,y),$

$$\begin{aligned} A\,Z &= A\,(x+iy) \\ &= \{\,(\Re\mathrm{e}A)x - (\Im\mathrm{m}A)y\,\} + i\,\{\,(\Im\mathrm{m}A)x + (\Re\mathrm{e}A)y\,\} \\ &= \begin{pmatrix} \Re\mathrm{e}A & -\Im\mathrm{m}A \\ \Im\mathrm{m}A & \Re\mathrm{e}A \end{pmatrix} Z \end{aligned}$$

- $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C}) = \{\,A \in \mathrm{gl}(2n,\mathbb{R}) \;:\; A\,J = J\,A\}$
- $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) = \{\,A \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R}) \;:\; A\,J = J\,A\}$

Relação de Conjugação

Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$A, B \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$ dizem-se **conjugadas** sse $\exists\, c \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $B = c^{-1} A\, c$. A **relação de conjugação** é de equivalência.

O grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ actua por conjugação no grupo e na álgebra

- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $(c, a) \mapsto c^{-1} a\, c$.
- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \times \mathrm{gl}(n, \mathbb{K}) \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$, $(c, A) \mapsto c^{-1} A\, c$. Esta acção corresponde à representação adjunta $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{gl}(n, \mathbb{K}))$, $\mathrm{Ad}(c)\, A = c^{-1} A\, c$.

As *classes de conjugação* são as *órbitas* por estas acções

$$\mathrm{Conj}(A) = \{\, c^{-1} A\, c \;:\; c \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \,\} \,.$$

Matrizes Nilpotentes

Seja $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$.
A diz-se **nilpotente** sse $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.
A diz-se **triangular superior estrita** sse $a_{i,j} = 0, \forall\, j \leq i$.

A triangular superior estrita $\Rightarrow$ A nilpotente
Sejam $V_i = \mathrm{Nuc}(A^i)$, $i = 1, \ldots, k$

$$V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{k-1} \subset V_k = \mathbb{C}^n$$

$$A\, V_i = V_{i-1}\,, \quad \forall\, i = 1, \ldots, k\ .$$

Uma base $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{C}^n$ diz-se **subordinada à flag** $\{V_i\}_i$ sse $v_j \in V_\ell$ sempre que $j \leq \dim V_\ell$.
A matriz de A numa base subordinada à flag $\{V_i\}_i$ é triangular superior estrita.

Matrizes Nilpotentes

A matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

diz-se um **bloco de Jordan nilpotente** .

Temos $\quad \mathrm{Nuc}(B^i) = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$

$$\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \ldots \subset \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$$

$$0 \overset{A}{\leftarrow} e_1 \overset{A}{\leftarrow} e_2 \overset{A}{\leftarrow} \ \ldots \ e_{n-1} \overset{A}{\leftarrow} e_n$$

Matrizes Nilpotentes

Toda a matriz nilpotente $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ admite uma base formada por um número finito de cadeias da forma

$$0 \overset{A}{\leftarrow} v_1 \overset{A}{\leftarrow} v_2 \overset{A}{\leftarrow} \ \ldots \ v_{k-1} \overset{A}{\leftarrow} v_k \ .$$

Relativamente a uma tal base, A é representada por uma matriz diagonal por blocos com blocos de Jordan nilpotentes na diagonal.

Matrizes Unipotentes

Seja $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$.

A diz-se **unipotente** sse $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $(A - I)^k = 0$.

A diz-se **triangular superior** sse $a_{i,j} = 0$, $\forall\, j < i$.

A triangular superior com 1's na diagonal $\Rightarrow$ A unipotente

A nilpotente $\Rightarrow$ e^A unipotente

B unipotente $\Rightarrow$ $\log B = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (B - I)^k$ nilpotente

Matrizes Unipotentes

$$\begin{array}{lclcl} A \text{ nilpotente} & \Rightarrow & \mathrm{spec}(e^A) = \{1\} & \Rightarrow & \log e^A = A \\ B \text{ unipotente} & \Rightarrow & \mathrm{spec}(B) = \{1\} & \Rightarrow & e^{\log B} = B \end{array}$$

Proposição *A aplicação exponencial é injectiva em qualquer álgebra de Lie formada por matrizes nilpotentes.*

Matrizes Semisimples

Seja $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$.

A diz-se **semisimples** sse A for diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Proposição *São equivalentes as afirmações:*

- *A é semisimples,*
- *$\exists$ base de $\mathbb{C}^n$ formada por vectores próprios de A,*
- *$\exists$ decomposição $\mathbb{C}^n = \oplus_i V_i$, $A\,V_i \subseteq V_i$, tal que $A|_{V_i} = \lambda_i\, I_{V_i}$,*
- *$\forall\, E \subseteq \mathbb{C}^n$ subespaço com $A\,E \subseteq E$, $\exists\, F \subseteq \mathbb{C}^n$ subespaço tal que $A\,F \subseteq F$ e $\mathbb{C}^n = E \oplus F$.*

Teorema de Jordan

Teorema *Dada* $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$, *existe uma decomposição única*

$$A = S + N \qquad \textit{tal que}$$

- $S, N \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$,
- S *é semisimples,*
- N *é nilpotente,*
- $S\, N = N\, S$.

Além disso, N *e* S *são funções polinomiais de* A.

Teorema Chinês dos Restos

Teorema $\forall\ p_1(\lambda), \ldots, p_n(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, *polinómios primos entre si,* $\forall\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, *existe um polinómio* $Q(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ *tal que*

$$Q(\lambda) \equiv a_i \mod p_i(\lambda),\ \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

A solução do sistema de congruências é única $\bmod\ p_1(\lambda) \cdots p_n(\lambda)$.

$$\frac{\mathbb{C}[\lambda]}{(p_1(\lambda) \cdots p_n(\lambda))} \simeq \frac{\mathbb{C}[\lambda]}{(p_1(\lambda))} \oplus \ldots \oplus \frac{\mathbb{C}[\lambda]}{(p_n(\lambda))}$$

$$Q(\lambda) \mod p_1 \cdots p_n \quad \leftrightarrow \quad (Q(\lambda) \mod p_1, \ldots, Q(\lambda) \mod p_n)$$

Prova do Teorema de Jordan

Seja $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$ com $\mathrm{spec}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$.

$n_i =$ multiplicidade algébrica de λ_i.

$V_{\lambda_i} := \mathrm{Nuc}(A - \lambda_i I)^{n_i}$

$\mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$ (Decomposição Espectral de A)

Os polinómios $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$, são primos entre si

$\exists\ Q(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda] \quad \forall\, i = 1, \ldots, k \quad Q(\lambda) \equiv \lambda_i \mod (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$.

$S = Q(A) = \lambda_i I$ em $V_{\lambda_i} \quad \Rightarrow \quad S$ é semisimples

$N = A - Q(A) = A - \lambda_i I$ em $V_{\lambda_i} \quad \Rightarrow \quad N$ é nilpotente

Álgebra comutativa gerada por uma matriz

Dada $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ define-se a álgebra gerada por A como
$\mathcal{A}(A) = \{\, Q(A) \,:\, Q(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda] \,\}$.

Seja $P_A(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ o polinómio mínimo tal que $P(A) = 0$.
Então $\mathcal{A}(A) \simeq \mathbb{C}[\lambda]/(P_A(\lambda))$.
Se $b \in \mathcal{A}(A)$ é invertível $\Rightarrow$ $b^{-1} \in \mathcal{A}(A)$

Proposição *Dada uma função analítica $\varphi(z)$ em $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, e dada $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, se $\mathrm{spec}(A) \subset \Omega$ então*

$$\varphi(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\zeta)\,(\zeta\, I - A)^{-1}\, d\zeta \;\in \mathcal{A}(A)$$

$\forall\, \Gamma \subset \Omega$ *contorno simples tal que* $\mathrm{spec}(A) \subset int(\Gamma)$.

Blocos de Jordan Complexos

Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, a matriz

$$B_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$$

diz-se um **bloco de Jordan complexo** .

Corolário *Toda a matriz* $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ *é conjugada a uma matriz diagonal por blocos* $A' = diag(J_1, \ldots, J_m)$ *com cada* J_i *bloco de Jordan complexo.*

Blocos de Jordan Reais

Se $\lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad B_{\lambda,n}$ diz-se um **bloco de Jordan real**.
A matriz

$$B_{\alpha,\beta,n} = \begin{pmatrix} C & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C \end{pmatrix} \in \mathrm{gl}(2n, \mathbb{C})$$

$$\text{onde} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

diz-se também um **bloco de Jordan real**.

Blocos de Jordan Reais

Corolário *Toda a matriz $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ é conjugada a uma matriz diagonal por blocos $A' = diag(J_1, \ldots, J_m)$ com cada J_i bloco de Jordan real.*

Se $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathrm{spec}(A)$ então $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta \in \mathrm{spec}(A)$

$$\begin{pmatrix} B_{\lambda,n} & 0 \\ 0 & B_{\overline{\lambda},n} \end{pmatrix} \quad \text{é conjugada a} \quad B_{\alpha,\beta,n}$$

Proposição $\exp : \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *é sobrejectiva.*
Em particular, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *é conexo.*

Toda a matriz semisimples é conjugada a uma matriz diagonal.

d diagonal invertível $\Rightarrow$ $d = e^D$ com D diagonal.

s semisimples invertível $\Rightarrow$ $s = e^S$ com S semisimples.

Prova do Caso Geral

$$a = s + n = \underbrace{s}_{\text{inv.}} \underbrace{(I + s^{-1}n)}_{\text{unip.}} = e^{s_1}\, e^{n_1} = e^{s_1 + n_1}$$

$s \in \mathcal{A}(a)$ é semisimples com $\mathrm{spec}(s) = \mathrm{spec}(a)$

$\Rightarrow$ $s = e^{s_1}$ com $s_1 = \log s \in \mathcal{A}(a)$ (caso anterior)

$\Rightarrow$ $s^{-1}n \in \mathcal{A}(a)$ nilpotente

$\Rightarrow$ $I + s^{-1}n \in \mathcal{A}(a)$ unipotente

$\Rightarrow$ $I + s^{-1}n = e^{n_1}$ com $n_1 \in \mathcal{A}(a)$ nilpotente

$\Rightarrow$ $s_1\, n_1 = n_1\, s_1$

$\Rightarrow$ $e^{s_1}\, e^{n_1} = e^{s_1 + n_1}$.

A exponencial $\exp : \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})$

Proposição $\exp : \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})$ *não é sobrejectiva.*
int $(\,\mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R}) - \exp \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})\,) \neq \emptyset$ *.*

Se $a \in \mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})$ tem um valor próprio real negativo com multiplicidade algébrica ímpar então $a \notin \exp \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$.

A exponencial $\exp : \mathrm{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$

Proposição $\forall\ A, A' \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$,
$\|A\|, \|A'\| < \pi$ e $e^A = e^{A'} \ \Rightarrow\ A = A'$.

Prova.

$$A = S + N \qquad A' = S' + N'$$

$$\underbrace{e^S}_{\text{ss}} + \underbrace{e^S(e^N - I)}_{\text{nil.}} = e^S e^N = e^{S'} e^{N'} = \underbrace{e^{S'}}_{\text{ss}} + \underbrace{e^{S'}(e^{N'} - I)}_{\text{nil.}}$$

$\Rightarrow\ e^S = e^{S'}$ e $e^N = e^{N'} \ \Rightarrow\ N = N'$

$\Rightarrow\ S$ e S' admitem uma base de vectores próprios comum em que os valores próprios diferem por múltiplos inteiros de $2\pi i$

$\Rightarrow\ S = S'$ porque $\mathrm{spec}(S) = \mathrm{spec}(A) \subset B(0,\pi)$ e $\mathrm{spec}(S') = \mathrm{spec}(A') \subset B(0,\pi)$ $\square$

Proposição $\det_{\mathbb{K}} : \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$ *é um homomorfismo de grupos.*

Proposição $\forall\, A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \subset \mathrm{gl}(2n, \mathbb{R})$,

$$\det_{\mathbb{R}}(A) = |\det_{\mathbb{C}}(A)|^2 \quad e \quad \mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(A) = 2\,\Re\mathrm{e}(\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(A)).$$

Prova.
Se $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ tem valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
$\Rightarrow$ $A \in \mathrm{gl}(2n, \mathbb{R})$ tem valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}$. $\square$

Relação entre o Determinante e o Traço

Proposição $\forall\, A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K}),\;\; D(\det_{\mathbb{K}})_I(A) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(A).$

Prova.

Se A tem valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$,

$$\begin{aligned} D\det_I(A) &= \frac{d}{dt}\left\{\det e^{tA}\right\}_{t=0} = \frac{d}{dt}\left\{e^{t\lambda_1} \ldots e^{t\lambda_n}\right\}_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left\{e^{t(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}\right\}_{t=0} \\ &= \left\{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\, e^{t(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}\right\}_{t=0} \\ &= \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \mathrm{tr}(A)\ . \end{aligned}$$

$\square$

Relação entre o Determinante e o Traço

Corolário $\forall\, A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K}), \quad \det_{\mathbb{K}}(e^A) = e^{\mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(A)}$.

Proposição $\forall\, A, B \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K}), \quad \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}[A, B] = 0$.

Prova.

$\mathrm{tr}_{\mathbb{K}}$ é invariante por conjugação

As matrizes $A\,B$ e $B\,A$ são conjugadas, $B\,A = B\,(A\,B)\,B^{-1}$

$\Rightarrow \; \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(A\,B) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(B\,A)$

$\Rightarrow \; \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}([A, B]) = 0$

$\square$

O grupo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$

$$\mathrm{sl}(n, \mathbb{K}) = \{\, A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K}) \ : \ \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(A) = 0 \,\}$$

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) = \{\, a \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \ : \ \det_{\mathbb{K}}(a) = 1 \,\}$$

Os grupos $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ e $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ são conexos.

Exponencial de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$

Proposição $\exp : \mathrm{sl}(n, \mathbb{K}) \to \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ *não é sobrejectiva* *($\forall\, n \geq 2$)*

Proposição $\exp(\, \mathrm{sl}(n, \mathbb{C})\,)$ *é denso em* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$*.*
Em particular, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ *é conexo.*

Toda a matriz semisimples de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ está em $\exp \mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$.
As matrizes semisimples são densas em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.

Proposição $int\,(\, \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) - \exp \mathrm{sl}(n, \mathbb{R})\,) \neq \emptyset$;.

O grupo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$

$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ é uma variedade analítica complexa

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{sl}(n, \mathbb{C}) = n^2 - 1$$

$$\dim \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) = \dim \mathrm{sl}(n, \mathbb{C}) = 2n^2 - 2$$

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ é difeomorfo a $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^*$

porque $\det_{\mathbb{K}} : \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ é um epimorfismo factorizável.

Factorização dum Grupo

Sejam G e G' grupos de Lie, e $\varphi : G \to G'$ um homomorfismo suave de grupos.

$\varphi : G \to G'$ diz-se um **epimorfismo factorizável** sse $\exists\ \psi : G' \to G$ suave tal que $\varphi \circ \psi = id_{G'}$.

Proposição *Sejam* $\varphi : G \to G'$ *um epimorfismo factorizável e* $H = \mathrm{Nuc}(f)$. *Então* G *é difeomorfo a* $H \times G'$.

Prova.

$$H' = \psi(G') \ \Rightarrow\ G' \simeq H',\ \ G = H\,H' \ \text{ e } \ H \cap H' = \{1\}$$

A aplicação $\Phi : G \to H \times G'$, $\Phi(g) = \big(g\,(\psi \circ \varphi)(g)^{-1}, \varphi(g)\,\big)$, é um difeomorfismo com inverso $\Phi^{-1}(h, g') = h\,\psi(g')$. $\square$

Equivalência por Homotopia

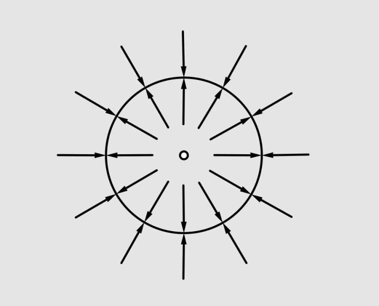
Sejam X e Y espaços topológicos.

X e Y dizem-se **homotopicamente equivalentes** sse
$\exists\ f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ contínuas tais que

- $f \circ g$ é homotópica a id_Y,
- $g \circ f$ é homotópica a id_X.

Exemplo de Equivalência por Homotopia

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ é homotopicamente equivalente a $\mathbb{S}^1$



$$p : \mathbb{C}^* \to \mathbb{S}^1 \qquad p(z) = z/\left|z\right|$$
$$i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}^* \qquad i(z) = z$$

Relação entre as topologias de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ e $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \quad \text{é difeomorfo a } \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$$

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \quad \text{é homotopicamente equivalente a } \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{S}^1$$

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \text{é difeomorfo a } \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*$$

$$\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}) \quad \text{é difeomorfo a } \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+$$

$$\left(\quad \det : \mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \text{ é um epimorfismo factorizável.} \quad \right)$$

$$\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}) \quad \text{é homotopicamente equivalente a } \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$$

Classes de conjugação em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$

determinante e traço são invariantes por conjugação

$$\Downarrow$$

$\mathrm{sl}(n, \mathbb{K})$ e $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ são saturados por conjugação

$\mathrm{sl}(n, \mathbb{K})$ é um ideal de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$

$\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ é um subgrupo normal de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$

$$\Downarrow$$

As matrizes diagonais por blocos de Jordan em $\mathrm{sl}(n, \mathbb{K})$, resp. em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ são representantes das classes de conjugação em $\mathrm{sl}(n, \mathbb{K})$, resp. em $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$.

Classes de conjugação em $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0 \quad (\text{ Hiperbólico }) \overset{\exp}{\to} \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad \theta \neq 0 \quad (\text{ Elíptico }) \overset{\exp}{\to} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{ Parabólico }) \overset{\exp}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Não foi considerada a classe da matriz nula

Classes de conjugação em $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \lambda > 0 \ \text{ ou } \ \lambda < 0\,, \ |\lambda| \neq 1 \quad (\text{ Hiperbólico })$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1\,, \ \beta \neq 0 \quad (\text{ Elíptico })$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{ Parabólico })$$

classes fora de $\exp(\,\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})\,)$

Não foi considerada a classe da matriz identidade

Classes de conjugação em $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0 \overset{\exp}{\rightarrow} \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overset{\exp}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Não foi considerada a classe da matriz nula

Classes de conjugação em $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \qquad \lambda \neq 0,\ 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

classes fora de $\exp(\,\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})\,)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} i\pi & -1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}$$

Não foi considerada a classe da matriz identidade

Grupo Ortogonal

Chama-se **espaço Euclideano** a um espaço vectorial real V munido dum produto interno $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$.

Um operador $A \in \mathrm{gl}(V)$ diz-se **ortogonal** sse
$$(A\,x) \cdot (A\,y) = x \cdot y, \quad \forall\, x, y \in V.$$

Chama-se **adjunto** de $A \in \mathrm{gl}(V)$ ao operador $A^* \in \mathrm{gl}(V)$ tal que
$$(A^*\,x) \cdot y = x \cdot (A\,y), \quad \forall\, x, y \in V.$$

Proposição $\forall\, A \in \mathrm{gl}(V)$, *$A$ é ortogonal* $\Leftrightarrow$ $A^*\,A = I$.

$$\mathrm{O}(V) := \{\, A \in \mathrm{GL}(V) \,:\, A \ \text{ é ortogonal } \,\}$$
$$\mathrm{SO}(V) := \{\, A \in \mathrm{O}(V) \,:\, \det(A) = 1 \,\}$$

Álgebra de Lie dos operadores Antissimétricos

Um operador $A \in \mathrm{gl}(V)$ diz-se **antissimétrico** sse $A^* = -A$.

$$\mathrm{so}(V) := \{ A \in \mathrm{gl}(V) \ : \ A \ \text{é antissimétrico} \ \}$$

Proposição $\mathrm{so}(V)$ *é uma álgebra de Lie.*

$$\begin{aligned} [A, B]^* &:= (A\,B - B\,A)^* = (A\,B)^* - (B\,A)^* \\ &= B^* A^* - A^* B^* = [B^*, A^*] \\ &= [-B, -A] = -[A, B] \end{aligned}$$

Relações entre $\mathrm{O}(V)$, $\mathrm{SO}(V)$ e $\mathrm{so}(V)$

Proposição $\mathrm{O}(V)$ *é uma variedade compacta desconexa.*

$$a \quad \text{ortogonal} \quad \Rightarrow \quad \|a\| = 1.$$

Proposição $\mathrm{SO}(V)$ *é um subgrupo* **aberto e conexo** *de* $\mathrm{O}(V)$. *Ele é a componente conexa de* $\mathrm{O}(V)$ *que contém a identidade.*

Proposição $\mathrm{so}(V)$ *é a álgebra de Lie do grupo conexo* $\mathrm{SO}(V)$.

$$\begin{gathered} e^{t\,A} \text{ é ortogonal}, \; \forall\, t \in \mathbb{R} \\ \Updownarrow \\ A \text{ é antissimétrica} \end{gathered}$$

$\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ e $\mathrm{so}(n)$

Considerando em $\mathbb{R}^n$ a estrutura Euclideana canónica definem-se

$$\mathrm{O}(n) := \mathrm{O}(\mathbb{R}^n) = \{\, a \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \;:\; a^T\, a = I \,\}$$
$$\mathrm{SO}(n) := \mathrm{SO}(\mathbb{R}^n) = \{\, a \in \mathrm{O}(n) \;:\; \det(a) = 1 \,\}$$
$$\mathrm{so}(n) := \mathrm{so}(\mathbb{R}^n) = \{\, A \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) \;:\; A^T + A = 0 \,\}$$

$$\dim \mathrm{so}(n) = \dim \mathrm{SO}(n) = \dim \mathrm{O}(n) = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

Se $E_{i,j} = (\delta_{s,i}\delta_{j,r})_{s,r}$ a família de matrizes

$$E_{i,j} - E_{j,i} \qquad 1 \le i < j \le n$$

forma uma base de $\mathrm{so}(n)$.

Exponencial de $\mathrm{SO}(n)$

Proposição *Toda a matriz $A \in \mathrm{so}(n)$ é semisimples com* $\mathrm{spec}(A) \subset \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \Re\mathrm{e}(z) = 0 \}$.

Proposição *Toda a matriz $a \in \mathrm{O}(n)$ é semisimples com* $\mathrm{spec}(a) \subset \mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1 \}$.

Proposição $\exp : \mathrm{so}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ *é sobrejectiva.*
Em particular $\mathrm{SO}(n)$ *é conexo.*

Prova. $g \in \mathrm{SO}(n) \;\Rightarrow$ o valor próprio -1 tem multiplicidade par
$\Rightarrow$ podemos conjugar g a uma matriz diagonal por blocos de Jordan reais com uma das duas formas seguintes

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \qquad (1) = \exp(0)$$

Note que $$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$ $\square$

Grupo Unitário

Chama-se **espaço Hilbertiano** a um espaço vectorial complexo V munido dum produto interno complexo $\cdot : V \times V \to \mathbb{C}$.

Um operador $A \in \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ diz-se **unitário** sse
$$(A\,x) \cdot (A\,y) = x \cdot y, \quad \forall\, x, y \in V\,.$$

Chama-se **adjunto** de $A \in \mathrm{gl}(V)$ ao operador $A^* \in \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ tal que
$$(A^*\,x) \cdot y = x \cdot (A\,y), \quad \forall\, x, y \in V\,.$$

Proposição $\forall\, A \in \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$, *$A$ é unitário* $\Leftrightarrow$ $A^*\,A = I\,.$

$$\mathrm{U}(V) := \{\, A \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V) \;:\; A \text{ é unitário } \}$$
$$\mathrm{SU}(V) := \{\, A \in \mathrm{U}(V) \;:\; \det_{\mathbb{C}}(A) = 1 \,\}$$

Álgebras de Lie de operadores Anti-hermíticos

Um operador $A \in \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ diz-se **anti-hermítico** sse $A^* = -A$.

$$\mathrm{u}(V) := \{ A \in \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V) \,:\, A \text{ é anti-hermítico } \}$$

$$\mathrm{su}(V) := \{ A \in \mathrm{u}(V) \,:\, \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(A) = 0 \}$$

Proposição $\mathrm{u}(V)$ *e* $\mathrm{su}(V)$ *são álgebras de Lie.*

Prova.

$$\begin{aligned} [A, B]^* &:= (A\,B - B\,A)^* = (A\,B)^* - (B\,A)^* \\ &= B^* A^* - A^* B^* = [B^*, A^*] \\ &= [-B, -A] = -[A, B] \end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}([A, B]) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(A\,B) - \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(B\,A) = 0$$

□

Relações entre $\mathrm{U}(V)$ e $\mathrm{u}(V)$

Proposição $\mathrm{U}(V)$ *é uma variedade compacta conexa.*

$$a \quad \text{unitário} \quad \Rightarrow \quad \|a\| = 1.$$

Proposição $\mathrm{u}(V)$ *é a álgebra de Lie do grupo conexo* $\mathrm{U}(V)$.

$$\begin{gathered} e^{t\,A} \text{ é unitário }, \forall\, t \in \mathbb{R} \\ \Updownarrow \\ A \text{ é anti-hermítica} \end{gathered}$$

$\mathrm{U}(V)$ não é saturado pela relação de conjugação, i.e.,
não é um subgrupo normal de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$.

Relações entre $\mathrm{SU}(V)$ e $\mathrm{su}(V)$

Proposição $\mathrm{SU}(V)$ *é um subgrupo compacto de* $\mathrm{U}(V)$.

Proposição $\mathrm{su}(V)$ *é um ideal de* $\mathrm{u}(n)$,
$\mathrm{su}(V)$ *é a álgebra de Lie do grupo conexo* $\mathrm{SU}(V)$.

Proposição $\mathrm{SU}(V)$ *é um subgrupo normal de* $\mathrm{U}(V)$.

$$\{I\} \to \mathrm{SU}(V) \hookrightarrow \mathrm{U}(V) \stackrel{\det_{\mathbb{C}}}{\to} \mathbb{S}^1 \to \{1\}$$

Proposição $\mathrm{U}(V)$ *é difeomorfo a* $\mathrm{SU}(V) \times \mathbb{S}^1$.

Prova. $\det_{\mathbb{C}} : \mathrm{U}(n) \to \mathbb{S}^1$ é um epimorfismo factorizável. $\square$

$\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{u}(n)$

Considerando em $\mathbb{C}^n$ a estrutura Hilbertiana canónica definem-se

$$A^* = \overline{A}^T \qquad \text{adjunta complexa} = \text{transconjugada}$$

$$\mathrm{U}(n) := \mathrm{U}(\mathbb{C}^n) = \{\, A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \,:\, A^* A = I \,\}$$
$$\mathrm{u}(n) := \mathrm{u}(\mathbb{C}^n) = \{\, A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \,:\, A^* + A = 0 \,\}$$

$$\dim \mathrm{u}(n) = \dim \mathrm{U}(n) = n^2$$

A família de matrizes

$$\underbrace{E_{k,j} - E_{j,k},}_{\text{anti-sim. real}} \quad \underbrace{i\, E_{k,k}, \quad i\, (E_{k,j} + E_{j,k}),}_{\text{sim. imaginária}} \qquad 1 \le k < j \le n$$

forma uma base de $\mathrm{u}(n)$.

$\mathrm{SU}(n)$ e $\mathrm{su}(n)$

Considerando em $\mathbb{C}^n$ a estrutura Hilbertiana canónica definem-se

$$\mathrm{SU}(n) := \mathrm{SU}(\mathbb{C}^n) = \{\, A \in \mathrm{U}(n) \;:\; \det_{\mathbb{C}}(A) = 1 \,\}$$
$$\mathrm{su}(n) := \mathrm{su}(\mathbb{C}^n) = \{\, A \in \mathrm{u}(n) \;:\; \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(A) = 0 \,\}$$

$$\dim \mathrm{su}(n) = \dim \mathrm{SU}(n) = n^2 - 1$$

A família de matrizes

$$\underbrace{E_{k,j} - E_{j,k}}_{\text{anti-sim. real}}, \quad \underbrace{i\,(E_{k,k} - E_{n,n}), \quad i\,(E_{k,j} + E_{j,k})}_{\text{sim. imaginária tr=0}}, \qquad 1 \leq k < j \leq n$$

forma uma base de $\mathrm{su}(n)$.

Exponencial de $\mathrm{SU}(n)$ e $\mathrm{U}(n)$

Proposição *Toda a matriz* $A \in \mathrm{u}(n, \mathbb{R})$ *é semisimples com* $\mathrm{spec}(A) \subset \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \Re\mathrm{e}(z) = 0 \}$.

Proposição *Toda a matriz* $a \in \mathrm{U}(n)$ *é semisimples com* $\mathrm{spec}(a) \subset \mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1 \}$.

Proposição $\exp : \mathrm{su}(n) \to \mathrm{SU}(n)$ *e* $\exp : \mathrm{u}(n) \to \mathrm{U}(n)$ *são sobrejectivas. Em particular* $\mathrm{SU}(n)$ *e* $\mathrm{U}(n)$ *são conexos.*

Prova. Exercício. □

Grupo Simpléctico

Chama-se **espaço simpléctico** a um espaço vectorial V, sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, munido duma 2-forma $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ anti-simétrica e não degenerada.

Um operador $A \in \mathrm{gl}(V)$ diz-se ω-**simpléctico** sse

$$\omega(A\,x, A\,y) = \omega(x, y), \quad \forall\, x, y \in V.$$

Chama-se ω-**adjunto** de $A \in \mathrm{gl}(V)$ ao operador $A^\sharp \in \mathrm{gl}(V)$ tal que

$$\omega(A^\sharp\, x, y) = \omega(x, A\, y), \quad \forall\, x, y \in V.$$

Proposição $\sharp : \mathrm{gl}(V) \to \mathrm{gl}(V)$ *é um automorfismo involutivo de álgebras associativas com identidade.*

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(V,\omega) &:= \{\, g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V) \;:\; g \;\text{ é }\; \omega\text{-simpléctico} \;\} \\ &= \{\, g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V) \;:\; g^\sharp\, g = I \,\} \end{aligned}$$

Álgebra de Lie dos operadores ω-antissimétricos

Um operador $A \in \mathrm{gl}(V)$ diz-se ω-**antissimétrico** sse $A^\sharp = -A$.

$$\mathrm{sp}(V,\omega) := \{\, A \in \mathrm{gl}(V) \,:\, A^\sharp = -A \,\}$$

Proposição $\mathrm{sp}(V,\omega)$ *é uma álgebra de Lie.*

$$\begin{aligned}
[A,B]^\sharp &:= (A\,B - B\,A)^\sharp = (A\,B)^* - (B\,A)^\sharp \\
&= B^\sharp A^\sharp - A^\sharp B^\sharp = [B^\sharp, A^\sharp] \\
&= [-B,-A] = -[A,B]
\end{aligned}$$

Relação entre $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ e $\mathrm{sp}(V, \omega)$

Proposição $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ *é um grupo conexo e não compacto.*

Proposição $\mathrm{sp}(V, \omega)$ *é a álgebra de Lie de* $\mathrm{Sp}(V, \omega)$*.*

$$(e^A)^\sharp = e^{A^\sharp}$$

$$\begin{gathered} e^{t\,A} \text{ é } \omega\text{-simpléctica}, \ \forall\, t \in \mathbb{R} \\ \Updownarrow \\ e^{t\,A^\sharp}\, e^{t\,A} = I = e^{t\,A}\, e^{t\,A^\sharp},\ \forall\, t \in \mathbb{R} \\ \Updownarrow \\ A^\sharp + A = 0 \\ \Updownarrow \\ A \text{ é } \omega\text{-antissimétrica} \end{gathered}$$

Geometria Linear Simpléctica

Dado um subespaço $U \subset V$, define-se

$$U^{\perp} = \{ x \in V \, : \, \omega(x,y) = 0, \; \forall \, y \in U \} \, .$$

Quaisquer que sejam $U, W \subset V$ subespaços vectoriais,

1. $\dim(U) + \dim(U^{\perp}) = \dim(V)$,
2. $(U^{\perp})^{\perp} = U$,
3. $U \subset W \;\; \Rightarrow \;\; W^{\perp} \subset U^{\perp}$.

Um subespaço $U \subset V$ diz-se **isotrópico** sse $U \subset U^{\perp}$, e diz-se **Lagrangiano** sse for isotrópico maximal.

Proposição *Dado um subespaço $U \subset V$,*

$$U \text{ é Lagrangiano } \Leftrightarrow U = U^{\perp}.$$

Prova.

$$\begin{aligned} U \subsetneq U^{\perp} &\Rightarrow \exists\, x \in U^{\perp} - U \\ &\Rightarrow U \oplus \mathbb{K}x \text{ é isotrópico} \\ &\Rightarrow U \text{ não é isotrópico maximal} \end{aligned}$$

$\square$

Corolário *Todo o espaço simpléctico tem dimensão par.*

$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{K})$ e $\mathrm{sp}(n, \mathbb{K})$

A estrutura simpléctica canónica em $\mathbb{K}^{2n}$ é definida pela matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} , \qquad \omega(x, y) = x^T J y .$$

Proposição *Todo o espaço simpléctico V de dimensão $2n$ sobre o corpo $\mathbb{K}$ é isomorfo a $(\mathbb{K}^{2n}, J)$.*

Para esta estrutura, $A^\sharp = J^T A^T J$.

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{K}) := \mathrm{Sp}(\mathbb{K}^{2n}, J) = \{ a \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{K}) \, : \, a^T J a = J \}$$

$$\mathrm{sp}(n, \mathbb{K}) := \mathrm{sp}(\mathbb{K}^{2n}, J) = \{ A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K}) \, : \, A^T J + J A = 0 \}$$

$\mathrm{sp}(n, \mathbb{C})$ é um espaço vectorial complexo.

$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ é uma variedade analítica complexa.

Dimensão de $\mathrm{sp}(n, \mathbb{K})$

As matrizes de $\mathrm{sp}(n, \mathbb{K})$ são da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

com $A, B, C \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$, $B^T = B$ e $C^T = C$.

Uma base de $\mathrm{sp}(n, \mathbb{K})$ é formada pelas matrizes

- $\begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 \\ 0 & -E_{j,i} \end{pmatrix}$ com $1 \leq i, j \leq n$
- $\begin{pmatrix} 0 & S_{i,j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ com $1 \leq i \leq j \leq n$ $(S_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$ se $i < j)$
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S_{i,j} & 0 \end{pmatrix}$ com $1 \leq i \leq j \leq n$ $(S_{i,i} = E_{i,i})$

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{sp}(n, \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Sp}(n, \mathbb{K}) = 2\, n^2 + n$$

O Grupo e Álgebra de Lie Simplécticos

A estrutura simpléctica canónica em $\mathbb{K}^{2n}$ é definida pela matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega(x,y) = x^T\, J\, y\ .$$

Para esta estrutura, o **adjunto** da matriz A é $\quad A^\sharp = J^T\, A^T\, J.$

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(n,\mathbb{K}) := \mathrm{Sp}(\mathbb{K}^{2n},J) &= \{\, a \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{K}) \,:\, a^T\, J\, a = J \,\} \\ &= \{\, a \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{K}) \,:\, a^\sharp\, a = I \,\} \\ \mathrm{sp}(n,\mathbb{K}) := \mathrm{sp}(\mathbb{K}^{2n},J) &= \{\, A \in \mathrm{gl}(2n,\mathbb{K}) \,:\, A^T\, J + J\, A = 0 \,\} \\ &= \{\, A \in \mathrm{gl}(2n,\mathbb{K}) \,:\, A^\sharp = -A \,\} \end{aligned}$$

Simetrias do espectro dum elemento $A \in \mathrm{sp}(n, \mathbb{K})$

$$J\,A = -A^T\,J \qquad [\quad A \in \mathrm{sp}(n,\mathbb{K}) \quad]$$
$$\Downarrow$$
$$J\,(A - \lambda\,I) = J\,A - \lambda\,J = -A^T\,J - \lambda\,J = -(A^T + \lambda\,I)\,J$$
$$\Downarrow$$
$$J\,(A - \lambda\,I)^n = (-1)^n\,(A^T + \lambda\,I)^n\,J$$
$$\Downarrow$$
$$J\,\mathrm{Nuc}\,[(A - \lambda\,I)^n] = \mathrm{Nuc}\,\left[(A^T + \lambda\,I)^n\right]$$

Proposição

Se $A \in \mathrm{sp}(n,\mathbb{K})$, $\quad \lambda \in \mathrm{spec}(A) \;\Leftrightarrow\; -\lambda \in \mathrm{spec}(A)$.
Se $A \in \mathrm{sp}(n,\mathbb{R})$, $\quad \lambda \in \mathrm{spec}(A) \;\Leftrightarrow\; \overline{\lambda} \in \mathrm{spec}(A)$.

Simetrias do espectro dum elemento $g \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{K})$

$$J\,g = g^{-T}\,J \qquad \left[\quad g \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{K}) \quad\right]$$
$$\Downarrow$$
$$J\,(g - \lambda\,I) = J\,g - \lambda\,J = g^{-T}\,J - \lambda\,J = (g^{-T} - \lambda\,I)\,J$$
$$\Downarrow$$
$$J\,(g - \lambda\,I)^n = (g^{-T} - \lambda\,I)^n\,J$$
$$\Downarrow$$
$$J\,\mathrm{Nuc}\,[(g - \lambda\,I)^n] = \mathrm{Nuc}\,\left[(g^{-T} - \lambda\,I)^n\right]$$

Proposição

Se $g \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{K})$, $\quad \lambda \in \mathrm{spec}(g) \;\Leftrightarrow\; \lambda^{-1} \in \mathrm{spec}(g)$.

Se $g \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$, $\quad \lambda \in \mathrm{spec}(g) \;\Leftrightarrow\; \overline{\lambda} \in \mathrm{spec}(g)$.

A Exponencial

Corolário $\mathrm{sp}(n, \mathbb{K}) \subseteq \mathrm{sl}(2n, \mathbb{K})$ *e* $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{K}) \subseteq \mathrm{SL}(2n, \mathbb{K})$.

No caso $n = 1$ temos

$$\mathrm{sp}(1, \mathbb{K}) = \mathrm{sl}(2, \mathbb{K})$$

$$\mathrm{Sp}(1, \mathbb{K}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$$

Proposição $\exp : \mathrm{sp}(n, \mathbb{K}) \to \mathrm{Sp}(n, \mathbb{K})$ *não é sobrejectiva.*

Quatro estruturas em $\mathbb{R}^{2n}$

Consideremos em $\mathbb{R}^{2n}$ as seguintes quatro estruturas:

1. O produto interno $\langle x, y\rangle = x^T \cdot y$,
2. A estrutura simpléctica $\omega(x, y) = x^T J\, y$,
3. A estrutura complexa $(a + i\, b)\, x = a\, x + b\, J\, x$,
4. O produto interno complexo $(x, y) = x^T\, (I + i\, J)\, y$,

relacionados entre si por

$$(x, y) = \langle x, y\rangle + i\, \omega(x, y) \quad \text{e} \quad \omega(x, y) = \langle x, J\, y\rangle\ .$$

Proposição *Qualquer automorfismo em* $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ *que preserve duas destas quatro estruturas preserva também as outras duas.*

Grupo Ortogonal Simpléctico

$$\mathrm{SpO}(n) = \{\, a \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) \;:\; a \in \mathrm{SO}(2n) \,\}$$
$$\mathrm{spo}(n) = \{\, A \in \mathrm{sp}(n, \mathbb{R}) \;:\; A \in \mathrm{so}(2n) \,\}$$

Esta álgebra de Lie é formada pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

com $A, B \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$, $A^T = -A$ e $B^T = B$.

Proposição $\mathrm{spo}(n) \simeq \mathrm{u}(n)$ *e* $\mathrm{SpO}(n) \simeq \mathrm{U}(n)$.

Prova. $g \in \mathrm{SpO}(n)$ $\Rightarrow$ g preserva as est. euclid. e simpléctica
$\Rightarrow$ g preserva as est. complexa e hermítica
(produto interno complexo).

$$\mathrm{spo}(n) \to \mathrm{u}(n) \qquad \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \mapsto A + iB$$

Automorfismos duma Forma Bilinear

Sejam V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear ou sesquilinear não degenerada.

Dizemos que um operador $g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ **preserva** β sse

$$\beta(g\,x, g\,y) = \beta(x, y), \quad \forall\, x, y \in V.$$

Chama-se β-**adjunto** de $A \in \mathrm{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ ao operador $A^\sharp \in \mathrm{gl}(V)$ tal que

$$\beta(A^\sharp\, x, y) = \beta(x, A\, y), \quad \forall\, x, y \in V.$$

Proposição *$\sharp : \mathrm{gl}_{\mathbb{K}}(V) \to \mathrm{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ é um automorfismo involutivo de álgebras associativas com identidade.*

Grupos de Lie Clássicos

Quando a forma não degenerada $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ é **simétrica**, **anti-simétrica**, **hermítica** ou **anti-hermítica**, os seguintes grupos são chamados de **Grupos de Lie Clássicos**.

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_\beta(V) &:= \{\, g \in \mathrm{GL}_\mathbb{K}(V) \;:\; g \;\; \text{preserva} \;\; \beta \,\} \\ &= \{\, g \in \mathrm{GL}_\mathbb{K}(V) \;:\; g^\sharp\, g = I \,\} \\ \mathrm{SL}_\beta(V) &:= \{\, g \in \mathrm{GL}_\beta(V) \;:\; \det_\mathbb{K}(g) = 1 \,\} \end{aligned}$$

Um operador $A \in \mathrm{gl}(V)$ diz-se β-**antissimétrico** sse $A^\sharp = -A$.

$$\mathrm{gl}_\beta(V) := \{\, A \in \mathrm{gl}_{\mathbb{K}}(V) \;:\; A^\sharp = -A \,\}$$
$$\mathrm{sl}_\beta(V) := \{\, A \in \mathrm{gl}_\beta(V) \;:\; \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(A) = 0 \,\}$$

Proposição $\mathrm{gl}_\beta(V)$ *e* $\mathrm{sl}_\beta(V)$ *são álgebras de Lie.*

$$\begin{aligned}[A, B]^\sharp &:= (A\,B - B\,A)^\sharp = (A\,B)^\sharp - (B\,A)^\sharp \\ &= B^\sharp A^\sharp - A^\sharp B^\sharp = [B^\sharp, A^\sharp] \\ &= [-B, -A] = -[A, B]\end{aligned}$$

Relação entre $\mathrm{GL}_\beta(V)$ e $\mathrm{gl}_\beta(V)$

Proposição $\mathrm{gl}_\beta(V)$ *e* $\mathrm{sl}_\beta(V)$, *são as álgebras de Lie dos grupos* $\mathrm{GL}_\beta(V)$ *e* $\mathrm{SL}_\beta(V)$, *respectivamente.*

$$(e^A)^\sharp = e^{A^\sharp}$$

$$\begin{gathered} e^{t\,A} \text{ preserva } \beta,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \\ \Updownarrow \\ e^{t\,A^\sharp}\, e^{t\,A} = I = e^{t\,A}\, e^{t\,A^\sharp},\ \forall\, t \in \mathbb{R} \\ \Updownarrow \\ A^\sharp + A = 0 \\ \Updownarrow \\ A \text{ é } \beta\text{-antissimétrica} \end{gathered}$$

Produto Interno Compatível

Uma forma bilinear ou sesquilinear $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ de tipo S: simétrica, antissimétrica, hermítica, ou anti-hermítica, diz-se **compatível** com um produto interno $(\cdot,\cdot) : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ sse $\exists\, J \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ortogonal do mesmo tipo S, tal que

$$\beta(u,v) = (u, J\,v), \quad \forall\, u,v \in V\ ,$$

se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ e β é sesquilinear, ou então

$$\beta(u,\overline{v}) = (u, J\,v), \quad \forall\, u,v \in V\ .$$

se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ e β é bilinear.

Dada $A \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{K})$, a matriz β-adjunta de A é

$$A^\sharp = J^{-1}\,A^*\,J$$

onde A^* representa a matriz transposta, resp. transconjugada, no caso simétrico, antissimétrico, resp. hermítico, anti-hermítico.

Existência dum Produto Interno Compatível

Proposição *Para um produto interno compatível com a forma β, comutam os adjuntos*

$$(A^\sharp)^* = (A^*)^\sharp \qquad \forall\, A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K}) \;.$$

Proposição *Toda a forma bilinear ou sesquilinear não degenerada $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ de tipo S: simétrica, antissimétrica, hermítica, anti-hermítica, admite um produto interno $(\cdot, \cdot) : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ compatível, em que a matriz ortogonal $J \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ de tipo S é:*

- $J = I_n$ *no caso simétrico complexo,*
- $J = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$ *nos casos hermítico e simétrico real. Os blocos I_k e $-I_r$ têm dimensões tais que $k + r = n$,*
- $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$ *nos casos anti-hermítico e antissimétrico, real ou complexo, com $n = 2k$.*

Tabela dos Grupos Anteriores

Nome	Forma	Tipo da Forma	Tipo do Grupo
$\mathrm{O}(n)$	$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	simétrica > 0	real
$\mathrm{U}(n)$	$\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$	hermítica > 0	real
$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$	$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	anti-simétrica	real
$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$	$\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$	anti-simétrica	complexo

Valores e Vectores Singulares

Dada $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ consideremos a forma hermítica definida positiva

$$Q_A(z, w) = z\, A^*\, A\, \overline{w}$$

cuja diagonal é $\quad Q_A(z, z) = \|A\, z\|^2$.

As formas quadráticas Q_A e Q_{A^*} têm os mesmos valores próprios.

As raízes quadradas dos valores próprios da forma quadrática Q_A dizem-se os **valores singulares** de A.

Os vectores próprios com norma 1 da forma quadrática Q_A dizem-se os **vectores singulares de** A **na origem** .

Os vectores próprios com norma 1 da forma quadrática Q_{A^*} dizem-se os **vectores singulares de** A **no destino** .

Valores e Vectores Singulares

Sejam $\mathbb{S} = \{ z \in \mathbb{C}^n \, : \, \|z\|^2 = 1 \}$ e $\widehat{A} : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ $\widehat{A}z = \frac{A\,z}{\|A\,z\|}$.
As funções

$$Q_A : \mathbb{S} \to \mathbb{R} \qquad Q_A(z) = \|A\,z\|^2 \quad \text{e}$$

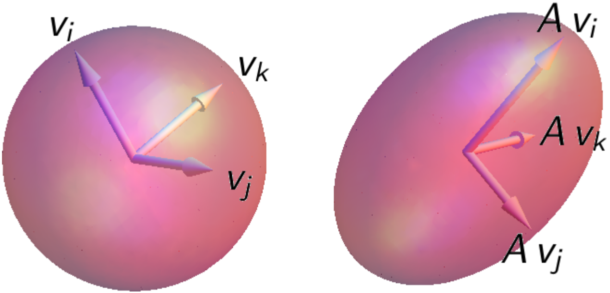
$$Q_{A^{-1}}^{-1} : \mathbb{S} \to \mathbb{R} \qquad Q_{A^{-1}}^{-1}(z) = \left\|A^{-1}\,z\right\|^{-2}$$

estão relacionadas por

$$Q_{A^{-1}}^{-1}(\widehat{A}z) = Q_A(z) \; .$$

Proposição *Os valores singulares de A são os valores críticos das funções* Q_A *e* $Q_{A^{-1}}^{-1}$.

Proposição *Os vectores singulares de A na origem, resp. destino, são os pontos críticos de Q_A, resp. $Q^{-1}_{A^{-1}}$.*



A matriz A transforma **vectores singulares na origem** em **vectores singulares no destino**.

Decomposição Polar de Matrizes

Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, V um espaço euclideano se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou hilbertiano quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$\mathcal{K} = \{ g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V) \,:\, g^* g = I \} \qquad \text{(mat. ortogonais/unitárias)}$$
$$\mathfrak{p} = \{ A \in \mathrm{gl}_{\mathbb{K}}(V) \,:\, A^* = A \} \qquad \text{(mat. simétricas/hermíticas)}$$

Teorema *Para cada matriz $g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ existe um único par de matrizes $k \in \mathcal{K}$ e $S \in \mathfrak{p}$ tais que $g = k\, e^S$. A aplicação $\mathcal{K} \times \mathfrak{p} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$, $(k, S) \mapsto k\, e^S$, é um difeomorfismo analítico.*

Lema *Dado* $A \in \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ *hermítico e definido positivo existe um único* $S \in \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ *hermítico tal que* $A = e^S$.
Vale o mesmo resultado para operadores simétricos e definidos positivos $A \in \mathrm{gl}(V)$.

Unicidade da Decomposição Polar .

$$g = k\, e^S, \text{ com } k \in \mathcal{K} \text{ e } S \in \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad g^* g = e^S k^* k\, e^S = e^{2S}$$

$$\Rightarrow \quad S = \tfrac{1}{2}\log(g^* g) \quad \text{e} \quad k = g\, e^{-S} \quad \Rightarrow \quad \textbf{unicidade}$$

$\square$

Prova da Decomposição Polar

Existência da Decomposição Polar .
Sejam $\{v_i\}_i$ e $\{v_i'\}_i$ bases ortonormadas de V formadas por vectores singulares de g, com $g\, v_i = v_i'$, $\forall\, i$.

v_i vector singular de g na origem $\quad g^*\, g\, v_i = \sigma_i^2\, v_i$
v_i' vector singular de g no destino $\quad g\, g^*\, v_i' = \sigma_i^2\, v_i'$

Lema $\Rightarrow$ $\exists\, S \in \mathfrak{p}$ tal que $g^*\, g = e^{2\,S}$
Para cada i,

$$g\, e^{-S}\, v_i = g\,(g^*\, g)^{-1/2}\, v_i = g\,(\sigma_i^{-1}\, v_i)$$
$$= \sigma_i^{-1}\, \sigma_i\, v_i' = v_i'$$

$$\Rightarrow\ k = g\, e^{-S} \in \mathcal{K} \qquad \square$$

Decomposição Polar em Grupos Clássicos

Sejam $G = \mathrm{GL}_\beta(V)$ ou $G = \mathrm{SL}_\beta(V)$ um grupo clássico, e $\mathfrak{g}$ a correspondente álgebra de Lie. Fixemos um produto interno compatível com β.

$$\mathcal{K} := \{\, g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V) \,:\, g^*\, g = I \,\}$$
$$\mathfrak{p} := \{\, S \in \mathrm{gl}_{\mathbb{K}}(V) \,:\, S^* = S \,\}$$

$$\mathcal{K}(G) := \mathcal{K} \cap G \quad \text{e} \quad \mathfrak{p}(G) := \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}$$

Teorema *Para cada matriz $g \in G$ existe um único par de matrizes $k \in \mathcal{K}(G)$ e $S \in \mathfrak{p}(G)$ tais que $g = k\, e^S$. A aplicação $\mathcal{K}(G) \times \mathfrak{p}(G) \to G$, $(k, S) \mapsto k\, e^S$, é um difeomorfismo analítico.*

Decomposição Polar em Grupos Clássicos

Lema *O grupo G e a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ são invariantes pela involução associada a um produto interno compatível.*

- $g \in G \quad \Rightarrow \quad g^* \in G$,
- $A \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad A^* \in \mathfrak{g}$.

Prova. $\quad g \in G \;\Leftrightarrow\; g^\sharp g = I$

$$(g^*)^\sharp g^* = (g^\sharp)^* g^* = (g\, g^\sharp)^* = I^* = I \quad \Rightarrow \; g^* \in G\ .$$

$A \in \mathfrak{g} \;\Leftrightarrow\; A^\sharp = -A$

$$(A^*)^\sharp = (A^\sharp)^* = (-A)^* = -A^* \quad \Rightarrow \; A^* \in \mathfrak{g}\ .$$

$\square$

Prova.

Dado $g \in G$, $\quad g = k\, e^S \quad$ com $\quad k \in \mathcal{K}$ e $\quad S \in \mathfrak{p}$.

$$\begin{aligned} \text{Lemma} \;\Rightarrow\;& e^{2S} = g^*\, g \in G \\ \Rightarrow\;& e^{2\, S^\sharp} = (e^{2S})^\sharp = e^{-2S} \quad \Rightarrow\; S^\sharp = -S \\ \Rightarrow\;& S \in \mathfrak{g} \;\Rightarrow\; S \in \mathfrak{p}(G) \end{aligned}$$

$$g,\, e^{-S} \in G \;\Rightarrow\; k = g\, e^{-S} \in G \;\Rightarrow\; k \in \mathcal{K}(G)$$

$\square$

Corolário *G é homotopicamente equivalente a $\mathcal{K}(G)$.*

$$G \simeq \mathcal{K}(G) \times \underbrace{\mathfrak{p}(G)}_{\sim \text{pto}} \sim \mathcal{K}(G)$$

Alguns Exemplos

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \sim \mathrm{O}(n)\ , \quad \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \sim \mathrm{U}(n)\ ,$$
$$\mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R}) \sim \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \sim \mathrm{SO}(n)\ ,$$
$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \sim \mathrm{SU}(n)\ , \quad \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) \sim \mathrm{U}(n)\ .$$

Ideal duma Álgebra de Lie

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Dados $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ definem-se

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{\, A + B \,:\, A \in \mathfrak{a},\ B \in \mathfrak{b} \,\}$$

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \{\, \sum_{i=1}^{k} [A_i, B_i] \,:\, A_i \in \mathfrak{a},\ B_i \in \mathfrak{b} \,\}$$

$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ diz-se um **ideal** sse $\mathfrak{a}$ for subespaço vectorial e $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$.

Proposição

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ *são ideais* $\Rightarrow$ $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ *são ideais.*

Álgebra de Lie Quociente

Dado um ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$, o espaço quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ é uma álgebra de Lie com o parêntesis definido por

$$[X + \mathfrak{a}, Y + \mathfrak{a}] := [X, Y] + \mathfrak{a}$$

A projecção $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $\pi(X) = X + \mathfrak{a}$, é um homomorfismo de álgebras de Lie com núcleo $\mathfrak{a}$.

Proposição *Seja $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Então $\mathrm{Nuc}(\phi) = \{ X \in \mathfrak{g} \, : \, \phi(X) = 0 \}$ é um ideal.*

O **centro** duma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) &:= \{ X \in \mathfrak{g} \, : \, [X, Y] = 0, \ \forall\, Y \in \mathfrak{g}, \} \\ &= \mathrm{Nuc}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})) \end{aligned}$$

é um ideal.

Epimorfismos e Ideais

Seja $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ um homomorfismo de álgebras de Lie.

Proposição $\quad \mathfrak{a}'$ *ideal de* $\mathfrak{g}' \;\Rightarrow\; \phi^{-1}(\mathfrak{a}')$ *ideal de* $\mathfrak{g}$

ϕ *sobrejectivo,* $\mathfrak{a}$ *ideal de* $\mathfrak{g} \;\Rightarrow\; \phi(\mathfrak{a})$ *ideal de* $\mathfrak{g}'$

Proposição *Se* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *é um epimorfismo, as aplicações* $\mathfrak{a} \mapsto \phi(\mathfrak{a})$ *e* $\mathfrak{a}' \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{a}')$ *estabelecem a seguinte bijecção*

$$\{\, \textit{ideais de } \mathfrak{g} \textit{ contendo } \mathrm{Nuc}(\phi) \,\} \;\underset{\phi^{-1}}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}}\; \{\, \textit{ideais de } \mathfrak{g}' \,\}$$

Além disso, para quaisquer ideais $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ *contendo* $\mathrm{Nuc}(\phi)$,

$$\phi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \phi(\mathfrak{a}) + \phi(\mathfrak{b})$$
$$\phi(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \phi(\mathfrak{a}) \cap \phi(\mathfrak{b})$$
$$\phi([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]) = [\phi(\mathfrak{a}), \phi(\mathfrak{b})]$$

Série Central Inferior

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, chama-se **série central inferior** à sequência decrescente de ideais $\{\mathfrak{g}_n\}_{n\geq 0}$ definida por

$$\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g} \ , \qquad \mathfrak{g}_{n+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_n] \ .$$

$\mathfrak{g}_n$ é o ideal gerado pelos produtos seguintes

$$\mathfrak{g}_n = \langle\, \mathrm{ad}(X_1) \ldots \mathrm{ad}(X_{n-1})\, Y \,|\, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y \in \mathfrak{g} \rangle \ .$$

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.
$\mathfrak{g}$ diz-se **nilpotente** $\Leftrightarrow$ $\exists\, n \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}_n = \{0\}$.

Proposição *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente então $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ é nilpotente, $\forall\, X \in \mathfrak{g}$.*

Prova. $\mathrm{ad}(X)^k Y \in \mathfrak{g}_{k+1}, \ \forall\, k \geq 0.$ □

Proposição *Toda a álgebra de Lie comutativa é nilpotente.*

Prova. $\mathfrak{g}$ comutativa $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$
$\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ é nilpotente. □

Álgebra das Matrizes Estritamente Triângulares Superiores

Proposição *O espaço* $\mathfrak{t} \subset \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$ *das matrizes estritamente triângulares superiores, i.e., com zeros na diagonal, é uma álgebra de Lie nilpotente.*

Prova. Consideremos a flag

$$V = (V_1, V_2, \ldots, V_n) \quad \text{com} \quad V_i := \langle e_1, \ldots, e_i \rangle\,, \; V_0 = \{0\}\,.$$

Notamos que $A \in \mathfrak{t} \quad \Rightarrow \; A\, V_i \subset V_{i-1}, \; \forall\, i = 1, \ldots, n.$
Consideremos os subespaços vectoriais

$$\mathfrak{v}_k = \{\, A \in \mathfrak{t} \,:\, A\, V_i \subseteq V_{i-k}, \forall i = k, \ldots, n \,\}\,.$$

Cada um destes subespaços é um ideal de $\mathfrak{t}$ formado pelas matrizes com entradas nulas abaixo da k-ésima diagonal.

Álgebra das Matrizes Estritamente Triângulares Superiores

- $\mathfrak{t} = \mathfrak{v}_1$
- $\mathfrak{v}_n = \{0\}$
- $\mathfrak{v}_k\, \mathfrak{v}_m \subseteq \mathfrak{v}_{k+m} \quad \Rightarrow \quad [\mathfrak{v}_k, \mathfrak{v}_m] \subseteq \mathfrak{v}_{k+m}$
- $\mathfrak{v}_k$ é uma álgebra associativa $\quad \Rightarrow \quad$ álgebra de Lie
- $\mathfrak{t} = \mathfrak{v}_1 \supseteq \mathfrak{v}_2 \supseteq \ldots \mathfrak{v}_{n-1} \supseteq \mathfrak{v}_n = \{0\}$
- Vejamos que $\quad \mathfrak{t}_k \subseteq \mathfrak{v}_{k+1}, \ \forall\, k \geq 0$
  Por indução, $\quad$ se $\mathfrak{t}_{k-1} \subseteq \mathfrak{v}_k \quad$ então
  $\mathfrak{t}_k = [\mathfrak{t}, \mathfrak{t}_{k-1}] \subseteq [\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_k] \subseteq \mathfrak{v}_{k+1}$.
- Logo $\quad \mathfrak{t}\ $ é nilpotente.

$\square$

Série do Comutador

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, chama-se **série do comutador** à sequência decrescente de ideais $\{\mathfrak{g}^n\}_{n\geq 0}$ definida por

$$\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g} \,, \qquad \mathfrak{g}^{n+1} := [\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}^n] \,.$$

Proposição $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *é uma álgebra comutativa.*

Prova. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$[X+\mathfrak{g}, Y+\mathfrak{g}] = [X,Y] + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 0 \pmod{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}. \qquad \square$$

Corolário *Para cada* $k \geq 0$, $\mathfrak{g}^k/\mathfrak{g}^{k+1}$ *é uma álgebra comutativa.*

Álgebras Solúveis

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.
$\mathfrak{g}$ diz-se **solúvel** $\Leftrightarrow$ $\exists\, n \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^n = \{0\}$.

Proposição *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie.*
$\mathfrak{g}$ *solúvel* $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{a}_{n-1} \supseteq \mathfrak{a}_n = \{0\}$ *sequência de ideais tal que* $\mathfrak{a}_{k-1}/\mathfrak{a}_k$ *é comutativo,* $\forall\, k = 1, \ldots, n$.

A série de ideais $\mathfrak{a}_0 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_n$ diz-se uma **resolução** de $\mathfrak{g}$.

Prova. $(\Rightarrow)$ A série do comutador é uma resolução.

$(\Leftarrow)$ $\mathfrak{a}_{k-1}/\mathfrak{a}_k$ é comutativo $\Leftrightarrow$ $[a_{k-1}, a_{k-1}] \subseteq a_k$
Por indução, se $\mathfrak{g}^{k-1} \subseteq \mathfrak{a}_{k-1}$ então
$\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}^{k-1}] \subseteq [\mathfrak{a}_{k-1}, \mathfrak{a}_{k-1}] \subseteq \mathfrak{a}_k$.
Logo $\mathfrak{g}$ é solúvel.

$\square$

As Álgebras Nilpotentes são Solúveis

Proposição *Toda a álgebra de Lie nilpotente é solúvel. Em particular, toda a álgebra comutativa é solúvel.*

Prova. Resulta da seguinte relação entre a série central inferior e a série do comutador

$$\mathfrak{g}^n \subseteq \mathfrak{g}_n, \quad \forall\, n \geq 0$$

Por indução:

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0$$

Se $\mathfrak{g}^{n-1} \subset \mathfrak{g}_n$ então

$$\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}^{n-1}, \mathfrak{g}^{n-1}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{n-1}] = \mathfrak{g}_n \;.$$

$\square$

Álgebra das Matrizes Triângulares Superiores

Proposição *O espaço* $\mathfrak{t} \subset \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$ *das matrizes triângulares superiores é uma álgebra de Lie solúvel.*

Prova. Consideremos a flag

$$V = (V_1, V_2, \ldots, V_n) \quad \text{com} \quad V_i := \langle e_1, \ldots, e_i \rangle\,, \;\; V_0 = \{0\}\,.$$

e a sequência de ideais

$$\mathfrak{v}_k = \{\, A \in \mathfrak{t} \,:\, A\,V_i \subset V_{i-k},\; \forall\, i = k, \ldots, n \,\}\,,$$

$\mathfrak{v}_k$ é formado pelas matrizes nulas abaixo da k-ésima diagonal.

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{v}_0 \supseteq \underbrace{\mathfrak{v}_1}_{\text{nilpot.}} \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{v}_{n-1} \supseteq \mathfrak{v}_n = \{0\}$$

Álgebra das Matrizes Triângulares Superiores

Para $k \geq 1$, $\quad [\mathfrak{v}_k, \mathfrak{v}_k] \subseteq [\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_k] \subseteq \mathfrak{v}_{k+1}$

$$\Rightarrow \ \mathfrak{v}_k / \mathfrak{v}_{k+1} \text{ é comutativo.}$$

Resta ver que $\quad [\mathfrak{v}_0, \mathfrak{v}_0] \subseteq \mathfrak{v}_1$.

Sejam $\quad X_1 = \underbrace{D_1}_{\text{diag.}} + \underbrace{N_1}_{\in \mathfrak{v}_1} \quad$ e $\quad X_2 = \underbrace{D_2}_{\text{diag.}} + \underbrace{N_2}_{\in \mathfrak{v}_1}$ em $\mathfrak{v}_0$.

$$[X_1, X_2] = \underbrace{[D_1, D_2]}_{=0} + \underbrace{[D_1, N_2]}_{\in \mathfrak{v}_1} + \underbrace{[N_1, X_2]}_{\in \mathfrak{v}_1} \in \mathfrak{v}_1$$

$\square$

Proposição *Seja* $\mathfrak{a}$ *uma subálgebra de* $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g}$ *nilpotente, resp. solúvel* $\Rightarrow$ $\mathfrak{a}$ *nilpotente, resp. solúvel.*

$\mathfrak{a}$ *ideal e* $\mathfrak{g}$ *nilpotente, resp. solúvel* $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *nilpotente, resp. solúvel.*

Proposição *Sejam* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *ideais de* $\mathfrak{g}$.

(1) $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *solúveis* $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ *solúvel.*

(2) $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{b}$ *solúveis* $\Rightarrow$ $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ *solúvel.*

Prova. (1) Concatenar uma resolução de $\mathfrak{a}$ com as pré-imagens por $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ duma resolução de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

(2) $$\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \simeq \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}$$ □

Radical duma Álgebra de Lie

Chama-se **radical** de $\mathfrak{g}$ ao ideal

$$\begin{aligned} \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) &= \text{soma de todos os ideais solúveis de } \mathfrak{g}. \\ &= \text{ideal solúvel maximal de } \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Proposição $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ *ideal solúvel* $\Rightarrow$ $\mathrm{rad}\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}\right) = \mathrm{rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{a}$.
Em particular, $\mathrm{rad}\left(\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})\right) = \{0\}$.

Prova.

$$\begin{array}{c} \mathfrak{s} \supset \mathfrak{a} \ \text{ ideal solúvel de } \ \mathfrak{g} \\ \Updownarrow \\ \mathfrak{s}/\mathfrak{a} \ \text{ ideal solúvel de } \ \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \end{array}$$

$\square$

Álgebras Simples e Semisimples

Um ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ diz-se **próprio** $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ e $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g}$ diz-se **simples** $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ não tem ideais próprios, e é não comutativo.

$\mathfrak{g}$ diz-se **semisimples** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Teorema *Uma álgebra de Lie é semisimples sse se decompõem como soma directa finita de ideais simples. Esta decomposição é única. Em particular toda a álgebra de Lie semisimples tem um número finito de ideais simples.*

Prova. A prova será feita mais tarde. □

Proposição *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie.*
Então $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ *é uma álgebra semisimples.*

Proposição *Se* $\mathfrak{g}$ *é uma álgebra de Lie simples então*

1. $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *($\Leftarrow$ $\mathfrak{g}$ é não comutativo)*
2. $\mathfrak{g}$ *é semisimples* *($\Leftarrow$ $\mathfrak{g}$ é não solúvel $\Leftarrow$ 1.)*

Proposição $\mathfrak{g}$ *semisimples* $\Rightarrow$ $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$

Prova. $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. $\square$

Álgebras de dimensão baixa

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.

$\dim \mathfrak{g} = 1 \Rightarrow \mathfrak{g}$ comutativa, nilpotente, solúvel.

$\dim \mathfrak{g} = 2 \Rightarrow \dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \leq 1 \Rightarrow \mathfrak{g}$ é solúvel

$\dim \mathfrak{g} = 3 \Rightarrow \mathfrak{g}$ é solúvel se $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \leq 2$
ou $\mathfrak{g}$ é simples se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$

$\mathfrak{h}$ ideal de $\mathfrak{g}$ com $1 \leq \dim \mathfrak{h} \leq 2$
$\Rightarrow \mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ solúveis
$\Rightarrow \mathfrak{g}$ solúvel

A álgebra $\mathrm{sl}(2, \mathbb{K})$

Proposição *A álgebra* $\mathrm{sl}(2, \mathbb{K})$ *é simples.*

Prova.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$[\cdot,\cdot]$	A	B	C
A	0	$2B$	$-2C$
B	$-2B$	0	A
C	$2C$	$-A$	0

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g} \text{ é simples.}$$

$\square$

Proposição *A álgebra* $\mathrm{so}(2)$ *é simples.*

Prova.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$[\cdot,\cdot]$	A	B	C
A	0	$-C$	B
B	C	0	$-A$
C	$-B$	A	0

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g} \quad \text{é simples.}$$

$\square$

Proposição *A álgebra* $\mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$ *não é semisimples.*

Prova. O ideal

$$\mathfrak{a} = \{ \lambda I \ : \ \lambda \in \mathbb{K} \} = \mathrm{Z}(\mathrm{gl}(n, \mathbb{K}))$$

sendo comutativo está contido em $\mathrm{rad}(\mathrm{gl}(n, \mathbb{K}))$.

$\square$

Teorema de Lie

Seja $\mathfrak{g}^* = \{\,\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{C} \ : \ \lambda \text{ linear}\,\}$ o dual de $\mathfrak{g}$.

Teorema *Seja $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ uma álgebra de Lie solúvel.*
$\exists\, \lambda \in \mathfrak{g}^*, \ v \in V - \{0\}$ *tais que* $A\, v = \lambda(A)\, v, \ \forall\, A \in \mathfrak{g}$.

$v \in V - \{0\}$ diz-se um **vector próprio** de $\mathfrak{g}$
$\lambda \in \mathfrak{g}^*$ diz-se um **valor próprio** da álgebra $\mathfrak{g}$

Exemplo *Seja $\mathfrak{g} \subset \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ a subálgebra das matrizes triângulares superiores. O vector e_1 é um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, $\lambda(A) = \lambda(a_{i,j})_{i,j} := a_{1,1}$.*

Consequência do Teorema de Lie

Chama-se **flag completa** a uma sequência $\underline{V} = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ de subespaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ tal que

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

e $\dim_{\mathbb{K}}(V_i/V_{i-1}) = 1$, para cada $i = 1, \ldots, n$.
A flag $\underline{V}$ diz-se **estabilizada** por $A \in \mathrm{gl}_{\mathbb{K}}(V) \Leftrightarrow A\, V_i \subseteq V_i$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$.

Corolário *Toda a álgebra de Lie solúvel* $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ *admite uma flag completa que é estabilizada por todo* $A \in \mathfrak{g}$.
Em particular, $\mathfrak{g}$ *admite uma representação por matrizes triângulares superiores.*

Prova. Prova por indução em $n = \dim V$.
Admitamos que a tese vale para todos os subespaços tais que $\dim W \leq n-1$ e consideremos um subespaço com $\dim V = n$.

Consequência do Teorema de Lie

Teor. Lie $\Rightarrow\ \exists\, v \in V - \{0\}\ \ A\,v = \lambda(A)\,v,\ \forall\, A \in \mathfrak{g}.$
$\Rightarrow\ \mathfrak{g}$ actua linearmente sobre $W = V/\langle v \rangle$.

Hip. Indução $\Rightarrow\ \exists\ (W_1, \dots, W_{n-1})$ flag completa de W estabilizada por $\mathfrak{g}$.

Escrevendo $V_1 = \langle v \rangle,\ W_1 = V_2/\langle v \rangle,\ \dots,\ W_{n-1} = V_n/\langle v \rangle$
$(V_1, \dots, V_n)$ flag completa de V estabilizada por $\mathfrak{g}$.

$\square$

Prova do Teorema de Lie

Prova do Teorema de Lie. Por indução em $k = \dim \mathfrak{g}$. Admitamos que a tese vale para todas as álgebras solúveis tais que $\dim \mathfrak{h} \leq k - 1$ e consideremos uma álgebra solúvel com $\dim \mathfrak{g} = k$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \text{ solúvel} \quad & \Rightarrow \quad [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subsetneq \mathfrak{g} \\ & \Rightarrow \quad \exists \ [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \text{ com } \dim \mathfrak{h} = k - 1 \\ & \Rightarrow \quad \mathfrak{h} \quad \text{ideal} \quad \text{porque } [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h} \end{aligned}$$

$$\text{Hip. Indução} \Rightarrow \ \exists \lambda \in \mathfrak{h}^*, \ e \in V - \{0\} \text{ tal que } \\ H\, e = \lambda(H)\, e, \ \forall\, H \in \mathfrak{h}.$$

Seja $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \langle X \rangle$ $\qquad \langle X \rangle = \mathbb{C}\, X$

Seja $E = \langle e, X(e), X^2(e), \ldots \rangle$ subespaço complexo

Prova do Teorema de Lie

Claim 1. $\forall\, H \in \mathfrak{h},\ H - \lambda(H)\, I$ é nilpotente em E.

$$
\begin{aligned}
(H - \lambda(H)\, I)\, X^k(e) &= H\, X^k(e) - \lambda(H)\, X^k(e) \\
&= H\, X^k(e) - X^k\, H(e) + X^k\, H(e) - \lambda(H)\, X^k(e) \\
&= [H, X^k](e) + \lambda(H)\, X^k(e) - \lambda(H)\, X^k(e) \\
&= \lambda([H, X^k])\, e \qquad \Leftarrow\ [H, X^k] \in \mathfrak{h}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow\ (H - \lambda(H)\, I)^2\, X^k(e) = 0. \qquad \square$$

Claim 2. $\forall\, H \in \mathfrak{h},\ \lambda([H, X^k]) = 0.$

Dado $H \in \mathfrak{h},\ \ H\, X^k(e) = \lambda(H)\, X^k(e) + \lambda([H, X^k])\, e.$

$\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $\{e,\, X(e),\, \ldots,\, X^m(e)\}$ é base de E.

$\Rightarrow$ H é representada por uma matriz triângular superior com diagonal $\lambda(H)$ relativamente a esta base.

$\Rightarrow$ $\mathrm{tr}(H|_E) = \lambda(H)\,\dim E$

$[H, X^k] \in \mathfrak{h} \ \Rightarrow$

$$\lambda([H, X^k])\,\dim E = \mathrm{tr}\left([H, X^k]|_E\right) = \mathrm{tr}\left([H|_E, X^k|_E]\right) = 0$$

$\square$

Prova do Teorema de Lie

Claim 1 e **Claim 2** $\Rightarrow$

Claim 3. $\forall\, H \in \mathfrak{h},\ \forall\, v \in E,\ H\, v = \lambda(H)\, v.$

Escolhe-se $v \in E - \{0\}$ tal que $X\, v = \sigma\, v$.

Define-se $\tilde{\lambda} : \mathfrak{h} \oplus \langle X \rangle \to \mathbb{C}$, $\tilde{\lambda}(H + c\, X) := \lambda(H) + c\, \sigma$.

$\forall\, A = H + c\, X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \langle X \rangle$,

$$\begin{aligned} A\, v &= (H + c\, X)\, v = H\, v + c\, \sigma\, v \\ &= (\lambda(H) + c\, \sigma)\ v = \tilde{\lambda}(H + c\, X)\, v = \tilde{\lambda}(A)\, v \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ v é um vector próprio de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \langle X \rangle$. $\square$

Teorema de Engel

Teorema *Seja* $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{gl}(V)$ *uma álgebra de Lie com todos os seus elementos nilpotentes. Então* $\exists\, v \in V - \{0\}$ *tal que* $\mathfrak{g}\, v = 0$*.*

$$\mathfrak{g}\, v = 0 \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad A\, v = 0, \;\; \forall\, A \in \mathfrak{g}$$

Exemplo *Seja* $\mathfrak{g} \subset \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ *a subálgebra das matrizes estritamente triângulares superiores.*
O vector $e_1 \in \mathbb{C}^n$ *satisfaz* $\mathfrak{g}\, e_1 = 0$*.*

Consequências do Teorema de Engel

Corolário *Seja* $\mathfrak{g} \subset \mathrm{gl}(V)$ *uma álgebra com todos os seus elementos nilpotentes.. Existe uma flag completa*

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$$

tal que $A\, V_i \subseteq V_{i-1}, \forall\, A \in \mathfrak{g}, \; \forall\, i = 1, \ldots, n.$
Em particular, $\mathfrak{g}$ *é nilpotente e admite uma representação por matrizes estritamente triângulares superiores.*

Prova. Prova por indução em $n = \dim V$.
Admitamos que a tese vale para todos os subespaços tais que $\dim W \leq n - 1$ e consideremos um subespaço com $\dim V = n$.

Consequências do Teorema de Engel

Teor. Engel $\Rightarrow\ \exists\, v \in V - \{0\}$ tal que $\mathfrak{g}\, v = 0$.
$\Rightarrow\ \mathfrak{g}$ actua linearmente sobre $W = V/\langle v \rangle$.

Hip. Indução $\Rightarrow\ \exists\ (W_1, \ldots, W_{n-1})$ flag completa de W
tal que $\mathfrak{g}\, W_i \subseteq W_{i-1},\ \forall\, i$.

Escrevendo $V_1 = \langle v \rangle,\ W_1 = V_2/\langle v \rangle,\ \ldots,\ W_{n-1} = V_n/\langle v \rangle$
$(V_1, \ldots, V_n)$ é uma flag completa de V tal que

$$\mathfrak{g}\, V_i \subseteq V_{i-1},\ \forall\, i.$$

$\square$

Consequências do Teorema de Engel

$X \in \mathfrak{g}$ diz-se ad-**nilpotente** $\Leftrightarrow$ $\exists\, n \geq 1$ tal que $\mathrm{ad}(X)^n = 0$.

Corolário (Engel) *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra tal que todos os seus elementos são ad-nilpotentes. Então $\mathfrak{g}$ é nilpotente.*

Prova. Segue do corolário anterior e da proposição seguinte. □

Proposição *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.*
$\mathfrak{g}$ *é nilpotente* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ *é nilpotente.*

Prova.

$$\mathfrak{g}_k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{k-1}] = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}_{k-1})\, \mathfrak{g} = (\mathrm{ad}(\mathfrak{g}))_{k-1}\, \mathfrak{g}$$

□

Prova do Teorema de Engel. Por indução em $k = \dim \mathfrak{g}$. Admitamos que a tese vale para todas as álgebras de elementos nilpotentes tais que $\dim \mathfrak{h} \leq k-1$ e consideremos uma álgebra formada por elementos nilpotentes com $\dim \mathfrak{g} = k$.

Seja $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{g}$ uma subálgebra própria maximal.

Claim 1. $\exists\, X \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \langle X \rangle$.

$\mathfrak{a}$ subálgebra $\Rightarrow$ $\forall\, A \in \mathfrak{a}$, $\mathrm{ad}(A) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ estabiliza $\mathfrak{a}$
$\Rightarrow$ $\mathrm{ad}(A)$ induz $\rho(A) : \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$
$\Rightarrow$ $\rho : \mathfrak{a} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ é uma representação, e $\rho(\mathfrak{a})$ é uma subálgebra de elementos nilpotentes com $\dim \rho(\mathfrak{a}) < k$.

Prova do Teorema de Engel

Hip. Indução $\Rightarrow$ é não nulo o subespaço

$$\begin{aligned} W &= \{\, B+\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \,:\, \rho(\mathfrak{a})(B+\mathfrak{a}) = 0 \,\} \\ &= \{\, B+\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \,:\, [B,\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a} \,\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ a subálgebra $\mathfrak{n} = \{\, B \in \mathfrak{g} \,:\, [B,\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a} \,\}$

satisfaz $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{g}$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{a}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$

Seja $X \in \mathfrak{g}$ tal que $X \notin \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \langle X \rangle$

$\mathfrak{a}$ ideal $\Rightarrow$ $\mathfrak{h}$ subálgebra

$\Rightarrow$ $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ por maximalidade de $\mathfrak{a}$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \langle X \rangle$ $\square$

Prova do Teorema de Engel

Seja $\quad E = \{\, x \in V \;:\; \mathfrak{a}\, x = 0 \,\}$.

Claim 2. $\quad X\, E \subseteq E$.

$$v \in E \;\Rightarrow\; \mathfrak{a}\, v = 0 \;\Rightarrow\; \forall\, A \in \mathfrak{a},\;\; A\, v = 0$$

$$\Rightarrow\; \forall\, A \in \mathfrak{a},\;\; A\,(X\, v) = X\, \underbrace{A\, v}_{=0} + \overbrace{\underbrace{[A, X]}_{\in \mathfrak{a}}\, v}^{=0} = 0$$

$$\Rightarrow\; \forall\, A \in \mathfrak{a},\;\; A\,(X\, v) = 0 \;\Rightarrow\; X\, v \in E \qquad \square$$

$$X \text{ nilpotente} \;\Rightarrow\; \exists\; v \in E - \{0\} \text{ tal que } X\, v = 0$$

$$\Rightarrow\; \mathfrak{a}\, v = 0 \;\text{ e }\; X\, v = 0$$

$$\Rightarrow\; \mathfrak{g}\, v = 0.$$

$\square$

Complexificação & Formas Reais

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa e
$\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra real.

$\mathfrak{g}_0$ diz-se uma **forma real** de $\mathfrak{g}$ sse $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\,\mathfrak{g}_0$,
soma directa de subespaços vectoriais reais.

Quando esta relação acontece, diz-se também que
$\mathfrak{g}$ é a **complexificação** de $\mathfrak{g}_0$.

$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é a única extensão $\mathbb{C}$-bilinear
do produto $\mathbb{R}$-bilinear $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$.

Proposição *Dada $\mathfrak{g}_0$ álgebra de Lie real,*
$\exists\, \mathfrak{g}$ *álgebra de Lie complexa, única a menos dum isomorfismo,*
$\exists\, j : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}$ *monomorfismo de álgebras de Lie reais tal que* $j(\mathfrak{g}_0)$ *é uma forma real de* $\mathfrak{g}$.

Prova. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$.
A multiplicação por escalar $\mathbb{C} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é definida por
$$(a + i\, b)\,(X, Y) := (aX - bY, aY + bX).$$

O parêntesis de Lie $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é dado por
$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] := ([X_1, X_2] - [Y_1, Y_2], [X_1, Y_2] + [Y_1, X_2]).$$

O monomorfismo $j : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$ é dado por $j(X) := (X, 0)$.

$\square$

Por abuso de linguagem $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$ diz-se **o complexificado** de $\mathfrak{g}_0$ e escrevemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$.

Proposição *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie complexa e* $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ *uma forma real de* $\mathfrak{g}$. *Dados ideais* $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ *então*
$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus i\, \mathfrak{a}_0$ *e* $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 \oplus i\, \mathfrak{b}_0$ *são ideais de* $\mathfrak{g}$ *e*
$[\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0]$ *é uma forma real de* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$.

Proposição *Seja* $\mathfrak{g}_0$ *uma forma real de* $\mathfrak{g}$. *Então* $\forall\, k \geq 0$,

- $(\mathfrak{g}_0)_k$ *é uma forma real de* $\mathfrak{g}_k$,
- $(\mathfrak{g}_0)^k$ *é uma forma real de* $\mathfrak{g}^k$.

Em particular,
$\mathfrak{g}_0$ *é solúvel, resp. nilpotente,* $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ *é solúvel, resp. nilpotente.*

Formas Bilineares Simétricas

Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, e
$\mathrm{B} : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma $\mathbb{K}$-bilinear.

Chama-se **núcleo** de B ao subespaço
$$\mathrm{Nuc}(\mathrm{B}) = \{\, v \in V \,:\, \mathrm{B}(v, w) = 0,\ \forall\, w \in V \,\}.$$
A forma B diz-se **não degenerada** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Nuc}(\mathrm{B}) = \{0\}$.

Dado um subespaço $U \subseteq V$, define-se o subespaço B-**ortogonal**
$$U^{\perp} := \{\, v \in V \,:\, \mathrm{B}(v, u) = 0,\ \forall\, u \in U \,\}.$$

Formas Bilineares Simétricas

Proposição *Dados subespaços* $U, W \subseteq V$*,*

- $(U^\perp)^\perp = U$,
- $U \subseteq W \quad \Rightarrow \quad W^\perp \subseteq U^\perp$,
- $\dim V = \dim U + \dim U^\perp \quad \Leftarrow \quad \mathrm{B}$ *não degenerada,*
- $\mathrm{Nuc}(\mathrm{B}|_{U \times U}) = U \cap U^\perp$.

Corolário *Se* $\mathrm{B} : V \times V \to \mathbb{K}$ *for não degenerada, para cada subespaço* $U \subseteq V$*,*

$$V = U \oplus U^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{B}|_{U \times U} \text{ é não degenerada.}$$

A Forma de Killing

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$.

Chama-se **forma de Killing** à seguinte forma bilinear

$$\mathrm{B} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}, \quad \mathrm{B}(X, Y) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}\,(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y))$$

Proposição *A forma de Killing satisfaz,*
$\forall\ s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}),\ \delta \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{g}),\ X, Y \in \mathfrak{g},$

- $\mathrm{B}(X, Y) = \mathrm{B}(Y, X)$,
- $\mathrm{B}(s(X), s(Y)) = \mathrm{B}(X, Y)$,
- $\mathrm{B}(\delta(X), Y) + \mathrm{B}(X, \delta(Y)) = 0$.

Prova.

$s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \quad \Rightarrow$

$$s \circ \mathrm{ad}(X) \circ s^{-1} Z = s[X, s^{-1} Z] = [s\, X, Z] = \mathrm{ad}(s\, X)\, Z$$

$\Rightarrow$
$$\begin{aligned} \mathrm{B}(s\,X, s\,Y) &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(s\,X)\,\mathrm{ad}(s\,Y)) \\ &= \mathrm{tr}\left(s\,\mathrm{ad}(X)\,s^{-1}\,s\,\mathrm{ad}(Y)\,s^{-1}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(s\,\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)\,s^{-1}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)\right) = \mathrm{B}(X, Y) \end{aligned}$$

$\delta \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{g}) \quad \Rightarrow \quad e^{t\,\delta} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Derivando em $t = 0$ a relação

$$\mathrm{B}(e^{t\,\delta}\, X,\, e^{t\,\delta}\, Y) = \mathrm{B}(X, Y)$$

obtemos $\quad \mathrm{B}(\delta(X), Y) + \mathrm{B}(X, \delta(Y)) = 0.$

$\square$

Corolário *Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie do grupo de Lie G.*
$\forall\ g \in G,\ X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

- $\mathrm{B}(\mathrm{Ad}(g)\,X, \mathrm{Ad}(g)\,Y) = \mathrm{B}(X, Y)$,
- $\mathrm{B}(\mathrm{ad}(X)\,Y, Z) + \mathrm{B}(Y, \mathrm{ad}(X)\,Z)) = 0$,
- $\mathrm{B}([X, Y], Z) = \mathrm{B}(X, [Y, Z])$

Prova.

$$\begin{aligned} g \in G \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \\ X \in \mathfrak{g} \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{B}([X, Y], Z) &= \mathrm{B}(\mathrm{ad}(X)\,Y, Z) = -\mathrm{B}(Y, \mathrm{ad}(X)\,Z) = \mathrm{B}(Y, \mathrm{ad}(Z)\,X) \\ &= -\mathrm{B}(\mathrm{ad}(Z)\,Y, X) = -\mathrm{B}(X, \mathrm{ad}(Z)\,Y) \\ &= \mathrm{B}(X, \mathrm{ad}(Y)\,Z) = \mathrm{B}(X, [Y, Z]) \end{aligned}$$

$\square$

Proposição $\mathfrak{a}$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{a}^\perp$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$

Prova.
Claim : Dados $H \in \mathfrak{a}^\perp$, $X \in \mathfrak{g}$, $[X, H] \in \mathfrak{a}^\perp$.
Para cada $A \in \mathfrak{a}$,

$$\mathrm{B}([X,H],A) = -\mathrm{B}([H,X],A) = -\overbrace{\mathrm{B}(H,\underbrace{[X,A]}_{\in\mathfrak{a}})}^{=0 \Leftarrow H\in\mathfrak{a}^\perp} = 0$$

Logo $[X, H] \in \mathfrak{a}^\perp$. $\square$

Corolário $\mathrm{Nuc}(\mathrm{B})$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$.

Prova. $\mathrm{Nuc}(\mathrm{B}) = \mathfrak{g}^\perp$. $\square$

Ideais & Forma de Killing

Dada uma subálgebra $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$, designamos por $\mathrm{B}_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathbb{K}$ a forma de Killing de $\mathfrak{a}$.

Proposição *Se $\mathfrak{a}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ então* $\mathrm{B}_{\mathfrak{a}} = \mathrm{B}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$.

Prova. Seja $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ subespaço vectorial tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$. Dados $X, Y \in \mathfrak{a}$, $\mathrm{ad}X, \mathrm{ad}Y : \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s} \to \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ são da forma

$$\mathrm{ad}X = \begin{pmatrix} \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{ad}Y = \begin{pmatrix} \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \ \mathfrak{a} \text{ ideal}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y = \begin{pmatrix} \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X)\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo

$$\mathrm{B}(X, Y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X)\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y)) = \mathrm{B}_{\mathfrak{a}}(X, Y)\,.$$

$\square$

Ideais & Forma de Killing

Proposição *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.*
$\mathfrak{a}$ *ideal comutativo de* $\mathfrak{g}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Nuc}(\mathrm{B})$.

Prova. Seja $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ subespaço vectorial tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$.
Dados $A \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}A, \mathrm{ad}X : \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s} \to \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ são da forma

$$\mathrm{ad}A = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{ad}X = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \; \mathfrak{a} \text{ ideal comutativo}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{ad}A\,\mathrm{ad}X = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{B}(A, X) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}A\,\mathrm{ad}X) = 0$$

$$\Rightarrow \mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Nuc}(\mathrm{B}).$$

□

Critério de Solubilidade de Cartan

Lema de Cartan *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.*
$\mathrm{B}_{\mathfrak{g}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}$ *é solúvel.*

Prova. Feita adiante. □

Proposição *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.*
$\mathrm{Nuc}(\mathrm{B}_{\mathfrak{g}})$ *é um ideal solúvel.*
Em particular, $\mathrm{Nuc}(\mathrm{B}_{\mathfrak{g}}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.

Prova. $\mathrm{Nuc}(\mathrm{B}) = \mathfrak{g}^{\perp}$ é um ideal.
$\mathrm{B}_{\mathrm{Nuc}(\mathrm{B})} = \mathrm{B}|_{\mathfrak{g}^{\perp} \times \mathfrak{g}^{\perp}} = 0$
Lema de Cartan $\Rightarrow \mathrm{Nuc}(\mathrm{B}) = \mathfrak{g}^{\perp}$ é solúvel. □

Critério de Solubilidade de Cartan

Teorema *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.*
$\mathfrak{g}$ *solúvel* $\Leftrightarrow$ $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \mathrm{Nuc}(\mathrm{B})$.

Prova. $(\Leftarrow)$ $\mathrm{Nuc}(\mathrm{B})$ é solúvel
$\Rightarrow$ $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ é solúvel
$\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ é solúvel ($\Leftarrow$ $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ abeliano)

$(\Rightarrow)$ (Caso Complexo)

TS : Matriz Triângular Superior
ETS : Matriz Estritamente Triângular Superior

TS $\cdot$ ETS = ETS $\Rightarrow$ {ETS} ideal de {TS}

Prova do Critério de Solubilidade de Cartan

Teorema de Lie $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ é repres. como álgebra de matrizes TS
$\Rightarrow$ $\mathrm{ad}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = [\mathrm{ad}\mathfrak{g},\mathrm{ad}\mathfrak{g}]$ álgebra de matrizes ETS

$$\mathrm{B}(X,[Y,Z]) = \mathrm{tr}\left(\overbrace{\underbrace{\mathrm{ad}X}_{\text{TS}}\ \underbrace{[\mathrm{ad}Y,\mathrm{ad}Z]}_{\text{ETS}}}^{\text{ETS}}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathrm{Nuc}(\mathrm{B})$.

($\Rightarrow$) (Caso Real)

$\mathfrak{g}$ solúvel $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ é solúvel
$\Rightarrow$ $[\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}] \subset \mathrm{Nuc}(\mathrm{B}^{\mathbb{C}})$
$\Rightarrow$ $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathrm{Nuc}(\mathrm{B}^{\mathbb{C}})$
$\Rightarrow$ $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathrm{Nuc}(\mathrm{B})$

$\square$

Teorema *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.*

$\mathfrak{g}$ *é semisimples* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{B} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ *é não degenerada.*

Prova. $(\Rightarrow)$ $\quad \mathrm{Nuc}(\mathrm{B}_{\mathfrak{g}}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$

$(\Leftarrow)$ Suponhamos $\mathfrak{g}$ não semisimples, $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.

Seja $\mathfrak{a}$ o último ideal não nulo na série do comutador de $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \text{ comutativo} \quad &\Rightarrow \quad \mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Nuc}(\mathrm{B}_{\mathfrak{g}}) \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{B}_{\mathfrak{g}} \text{ é degenerada.} \end{aligned}$$

$\square$

Proposição *Seja* $\mathfrak{g}_0$ *uma forma real de* $\mathfrak{g}$.
$\mathfrak{g}_0$ *é semisimples* $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ *é semisimples.*

Prova. Sejam $\mathrm{B}^{\mathbb{C}} = \mathrm{B}_{\mathfrak{g}}$ e $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{\mathfrak{g}_0}$.

$\mathrm{B}^{\mathbb{C}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ é a extensão linear complexa de $\mathrm{B} : \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \to \mathbb{R}$.

Logo,

$\mathrm{B}^{\mathbb{C}}$ é não degenerada $\Leftrightarrow$ B é não degenerada.

$\square$

Proposição *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semisimples. Se $\mathfrak{a}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ então*

- $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$,
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$,
- $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ *ideal de* $\mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{b}$ *ideal de* $\mathfrak{g}$.

Prova. Pelo Lema de Cartan,

$\Rightarrow \mathrm{Nuc}(\mathrm{B}_\mathfrak{a}) = \mathrm{Nuc}(\mathrm{B}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ é um ideal solúvel

$\Rightarrow \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$ ($\Leftarrow$ $\mathfrak{g}$ semisimples)

$\Rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$

Seja $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ um ideal de $\mathfrak{a}$.

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{b}$$

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}^\perp] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^\perp] \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$$

$$\Rightarrow [\mathfrak{b}, \mathfrak{g}] \subseteq \underbrace{[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]}_{\subset \mathfrak{b}} + \underbrace{[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}^\perp]}_{=0} \subseteq \mathfrak{b}.$$

□

Teorema *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.*
$\mathfrak{g}$ *é semisimples* $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ *decompõem-se como soma directa* $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathfrak{a}_i$ *de ideais simples* $\mathfrak{a}_i$*.*
Se $\mathfrak{g}$ é semisimples, esta decomposição é única, e todo o ideal de $\mathfrak{g}$ é soma de alguns dos ideais $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$.

Prova. $(\Rightarrow)$ Aplicação recursiva da proposição anterior.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_k$ com $\mathfrak{a}_i$ ideal simples.

Lema $\mathfrak{b}$ *ideal de* $\mathfrak{g}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{b} = \bigoplus_{\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{b}} \mathfrak{a}_i$*.*

Seja $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ um ideal solúvel

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = [\oplus_{\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{b}} \mathfrak{a}_i, \oplus_{\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{b}} \mathfrak{a}_i] = \oplus_{\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{b}} [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] = \oplus_{\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{b}} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}$$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{b} = 0$ $(\Leftarrow$ $\mathfrak{b}$ solúvel $)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ semisimples. $\square$

Decomponibilidade das Álgebras Semisimples

Lema $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_k$, *com* $\mathfrak{a}_i$ *ideal simples* $\forall\, i$
$\mathfrak{b}$ *ideal de* $\mathfrak{g}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{b} = \bigoplus_{\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{b}} \mathfrak{a}_i$.

Prova. Seja $P_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}_i$ projecção paralela ao subespaço $\oplus_{j \neq i} \mathfrak{a}_j$

Claim 1 $P_i \mathfrak{b} = 0$ ou $P_i \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_i$

$\forall\, X_i \in \mathfrak{a}_i \quad \forall\, B \in \mathfrak{b}, \quad [P_i B, X_i] = [P_i B, P_i X_i] = P_i[B, X_i] \in P_i \mathfrak{b}$

$\Rightarrow$ $P_i \mathfrak{b}$ é um ideal de $\mathfrak{a}_i$

$\Rightarrow$ $P_i \mathfrak{b} = 0$ ou $P_i \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_i$ ($\Leftarrow$ $\mathfrak{a}_i$ simples)

Claim 2 $P_i \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$

$P_i \mathfrak{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_i \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$

$P_i \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_i \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{a}_i = [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] = [\mathfrak{a}_i, P_i \mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b}$

porque $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] = 0, \ \forall\, j \neq i$ $\square$

Decomponibilidade das Álgebras Semisimples

Corolário *Se* $\mathfrak{g}$ *é semisimples então* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Prova. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_k$ uma decomposição em ideais simples $\mathfrak{a}_i$.

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\oplus_i \mathfrak{a}_i, \oplus_i \mathfrak{a}_i] = \oplus_i [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] = \oplus_i \mathfrak{a}_i = \mathfrak{g}$$

$\square$

Preparação da Prova do Lema de Cartan

Proposição *Para todo* $X \in \mathrm{gl}_{\mathbb{K}}(V)$,
X *nilpotente* $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}X$ *nilpotente.*

Prova.

$$(\mathrm{ad}X)\,Y = X\,Y - Y\,X$$
$$(\mathrm{ad}X)^2\,Y = X^2\,Y - 2\,X\,Y\,X + Y\,X^2$$
$$(\mathrm{ad}X)^3\,Y = X^3\,Y - 3\,X^2\,Y\,X + 3\,X\,Y\,X^2 - Y\,X^3$$

$$(\mathrm{ad}X)^{2n}\,Y = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} X^j\,Y\,X^{2n-j}$$

$$X^n = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{ad}X)^{2n} = 0. \qquad \square$$

Proposição *Para todo* $X \in \mathrm{gl}_{\mathbb{K}}(V)$,

X *semisimples* $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}X$ *semisimples.*

Fixada uma base de vectores próprios $(e_i)_i$ *de* V, $X\, e_i = \lambda_i\, e_i$, *os endomorfismos* $E_{i,j} \in \mathrm{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ *definidos por*

$$E_{i,j}(e_i) = e_j \quad e \quad E_{i,j}(e_k) = 0, \quad \forall\, k \neq i$$

formam uma base de vectores próprios de $\mathrm{ad}X$,

$$(\mathrm{ad}X)\, E_{i,j} = (\lambda_j - \lambda_i)\, E_{i,j}\ .$$

Prova. $(\mathrm{ad}X)\, E_{i,j} = X\, E_{i,j} - E_{i,j}\, X$.

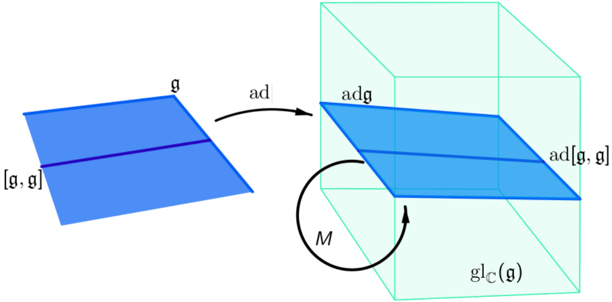
$(\mathrm{ad}X)\, E_{i,j}\,(e_i) = X(e_j) - \lambda_i\, E_{i,j}(e_i) = \lambda_j\, e_j - \lambda_i\, e_j = (\lambda_j - \lambda_i)\, e_j$

$(\mathrm{ad}X)\, E_{i,j}\,(e_k) = X\, E_{i,j}(e_k) - \lambda_k\, E_{i,j}(e_k) = 0$ se $k \neq i$

$\Rightarrow$ $(\mathrm{ad}X)\, E_{i,j} = (\lambda_j - \lambda_i)\, E_{i,j}$. $\square$

Preparação da Prova do Lema de Cartan

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, e $\mathrm{ad}_0 : \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{Der}(\mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}))$ a representação adjunta de $\mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$.



Proposição *Se $M \in \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}))$ é um polinómio em $\mathrm{ad}_0(\mathrm{ad}X)$, com $X \in \mathfrak{g}$, então $M\,\mathrm{ad}\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{ad}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.*

Prova da Proposição. Dado $\mathrm{ad}Z \in \mathrm{ad}\mathfrak{g}$, com $Z \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad}_0(\mathrm{ad}X)\,(\mathrm{ad}Z) = [\mathrm{ad}X, \mathrm{ad}Z] = \mathrm{ad}[X, Z]$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{ad}_0(\mathrm{ad}X)\,\mathrm{ad}\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{ad}_0(\mathrm{ad}X)^k\,\mathrm{ad}\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ \forall\, k \geq 0 \qquad \text{(por indução em } k\text{)}$$

$$\Rightarrow \ P(\mathrm{ad}_0(\mathrm{ad}X))\,\mathrm{ad}\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ \forall\, P(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]. \qquad \square$$

Prova do Lema de Cartan

Suponhamos nula a forma de Killing $\mathrm{B} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$.

Claim $\mathrm{ad}\, Y$ é nilpotente, $\forall\, Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Prova do Lema de Cartan.

$$
\begin{aligned}
\text{Teor. Engel} \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \text{ é nilpotente} \\
&\Rightarrow \quad [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \text{ é nilpotente} \\
&\Rightarrow \quad [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \text{ é solúvel} \\
&\Rightarrow \quad \mathfrak{g} \text{ é solúvel} \qquad (\Leftarrow \ \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \text{ é comutativo})
\end{aligned}
$$

□

Prova da Claim

Seja $Y = \sum_i [X_i, Z_i] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ com $X_i, Z_i \in \mathfrak{g}$.

Teor. Jordan $\Rightarrow$ $\exists\, s, n \in \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ tais que $\mathrm{ad}\, Y = s + n$

$s\, n = n\, s$, s semisimples, n nilpotente

Queremos ver que $s = 0$.

Seja $\overline{s} \in \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ semisimples tal que $s(v) = \lambda\, v \;\Leftrightarrow\; \overline{s}(v) = \overline{\lambda}\, v$.

$$
\begin{aligned}
s\, n = n\, s \quad &\Rightarrow \; n \text{ estabiliza os espaços próprios de } s \\
&\Rightarrow \; n \text{ estabiliza os espaços próprios de } \overline{s} \\
&\Rightarrow \; \overline{s}\, n = n\, \overline{s} \quad \Rightarrow \; \overline{s}\, n \text{ é nilpotente} \\
&\Rightarrow \; \mathrm{tr}(\overline{s}\, n) = 0
\end{aligned}
$$

Prova da Claim

Iremos mostrar que $\mathrm{ad}_0(\bar{s})$ é um polinómio em $\mathrm{ad}_0(\mathrm{ad}\, Y)$.

$\Rightarrow \quad \mathrm{ad}_0(\bar{s})\,(\mathrm{ad}\mathfrak{g}) \subset \mathrm{ad}\mathfrak{g}$.

$$
\begin{aligned}
0 \leq \mathrm{tr}(\bar{s}\, s) = \mathrm{tr}(\bar{s}\,(s+n)) &= \mathrm{tr}(\bar{s}\,(\mathrm{ad}\, Y)) \\
&= \sum_i \mathrm{tr}(\bar{s}\,\mathrm{ad}[X_i, Z_i]) \\
&= \sum_i \mathrm{tr}(\bar{s}\,[\mathrm{ad}X_i, \mathrm{ad}Z_i]) \\
&= \sum_i \mathrm{tr}([\bar{s}, \mathrm{ad}X_i]\,\mathrm{ad}Z_i) \\
&= \sum_i \mathrm{tr}(\underbrace{\mathrm{ad}_0(\bar{s})(\mathrm{ad}X_i)}_{\in \mathrm{ad}\mathfrak{g}}\ \mathrm{ad}Z_i) = 0
\end{aligned}
$$

$$\Uparrow$$

$$\mathrm{B}_{\mathfrak{g}} = 0$$

$\Rightarrow \quad s = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ad}\, Y$ é nilpotente.

Prova da Claim

Falta mostrar que $\mathrm{ad}_0(\bar{s})$ é um polinómio em $\mathrm{ad}_0(\mathrm{ad}\, Y)$.

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{ad}\, Y = s + n & \Rightarrow & \mathrm{ad}_0(\mathrm{ad}\, Y) = \mathrm{ad}_0(s) + \mathrm{ad}_0(n) \\
n \text{ nilpotente} & \Rightarrow & \mathrm{ad}_0(n) \text{ nilpotente} \\
s \text{ semisimples} & \Rightarrow & \mathrm{ad}_0(s) \text{ semisimples} \\
\text{Teor. Jordan} & \Rightarrow & \exists\, P(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda] \quad \mathrm{ad}_0(s) = P(\mathrm{ad}_0(\mathrm{ad}\, Y)).
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{spec}(s) = \{\lambda_i\}_i & \Rightarrow & \mathrm{spec}(\bar{s}) = \{\overline{\lambda_i}\}_i \\
& \Rightarrow & \mathrm{spec}(\mathrm{ad}_0(s)) = \{\lambda_j - \lambda_i\}_{i,j} \\
& \Rightarrow & \mathrm{spec}(\mathrm{ad}_0(\bar{s})) = \{\overline{\lambda_j} - \overline{\lambda_i}\}_{i,j}
\end{array}$$

Escolhendo um polinómio $T(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ tal que

$$T(\lambda_j - \lambda_i) = \overline{\lambda_j} - \overline{\lambda_i}, \ \forall\, i, j$$

Temos $\mathrm{ad}_0(\bar{s}) = T(\mathrm{ad}_0(s)) = T(P(\mathrm{ad}_0(\mathrm{ad}\, Y)))$.

Proposição *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa, e $\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}$ uma sua forma real, i.e., $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\,\mathfrak{g}_0$.*
$\mathfrak{g}_0$ é uma álgebra real simples $\Leftrightarrow$ vale uma das alternativas:

(a) $\mathfrak{g}_0$ tem uma estrutura de álgebra complexa simples de $\mathfrak{g}$.
Neste caso, $\mathfrak{g} \simeq_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$ não é simples.

(b) $\mathfrak{g}$ é uma álgebra complexa simples.

Prova. ($\Leftarrow$ (a)) Sup. que $\mathfrak{g}_0$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}$-simples.
Seja $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}_0$ um $\mathbb{R}$-ideal.
$\mathfrak{g}_0$ é $\mathbb{C}$-simples $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}_0$ é $\mathbb{C}$-semisimples $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}_0$ é $\mathbb{R}$-semisimples

$\Rightarrow [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_0]_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]_{\mathbb{R}} \subseteq [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_0]_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_0]_{\mathbb{R}} \Rightarrow$

$\Rightarrow i\,[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_0]_{\mathbb{R}} = [\mathfrak{a}, i\,\mathfrak{g}_0]_{\mathbb{R}} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_0]_{\mathbb{R}} = \mathfrak{a} \Rightarrow$ $\mathfrak{a}$ é um $\mathbb{C}$-ideal

$\Rightarrow \mathfrak{a} = \{0\}$ ou $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_0 \Rightarrow$ $\mathfrak{g}_0$ é $\mathbb{R}$-simples.

Continuação da Prova.

($\Leftarrow$ (b)) Sup. que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\,\mathfrak{g}_0$ é $\mathbb{C}$-simples.

$\mathfrak{a}_0$ $\mathbb{R}$-ideal de $\mathfrak{g}_0$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus i\,\mathfrak{a}_0$ $\mathbb{C}$-ideal de $\mathfrak{g}$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{a} = \{0\}$ ou $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{a}_0 = \{0\}$ ou $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{g}_0$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g}_0$ é $\mathbb{R}$-simples.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\mathfrak{g}_0$ é $\mathbb{R}$-simples.

($\Rightarrow$ (a)) Sup. que $\mathfrak{g}_0$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra.

$\forall\, \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{a}$ $\mathbb{C}$-ideal $\Rightarrow$ $\mathfrak{a}$ $\mathbb{R}$-ideal, $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}_0$ é $\mathbb{C}$-simples.

($\Rightarrow$ (b)) Sup. que $\mathfrak{g}_0$ não tem estrutura de $\mathbb{C}$-álgebra.

Seja $\mathfrak{a}$ um $\mathbb{C}$-ideal não nulo de $\mathfrak{g}$. $\Rightarrow$ $\bar{\mathfrak{a}}$ $\mathbb{C}$-ideal de $\mathfrak{g}$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{a} \cap \bar{\mathfrak{a}}$ $\mathbb{C}$-ideal de $\mathfrak{g}$ invariante por conjugação

$\Rightarrow$ $\mathfrak{a} \cap \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_0 \oplus i\,\mathfrak{a}_0$ para algum $\mathbb{R}$-ideal $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{g}$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{a}_0 = \{0\}$ ou $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{g}_0$ ($\Leftarrow$ $\mathfrak{g}_0$ $\mathbb{R}$-simples)

$\Rightarrow$ $\mathfrak{a} \cap \bar{\mathfrak{a}} = \{0\}$ ou $\mathfrak{a} \cap \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{g}$.

Continuação da Prova.

Pelo mesmo argumento, $\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{a}} = \{0\}$ ou $\mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{g}$.

Suponhamos, por absurdo, que $\mathfrak{a} \cap \overline{\mathfrak{a}} = \{0\}$, $\Rightarrow$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \overline{\mathfrak{a}}$.

Seja $\varphi : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{a}$ a composição da inclusão $\mathfrak{g}_0 \hookrightarrow \mathfrak{g}$ com a projecção $\pi : \mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \overline{\mathfrak{a}} \to \mathfrak{a}$.

$\mathfrak{g}_0$ $\mathbb{R}$-simples $\Rightarrow$ $\mathrm{Nuc}(\varphi) = \{0\}$ ou $\mathrm{Nuc}(\varphi) = \mathfrak{g}_0$.

$\mathrm{Nuc}(\varphi) = \mathfrak{g}_0$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}_0 = \overline{\mathfrak{g}_0} \subseteq \overline{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ $\Rightarrow$ ABSURDO.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Nuc}(\varphi) = \{0\}$ $\Rightarrow$ $\varphi : \mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{a}$ é um $\mathbb{R}$-isomorfismo

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g}_0$ tem estrutura de álgebra complexa $\Rightarrow$ ABSURDO.

$\Rightarrow$ $\mathfrak{a} \cap \overline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{g}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$.

Logo, $\mathfrak{g}$ é $\mathbb{C}$-simples. $\square$

Álgebras Semisimples Complexas

Álgebras de Lie Complexas Semisimples

$\updownarrow$

Sistemas de Raízes

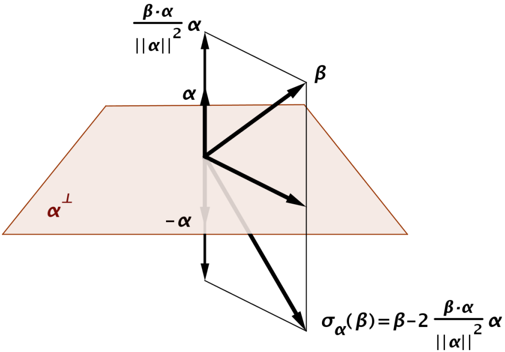
$\updownarrow$

Diagramas de Dynkin/Matrizes de Cartan

Reflexões

Seja V um espaço Euclideano.
Para cada vector $\alpha \in V - \{0\}$, seja $\sigma_\alpha : V \to V$ a reflexão em torno do plano $\alpha^\perp$

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \, \alpha \quad \text{onde} \quad \langle \beta, \alpha \rangle := \frac{2(\beta \cdot \alpha)}{\alpha \cdot \alpha}$$



Seja V um espaço Euclideano.

Um conjunto $\Delta \subset V$ diz-se um **sistema de raízes** sse

(1) Δ é finito, $0 \notin \Delta$ e $V = \langle \Delta \rangle$.

(2) $\alpha \in \Delta \;\Rightarrow\;$ os únicos múltiplos de α em Δ são $\pm\alpha$.

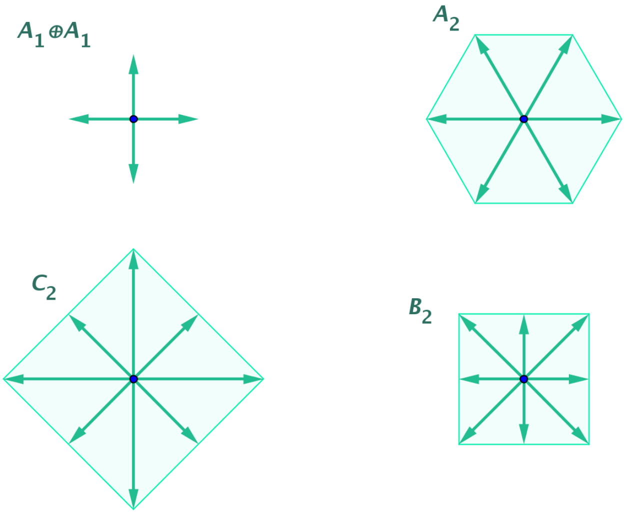
(3) $\alpha \in \Delta \;\Rightarrow\; \sigma_\alpha(\Delta) = \Delta$.

(4) $\alpha, \beta \in \Delta \;\Rightarrow\; \langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Os elementos de Δ dizem-se **raízes**.

O grupo de simetrias $\mathcal{W}(\Delta)$ gerado pelas reflexões σ_α com $\alpha \in \Delta$ diz-se o **grupo de Weyl** do sistema de raízes Δ.

Exemplos de Sistemas de Raízes



Algumas Propriedades dos Sistemas de Raízes

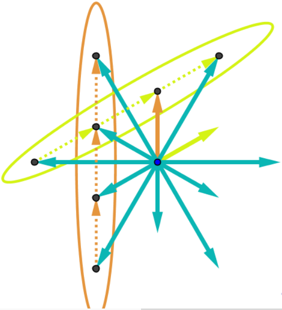
Proposição *Dadas raízes $\alpha, \beta \in \Delta$ não colineares,*

(1) $\alpha \cdot \beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha - \beta \in \Delta$,

(2) $\alpha \cdot \beta < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta \in \Delta$.

(3) $\{\, n \in \mathbb{N} \,:\, \beta + n\,\alpha \in \Delta \,\} = \{p, p+1, \ldots, q\}$ *com* $p + q = -\langle \beta, \alpha \rangle$. *A sequência de raízes* $\{\, \beta + n\,\alpha \,:\, p \leq n \leq q \,\}$ *diz-se a* α-**string por** β.

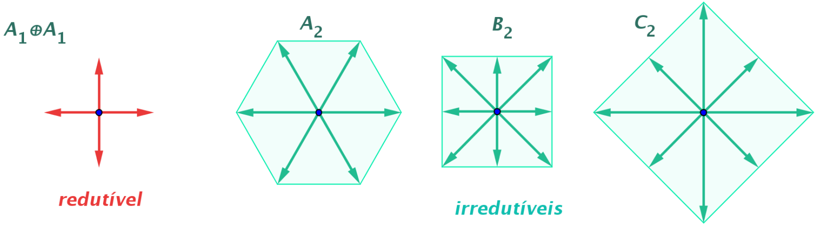
(4) *Todas as strings de raízes têm comprimento* ≤ 4.



Sistemas de raízes Irredutíveis

Um sistema de raízes Δ diz-se **redutível** $\Leftrightarrow$ existir uma decomposição $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ tal que $\Delta_1 \perp \Delta_2$, $\Delta_1 \neq \emptyset$ e $\Delta_2 \neq \emptyset$. Escreve-se $\Delta = \Delta_1 \oplus \Delta_2$ para representar esta decomposição.

Δ diz-se **irredutível** $\Leftrightarrow$ não existir uma tal decomposição.



Isomorfismos

Os sistema de raízes (V, Δ) e (V', Δ') dizem-se **isomorfos** $\Leftrightarrow$ existir um isomorfismo $\phi : V \to V'$ tal que

(1) $\phi(\Delta) = \Delta'$, e

(2) $\langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$, $\forall\, \alpha, \beta \in \Delta$.

Diz-se então que ϕ é um **isomorfismo** de Δ em Δ'.

Todo o isomorfismo $\phi : (V, \Delta) \to (V', \Delta')$ satisfaz

$$\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\sigma_\alpha(\beta)), \ \forall\, \alpha, \beta \in \Delta.$$

Em particular, $\mathcal{W}(\Delta') = \phi\, \mathcal{W}(\Delta)\, \phi^{-1}$.

Raízes Positivas

Dado um sistema de raízes Δ, podemos escolher um subconjunto $\Delta_+ \subset \Delta$ tal que

(1) $\Delta = -\Delta_+ \cup \Delta_+$ e $-\Delta_+ \cap \Delta_+ = \emptyset$,

(2) $\forall\, \alpha, \beta \in \Delta_+,\ \ \alpha + \beta \in \Delta \ \ \Rightarrow\ \ \alpha + \beta \in \Delta_+$.

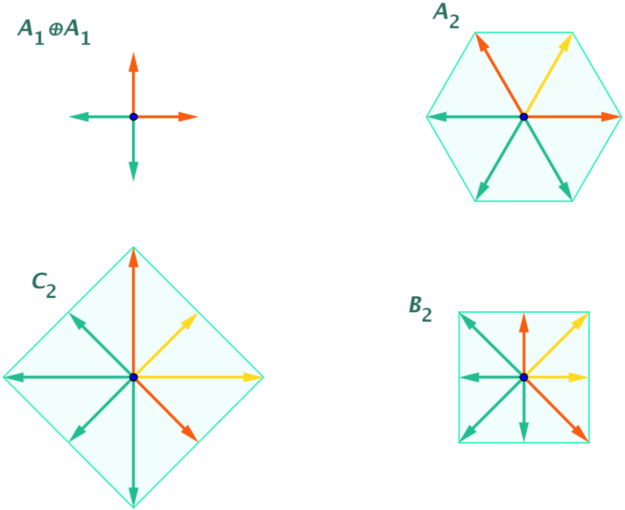
Uma raiz $\alpha \in \Delta_+$, resp. $\alpha \in -\Delta_+$, diz-se **positiva**, resp. **negativa**.

A escolha das raízes positivas satisfazendo (1) e (2) permite-nos definir a seguinte relação de ordem parcial:

$$\alpha \prec \beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta - \alpha \in \Delta_+$$

Proposição *Dados subconjuntos $\Delta_+, \Delta'_+ \subset \Delta$ satisfazendo (1) e (2), existe $\phi \in \mathcal{W}(\Delta)$ tal que* $\phi(\Delta_+) = \Delta'_+$.

Exemplos de Raízes Positivas e Simples



Dizemos que uma raiz $\alpha \in \Delta$ é **simples** $\Leftrightarrow$ α é positiva e não se decompõem como soma de duas raízes positivas.

Seja $\Pi = \{\, \alpha \in \Delta \,:\, \alpha \text{ é simples } \} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$.

Proposição *$\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ é uma base de V.*
$\forall \alpha \in \Delta_+ \quad \exists\, n_i \in \mathbb{Z},\ n_i \geq 0$, *tal que* $\quad \alpha = \sum_{i=1}^{\ell} n_i\, \alpha_i$.

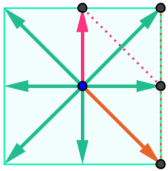
Proposição *$\mathcal{W}(\Delta)$ é gerado por $\{\, \sigma_\alpha \,:\, \alpha \in \Pi \,\}$.*
$\forall \alpha \in \Delta \quad \exists\, \beta \in \Pi \quad \exists\, \phi \in \mathcal{W}(\Delta)$ *tal que* $\quad \alpha = \phi(\beta)$.
Em particular, Δ pode ser reconstruído a partir de Π.

Sejam (V, Δ) um sistema de raízes,
Δ_+ um conjunto de raízes positivas, e
$(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ uma ordenação do conjunto Π das raízes simples.

$$A = \left(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \right)_{1 \le i,j \le \ell} = \left(2\, \frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{\|\alpha_j\|^2} \right)_{1 \le i,j \le \ell}$$

diz-se a **matriz de Cartan** do sistema Δ.

B_2



$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Proposição *Seja A a matriz de Cartan dum sistema de raízes Δ.*

(1) $A_{i,j} \in \mathbb{Z}$, $\forall\, i, j = 1, \ldots, \ell$,

(2) $A_{i,i} = 2$, $\forall\, i = 1, \ldots, \ell$,

(3) $A_{i,j} \leq 0$, $\forall\, i, j = 1, \ldots, \ell$ *com* $i \neq j$,

(4) $A_{i,j} < 0 \;\Leftrightarrow\; A_{j,i} < 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, \ell$,

(5) $\exists$ *matriz diagonal* $D > 0$ *tal que* $D^{-1} A\, D$ *é simétrica e definida positiva.* $(D = \mathrm{diag}(\|\alpha_1\|, \ldots, \|\alpha_\ell\|))$

Qualquer matriz A que satisfaça as propriedades (1)-(5) diz-se uma **matriz de Cartan abstracta**.

Propriedades das Matrizes de Cartan Abstractas

Proposição *Dada uma matriz de Cartan abstracta A,*
$\forall\, i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, \ell,$
(1) $A_{i,j}\, A_{j,i} < 4$,
(2) $A_{i,j} \in \{0, -1, -2, -3\}$.

Em particular $(A_{i,j}, A_{j,i})$ *toma um de seis valores possíveis:*
$(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(-1, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, -3)$ *ou* $(-3, -1)$.

e o produto $A_{i,j}\, A_{j,i}$ *só toma os valores* 0, 1, 2 *ou* 3.

Irredutibilidade duma Matriz de Cartan

Duas matrizes de Cartan abstractas dizem-se *isomorfas* $\Leftrightarrow$ forem conjugadas por uma matriz de permutação.

Uma matriz de Cartan abstracta A diz-se **redutível** $\Leftrightarrow$ A for isomorfa a uma matriz diagonal por blocos com pelo menos dois blocos não triviais. Caso contrário, A diz-se **irredutível**.

Proposição *A menos dum isomorfismo, a matriz de Cartan dum sistema de raízes é independente das escolha do conjunto de raízes positivas e da ordenação das raízes simples.*

Teorema *Dois sistemas de raízes são isomorfos* $\Leftrightarrow$ *admitem matrizes de Cartan isomorfas.*

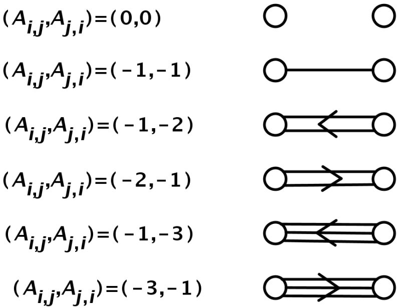
Teorema *Seja* Δ *um sistema de raízes com matriz de Cartan* A*.*

Δ *é irredutível* $\Leftrightarrow$ A *é irredutível.*

Diagramas de Dynkin

Toda a matriz de Cartan abstracta $A \in \mathrm{Mat}_{\ell\times\ell}(\mathbb{Z})$ determina um grafo não orientado, chamado o **grafo de Coxeter de** A , com vértices $\{1,\ldots,\ell\}$ e $A_{i,j}\,A_{j,i}$ arestas ligando os vértices i e j.

Orientando as arestas múltiplas do grafo de Coxeter de acordo com os valores do par $(A_{i,j}, A_{j,i})$, como indicado na tabela seguinte, obtemos o chamado **Diagrama de Dynkin** da matriz A.



Matrizes de Cartan Abstractas $\leftrightarrow$ Diagramas de Dynkin

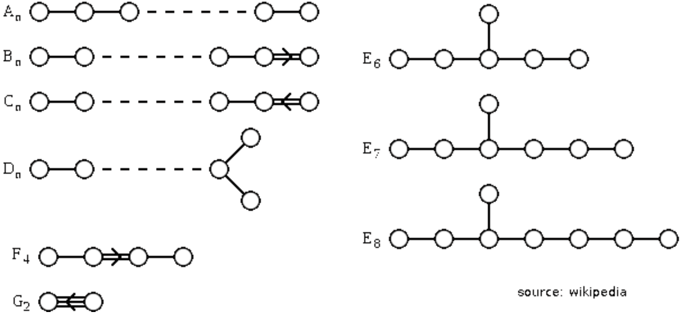
O diagrama de Dynkin duma matriz de Cartan abstracta contém toda a informação dessa matriz.

Proposição *Duas matrizes de Cartan abstractas são isomorfas* $\Leftrightarrow$ *os respectivos diagramas de Dynkin são isomorfos enquanto grafos orientados.*

Proposição *Um matriz de Cartan abstracta A é irredutível* $\Leftrightarrow$ *o grafo de Coxeter de A é conexo.*

Classificação de Sistemas de Raízes

Teorema *Todo o sistema de raízes irredutível num espaço Euclideano de dimensão n tem um dos seguintes Diagramas de Dynkin:* A_n $(n \geq 1)$, B_n $(n \geq 2)$, C_n $(n \geq 2)$, D_n $(n \geq 4)$, E_n $(n = 6, 7$ *ou* $8)$, F_4 $(n = 4)$ *ou* G_2 $(n = 2)$.

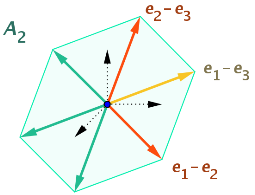


A família A_n $(n \geq 1)$

$$V = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \}$$

$$\Delta = \{ e_i - e_j \,:\, 1 \leq i \neq j \leq n+1 \}$$

$$= \{ \alpha \in V \cap \mathbb{Z}^{n+1} \,:\, \|\alpha\|^2 = 2 \}$$



$$\begin{aligned} \alpha \in \mathbb{Z}^{n+1} \quad &\Rightarrow \quad \langle \alpha, e_i - e_j \rangle = \alpha_i - \alpha_j \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \quad \sigma_{e_i - e_j}(\alpha) = \alpha - (\alpha_i - \alpha_j)\,(e_i - e_j) \\ &\Rightarrow \quad \sigma_{e_i - e_j}(\mathbb{Z}^{n+1}) = \mathbb{Z}^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{e_i - e_j}(\Delta) = \Delta \end{aligned}$$

Raízes positivas

$$\Delta_+ = \{ e_i - e_j \,:\, 1 \leq i < j \leq n+1 \}$$

Raízes simples

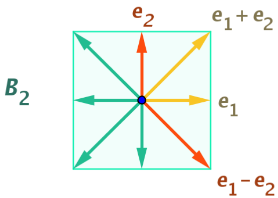
$$\Pi = \{ e_1 - e_2,\, e_2 - e_3,\, \ldots,\, e_n - e_{n+1} \}$$

A família B_n $(n \geq 2)$

$$V = \mathbb{R}^n$$

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \,:\, 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm e_i \,:\, 1 \leq i \leq n\}$$

$$= \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \,:\, 1 \leq \|\alpha\|^2 \leq 2\}$$



$$\alpha \in \mathbb{Z}^n \;\Rightarrow\; \langle \alpha, \pm e_i \pm e_j \rangle = \pm\alpha_i \pm \alpha_j \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow\; \sigma_{\pm e_i \pm e_j}(\alpha) = \alpha - (\pm\alpha_i \pm \alpha_j)(\pm e_i \pm e_j)$$
$$\Rightarrow\; \sigma_{\pm e_i \pm e_j}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n \;\Rightarrow\; \sigma_{\pm e_i \pm e_j}(\Delta) = \Delta$$

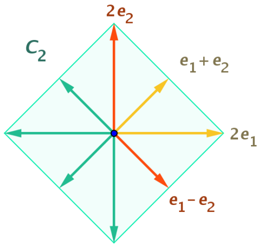
Raízes positivas

$$\Delta_+ = \{e_i \pm e_j \,:\, 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{e_i \,:\, 1 \leq i \leq n\}$$

Raízes simples

$$\Pi = \{e_1 - e_2,\, e_2 - e_3,\, \ldots,\, e_{n-1} - e_n,\, e_n\}$$

A família C_n $(n \geq 2)$



$$V = \mathbb{R}^n$$

$$\Delta = \{\, \pm e_i \pm e_j \;:\; 1 \leq i \neq j \leq n \,\} \cup \{\, \pm 2\, e_i \;:\; 1 \leq i \leq n \,\}$$

$$= \{\, \alpha \in \mathbb{Z}^n \;:\; \|\alpha\|^2 = 2 \text{ ou } 4 \,\}$$

$$\alpha \in \mathbb{Z}^n \quad \Rightarrow \; \langle \alpha, \pm 2e_i \rangle = \pm \alpha_i \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \; \sigma_{\pm 2e_i}(\alpha) = \alpha - 2\,\alpha_i\, e_i$$
$$\Rightarrow \; \sigma_{\pm 2e_i}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n \quad \Rightarrow \; \sigma_{\pm 2e_i}(\Delta) = \Delta$$

Raízes positivas

$$\Delta_+ = \{\, e_i \pm e_j \;:\; 1 \leq i < j \leq n \,\} \cup \{\, 2\, e_i \;:\; 1 \leq i \leq n \,\}$$

Raízes simples

$$\Pi = \{\, e_1 - e_2,\; e_2 - e_3,\; \ldots,\; e_{n-1} - e_n,\; 2\, e_n \,\}$$

A família D_n ($n \geq 4$)

$V = \mathbb{R}^n$

$$\Delta = \{\, \pm e_i \pm e_j \,:\, 1 \leq i \neq j \leq n \,\} = \{\, \alpha \in \mathbb{Z}^n \,:\, \|\alpha\|^2 = 2 \,\}$$

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathbb{Z}^n \quad &\Rightarrow \; \langle \alpha, \pm e_i \pm e_j \rangle = \pm\alpha_i \pm \alpha_j \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \; \sigma_{\pm e_i \pm e_j}(\alpha) = \alpha - (\pm\alpha_i \pm \alpha_j)\,(\pm e_i \pm e_j) \\ &\Rightarrow \; \sigma_{\pm e_i \pm e_j}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n \quad \Rightarrow \; \sigma_{\pm e_i \pm e_j}(\Delta) = \Delta \end{aligned}$$

Raízes positivas

$\Delta_+ = \{\, e_i \pm e_j \,:\, 1 \leq i < j \leq n \,\}$

Raízes simples

$\Pi = \{\, e_1 - e_2,\, e_2 - e_3,\, \ldots,\, e_{n-2} - e_{n-1},\, e_{n-1} - e_n,\, e_{n-1} + e_n \,\}$

Álgebras Semisimples Complexas

Álgebras de Lie Complexas Semisimples

$$\updownarrow$$

Sistemas de Raízes

Uma $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ diz-se uma **subálgebra de Cartan** $\Leftrightarrow$

(1) $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra comutativa maximal,

(2) $\forall\, H \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad} H$ é semisimples.

Teorema *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa semisimples.*

(1) $\mathfrak{g}$ *admite subálgebras de Cartan.*

(2) $\forall\, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ *subálgebras de Cartan,*
$\exists\, \phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *tal que* $\mathfrak{h}_2 = \phi(\mathfrak{h}_1)$.

Existência de Subálgebras de Cartan: Elementos Regulares

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa.
Dados $H \in \mathfrak{g}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\mathfrak{g}(H,\lambda) := \{\, X \in \mathfrak{g} \;:\; \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } (\mathrm{ad} H - \lambda\, I)^k\, X = 0 \,\} .$$

$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} \mathfrak{g}(H,\lambda)$ é a decomposição espectral de $\mathrm{ad} H$.

$H \in \mathfrak{g}(H,0) \quad \Rightarrow \;$ dim $\mathfrak{g}(H,0) \geq 1, \;\; \forall\, H \in \mathfrak{g}$.

$H \in \mathfrak{g}$ diz-se **regular** $\quad \Leftrightarrow$

$$\dim \mathfrak{g}(H,0) = \min\{\, \dim \mathfrak{g}(X,0) \;:\; X \in \mathfrak{g}\,\}.$$

Teorema $\;\forall\, H \in \mathfrak{g}$, *$H$ é regular* $\;\Rightarrow\; \mathfrak{h} = \mathfrak{g}(H,0)$ *é uma subálgebra de Cartan.*

Proposição $\{ H \in \mathfrak{g} : H$ *é regular* $\}$ *é aberto em* $\mathfrak{g}$.

Prova. Sejam $n = \dim \mathfrak{g}$ e $m = \min\{ \dim \mathfrak{g}(X,0) : X \in \mathfrak{g} \}$.

Dada $H \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{rank}[\,(\mathrm{ad} H)^n\,] \leq n - m \quad \Leftarrow \quad \mathrm{Nuc}[\,(\mathrm{ad} H)^n\,] = \mathfrak{g}(H,0)$$

tem $\dim \geq m$

$$H \text{ é regular } \Leftrightarrow \mathrm{rank}[\,(\mathrm{ad} H)^n\,] \geq n - m$$

A condição $\mathrm{rank}[\,(\mathrm{ad} H)^n\,] \geq n - m$ é aberta. $\square$

Uma Fórmula Binomial

Lema *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa. Quaisquer que sejam* $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$(\mathrm{ad} Z - (\lambda + \mu) I)^n [X, Y] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [\, (\mathrm{ad} Z - \lambda I)^i X,\, (\mathrm{ad} Z - \mu I)^{n-i} Y\,]$$

Prova. Para $n = 1$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad} Z - (\lambda + \mu) I)[X, Y] &= (\mathrm{ad} Z)[X, Y] - \lambda [X, Y] - \mu [X, Y] \\
&= [(\mathrm{ad} Z) X, Y] - \lambda [X, Y] + \\
&\quad\ [X, (\mathrm{ad} Z) Y] - \mu [X, Y] \\
&= [\, (\mathrm{ad} Z - \lambda I) X,\ Y\,] + [\, X,\ (\mathrm{ad} Z - \mu I) Y\,]
\end{aligned}$$

O caso geral segue por indução em n. □

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa.

Proposição *Quaisquer que sejam* $H \in \mathfrak{g}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$[\,\mathfrak{g}(H,\lambda),\, \mathfrak{g}(H,\mu)\,] \subseteq \mathfrak{g}(H, \lambda+\mu).$$

Em particular, $\mathfrak{g}(H,0)$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{g}$.

Prova.

Se $(\mathrm{ad} H - \lambda\, I)^k\, X = 0$ e $(\mathrm{ad} H - \mu\, I)^r\, Y = 0$

Fórmula Binomial $\Rightarrow$ $(\mathrm{ad} H - (\lambda+\mu)\, I)^{k+r}\, [X, Y] = 0.$ $\square$

Proposição *Seja* $H \in \mathfrak{g}$ *um elemento regular*

(a) existe um subconjunto aberto denso $S \subseteq \mathfrak{g}(H,0)$ *tal que* $\mathfrak{g}(H',0) = \mathfrak{g}(H,0),\ \forall\, H' \in S$

(b) $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(H,0)$ *é uma subálgebra nilpotente*

$\mathfrak{h}$ é nilpotente

Prova (a). Sejam $\mathfrak{g}' = \oplus_{\lambda \neq 0}\, \mathfrak{g}(H, \lambda)$ e $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(H, 0)$.
Dado $H' \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad} H'$ estabiliza $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}'$.
Seja $\Phi_{H'} = (\mathrm{ad} H')|_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$.
Como $\det \Phi_H \neq 0$, o conjunto $S = \{\, H' \in \mathfrak{h} \,:\, \det \Phi_{H'} \neq 0 \,\}$ é aberto e denso em $\mathfrak{h}$.

$$H' \in S \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}(H', 0) \subseteq \mathfrak{h} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}(H', 0) = \mathfrak{g}(H, 0)$$

porque H regular $\square$

Prova (b).

(a) $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} H'$ é nilpotente, $\forall\, H' \in S$
$\Rightarrow$ $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} H')^{\ell} = 0$, $\forall\, H' \in S$, onde $\ell = \dim \mathfrak{h}$
$\Rightarrow$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} H'$ é nilpotente, $\forall\, H' \in \mathfrak{h}$ porque S denso

Teor. Engel $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} \mathfrak{h}$ é nilpotente
$\Rightarrow$ $\mathfrak{h}$ é nilpotente. $\square$

Ortogonalidade relativa à Forma de Killing

Proposição *Dados* $H \in \mathfrak{g}$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *tais que* $\lambda + \mu \neq 0$, $\mathfrak{g}(H, \lambda)$ *é* B*-ortogonal a* $\mathfrak{g}(H, \mu)$.

Prova. Dado $H \in \mathfrak{g}$ com $\mathrm{spec}(\mathrm{ad} H) = \{0 = \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, consideremos uma base de $\mathfrak{g}$ obtida juntando bases dos espaços $\mathfrak{g}(H, 0)$, $\mathfrak{g}(H, \lambda_1)$, ..., $\mathfrak{g}(H, \lambda_n)$.

$$\forall X \in \mathfrak{g}(H, \lambda_i),\ Y \in \mathfrak{g}(H, \lambda_j),\ \ \lambda_i + \lambda_j \neq 0,$$
$$(\mathrm{ad} X)(\mathrm{ad} Y)\mathfrak{g}(H, \lambda_k) \subseteq \mathfrak{g}(H, \lambda_k + \lambda_i + \lambda_j)$$

$\Rightarrow$ $(\mathrm{ad} X)(\mathrm{ad} Y)$ é representada por uma matriz com diagonal nula na base acima

$$\Rightarrow\ \mathrm{B}(X, Y) = \mathrm{tr}\left((\mathrm{ad} X)(\mathrm{ad} Y) \right) = 0 \qquad \square$$

$\mathfrak{h}$ é comutativa

Proposição *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa e* **semisimples**. *Dado $H \in \mathfrak{g}$ regular, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(H, 0)$ é uma subálgebra abeliana maximal.*

Prova. Sejam $\mathfrak{g}' = \oplus_{\lambda \neq 0}\, \mathfrak{g}(H, \lambda)$, $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$.

Prop. anterior $\Rightarrow \forall\, X \in \mathfrak{g}',\ \mathrm{B}(\underbrace{[H_1, H_2]}_{\in \mathfrak{h}}, X) = 0.$

$\mathfrak{h}$ nilpotente + Critério de Solubilidade de Cartan

$\Rightarrow \forall\, H \in \mathfrak{h},\ \mathrm{B}([H_1, H_2], H) = 0.$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}'$ $\Rightarrow \forall\, X \in \mathfrak{g},\ \mathrm{B}([H_1, H_2], X) = 0.$

$\mathfrak{g}$ semisimples $\Rightarrow [H_1, H_2] = 0$

$\Rightarrow \mathfrak{h}$ é abeliana.

$\mathfrak{h}$ é comutativa maximal

Continuação da Prova. Resta provar a maximalidade de $\mathfrak{h}$.

Seja $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra abeliana tal que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{a}$.

$$\Rightarrow \ (\mathrm{ad}H)|_{\mathfrak{a}} = 0$$

$$\Rightarrow \ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}(H, 0) = \mathfrak{h}$$

$$\Rightarrow \ \mathfrak{a} = \mathfrak{h}. \qquad \square$$

Decomposição semisimples duma representação

Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$,
$\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa.

Chama-se **representação de $\mathfrak{g}$ em V** a todo o homomorfismo de álgebras de Lie complexas $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$.

Chama-se **decomposição semisimples** de $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ a uma decomposição em soma directa $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ tal que $\forall\, X \in \mathfrak{g},\ \forall\, i = 1, \ldots, m,\quad \rho(X)(V_i) \subseteq V_i$ e $\exists\, \lambda_i(X) \in \mathbb{C}$ tal que
$\rho(X)|_{V_i} = \lambda_i(X)\, I$ é um múltiplo da identidade.

Para cada $i = 1, \ldots, m$, a aplicação $X \mapsto \lambda_i(X)$ é um funcional linear $\lambda_i \in \mathfrak{g}^*$ que se diz um **peso** de $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$.
O subespaço V_i fica completamente determinado pelo peso λ_i,
$V_i = \{\, v \in V \,:\, \forall\, X \in \mathfrak{g},\ \rho(X)\, v = \lambda_i(X)\, v \,\}$.

Existência de Decomposição Semisimples

Teorema *Seja* $\rho : \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ *uma representação duma álgebra comutativa* $\mathfrak{h}$ *num espaço vectorial* V *tal que*

$\forall\, X \in \mathfrak{h}, \quad \rho(X)$ *é semisimples.*

Então ρ *admite uma decomposição semisimples.*

Prova. Prova por indução em $n = \dim \mathfrak{h}$.

$n = 1 \;\Rightarrow\; \mathfrak{h} = \langle A \rangle$

$\rho(A)$ semisimples $\;\Rightarrow\; \exists$ decomposição semisimples de ρ

$\dim \mathfrak{h} = n \;\Rightarrow\; \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \langle A \rangle$ com $\mathfrak{h}_0$ hiperplano de $\mathfrak{h}$

Hip. Indução $\;\Rightarrow\; \exists\, V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ decomposição semisimples

de $\rho|\mathfrak{h}_0 : \mathfrak{h}_0 \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$.

$\rho(A)(V_i) \subseteq V_i \;\Rightarrow\; \rho(A)|_{V_i} : V_i \to V_i$ admite uma decomposição semisimples.

Juntando as sub-decomposições de cada V_i obtemos a decomposição semisimples de ρ. $\square$

Raízes de $\mathfrak{g}$ relativas a $\mathfrak{h}$

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa semisimples,
$\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan.

Corolário *A restrição da representação adjunta* $\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ *admite uma decomposição semisimples.*

Um funcional linear $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ diz-se uma **raiz de $\mathfrak{g}$ relativa à subálgebra $\mathfrak{h}$** $\Leftrightarrow$ α for um peso de $\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$.

$$\Delta := \{\, \alpha \in \mathfrak{h}^* - \{0\} \;:\; \alpha \text{ é uma raiz de } \mathfrak{g} \,\}$$

Decomposição Espacial das Raízes de $\mathfrak{g}$ relativa a $\mathfrak{h}$

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa semisimples,
$\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan.

Para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{\, X \in \mathfrak{g} \,:\, \forall\, H \in \mathfrak{h},\ (\mathrm{ad} H)X = \alpha(H)\, X \,\}$$

diz-se o **espaço próprio** associado à raiz α.

Proposição $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ *e* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ *é a decomposição semisimples da representação* $\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$.

Dado $H \in \mathfrak{h}$, como $\mathrm{ad} H$ é semisimples,

$$\mathfrak{g}(H, \lambda) = \{ X \in \mathfrak{g} \,:\, (\mathrm{ad} H) X = \lambda X \}.$$

Fixada $(H_1, \ldots, H_m)$ base de $\mathfrak{h}$,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \bigcap_{H \in \mathfrak{h}} \mathfrak{g}(H, \alpha(H)) = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{g}(H_i, \alpha(H_i)).$$

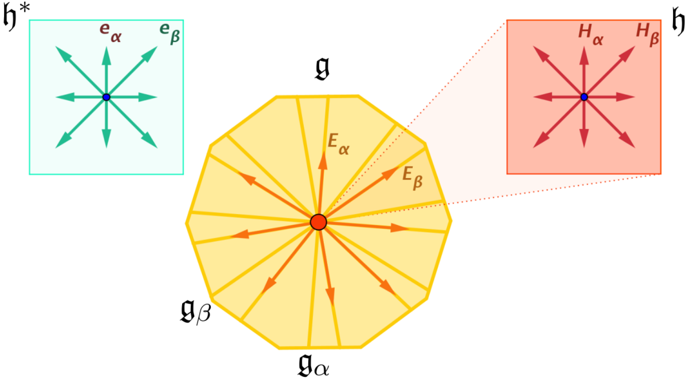
Proposição *Dadas raízes $\alpha, \beta \in \Delta$,*

(1) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$,

(2) $\alpha + \beta \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathfrak{g}_\alpha$ *e* $\mathfrak{g}_\beta$ *são* B*-ortogonais*

Prova. (1) e (2) resultam das propriedades análogas para os espaços próprios $\mathfrak{g}(H, \lambda)$. $\square$

Decomposição Espacial das Raízes



Mais Propriedades da Decomposição de $\mathfrak{g}$ relativas a $\mathfrak{h}$

Proposição

(3) $\mathrm{B}|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ *é não degenerada,*

(4) $\mathrm{B}(H, H') = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(H)\, \alpha(H')\, \dim \mathfrak{g}_\alpha$,

(5) $\forall\, H \in \mathfrak{h},\ \ H = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall\, \alpha \in \Delta\ \ \alpha(H) = 0$,

(6) $\mathfrak{h}^* = \langle \Delta \rangle$,

(7) $\forall\, \alpha \in \Delta \ \ \ \exists^1\ \ H_\alpha \in \mathfrak{h} \ \ \ \forall\, H \in \mathfrak{h},\ \alpha(H) = \mathrm{B}(H, H_\alpha)$,

(8) $\alpha \in \Delta \ \Rightarrow\ -\alpha \in \Delta$ *e* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}\, H_\alpha$.

Prova de (3).

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\alpha) = 0,\ \forall\, \alpha \in \Delta \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Nuc}(\mathrm{B}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}) \subseteq \mathrm{Nuc}(\mathrm{B}) \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{Nuc}(\mathrm{B}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}) = \{0\} \qquad \Leftarrow \ \mathfrak{g} \text{ semisimples} \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{B}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} \text{ é não degenerada.} \end{aligned}$$ $\square$

Prova de (4): $\mathrm{B}(H, H') = \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(H)\,\alpha(H') \dim \mathfrak{g}_\alpha$.

$$H \in \mathfrak{h} \text{ e } \ \alpha \in \Delta \ \Rightarrow \ (\mathrm{ad}\, H)\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}_\alpha \ \text{ e } \ (\mathrm{ad}\, H)|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \alpha(H)\, I$$

$$\begin{aligned} H, H' \in \mathfrak{h} \quad &\Rightarrow \ (\mathrm{ad}\, H)(\mathrm{ad}\, H')|_{\mathfrak{h}} = 0 \\ &\Rightarrow \ (\mathrm{ad}\, H)(\mathrm{ad}\, H')|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \alpha(H)\alpha(H')\, I \\ &\Rightarrow \ \mathrm{tr}\left[\,(\mathrm{ad}\, H)(\mathrm{ad}\, H')|_{\mathfrak{g}_\alpha}\right] = \alpha(H)\alpha(H') \dim \mathfrak{g}_\alpha \end{aligned}$$ $\square$

Prova de (5): $\forall\, H \in \mathfrak{h},\ \ H = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall\, \alpha \in \Delta\ \ \alpha(H) = 0$ **.**
Seja $H \in \mathfrak{h}$.

$$\begin{aligned} \forall\, \alpha \in \Delta,\ \ \alpha(H) = 0 \ &\Rightarrow\ H \in \mathrm{Nuc}(\mathrm{B}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}) && \text{por (4)} \\ &\Rightarrow\ H = 0 && \text{por (3)} \end{aligned}$$ $\square$

Prova de (6): $\mathfrak{h}^* = \langle \Delta \rangle$ **.**

$$\Delta^\perp = \{0\} \subset \mathfrak{h} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{h}^* = 0^\perp = (\Delta^\perp)^\perp = \langle \Delta \rangle.$$ $\square$

Prova de (7): $\forall\, \alpha \in \Delta\ \exists^1\ H_\alpha \in \mathfrak{h}\ \forall\, H \in \mathfrak{h},\ \alpha(H) = \mathrm{B}(H, H_\alpha)$ **.**
Segue de (3): $\mathrm{B}|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ é não degenerada. $\square$

Prova de (8): $\alpha \in \Delta \ \Rightarrow\ -\alpha \in \Delta$ **.**
Seja $\alpha \in \Delta$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{-\alpha} = \{0\} \quad &\Rightarrow \quad \mathfrak{g}_\alpha \text{ é } \mathrm{B}\text{-ortogonal a } \mathfrak{g} \\ &\Rightarrow \quad \mathfrak{g}_\alpha = \{0\} \qquad \Leftarrow \ \mathrm{B} \text{ não degenerada} \\ &\Rightarrow \quad \alpha \notin \Delta. \end{aligned}$$

Logo $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq \{0\}$, o que implica que $-\alpha \in \Delta$.

Prova de (8): $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}\, H_\alpha$ **.**

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}([X_\alpha, X_{-\alpha}], H) &= \mathrm{B}(X_\alpha, [X_{-\alpha}, H]) = \mathrm{B}(X_\alpha, -(\mathrm{ad} H)\, X_{-\alpha}) \\
&= \mathrm{B}(X_\alpha, \alpha(H)\, X_{-\alpha}) = \alpha(H)\, \mathrm{B}(X_\alpha, X_{-\alpha}) \\
&= \mathrm{B}(X_\alpha, X_{-\alpha})\, \mathrm{B}(H_\alpha, H) \\
&= \mathrm{B}\, (\mathrm{B}(\, X_\alpha, X_{-\alpha})\, H_\alpha,\ H\,)\ \ \forall\, H \in \mathfrak{h}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ [X_\alpha, X_{-\alpha}] = \mathrm{B}(\, X_\alpha, X_{-\alpha})\, H_\alpha \in \mathbb{C}\, H_\alpha. \qquad \square$$

Ainda Mais Propriedades

Proposição

(9) $\forall\,\alpha \in \Delta,\ \alpha(H_\alpha) \neq 0,$

(10) $\forall\,\alpha \in \Delta,\ \dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1,$

(11) $\mathrm{B}(H, H') = \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(H)\,\alpha(H'),$

(12) $\forall\,\alpha, \beta \in \Delta,\ \{\, n \in \mathbb{N} \,:\, \beta + n\alpha \in \Delta \,\}$ *é um intervalo* $\{p, p+1, \ldots, q\}$ *tal que* $p + q = -2\,\frac{\mathrm{B}(H_\beta,H_\alpha)}{\mathrm{B}(H_\alpha,H_\alpha)},$

(13) $\forall\,\alpha, \beta \in \Delta,\ \beta - 2\,\frac{\mathrm{B}(H_\beta,H_\alpha)}{\mathrm{B}(H_\alpha,H_\alpha)}\,\alpha \in \Delta,$

(14) $\forall\,\alpha \in \Delta,\ \pm\alpha$ *são as únicas raízes em* Δ *colineares com* α.

Dados $\alpha, \beta \in \Delta$, chama-se α-**string maximal** a uma sequência $\{\, \beta + n\,\alpha \,:\, p \leq n \leq q \,\} \subseteq \Delta$ tal que $\beta + (p-1)\alpha \notin \Delta$ e $\beta + (q+1)\alpha \notin \Delta$.

Lema *Para cada α-string maximal $\{\, \beta + n\,\alpha \,:\, p \leq n \leq q \,\}$,* $\beta(H_\alpha) \sum_{n=p}^{q} \dim(\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}) = -\alpha(H_\alpha) \sum_{n=p}^{q} n \dim(\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha})$.

Nas provas que seguem consideramos uma família de vectores não nulos $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ escolhidos de forma que $\mathrm{B}(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$, $\forall\, \alpha \in \Delta$.

Prova. Seja $\mathfrak{a} = \bigoplus_{n=p}^{q} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$.

Este subespaço é invariante por $\mathrm{ad} H_\alpha$, $\mathrm{ad} E_\alpha$ e $\mathrm{ad} E_{-\alpha}$.

Continuação da Prova.

$\mathrm{B}(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1 \quad \Rightarrow \quad [E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha \quad \Rightarrow$

$(\mathrm{ad} H_\alpha)|_{\mathfrak{a}} = (\mathrm{ad} E_\alpha)|_{\mathfrak{a}} (\mathrm{ad} E_{-\alpha})|_{\mathfrak{a}} - (\mathrm{ad} E_{-\alpha})|_{\mathfrak{a}} (\mathrm{ad} E_\alpha)|_{\mathfrak{a}}$
tem traço nulo.

Por outro lado $(\mathrm{ad} H_\alpha)|_{\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}} = (\beta + n\alpha)(H_\alpha)\, I$.

Logo

$$0 = \mathrm{tr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{ad} H_\alpha) = \sum_{n=p}^{q} (\beta + n\alpha)(H_\alpha)\, \dim(\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha})$$

$$\Updownarrow$$

$$\beta(H_\alpha) \sum_{n=p}^{q} \dim(\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}) = -\alpha(H_\alpha) \sum_{n=p}^{q} n\, \dim(\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha})$$

$\square$

Prova de (9): $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ **.**
Suponhamos por absurdo que $\alpha(H_\alpha) = 0$.

Lema anterior $\Rightarrow \beta(H_\alpha) = 0, \ \forall \beta \in \Delta$

$\Rightarrow H_\alpha = 0$ por (5)

$\Rightarrow \alpha = 0$ ABSURDO $\square$

Prova de (10): $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$.

Suponhamos por absurdo que $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) \geq 2$.
$\Rightarrow \ \exists\, D_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha - \{0\}$ tal que $\mathrm{B}(D_\alpha, E_{-\alpha}) = 0$.

Claim $[E_{-\alpha}, (\mathrm{ad} E_\alpha)^n D_\alpha] = -(1 + 2 + \ldots + n)\alpha(H_\alpha)\, D_\alpha$

$$[E_{-\alpha}, (\mathrm{ad} E_\alpha)^0 D_\alpha] = [E_{-\alpha}, D_\alpha] = \overbrace{\mathrm{B}(E_{-\alpha}, D_\alpha)}^{=0}\, H_\alpha = 0$$

$$\begin{aligned}
[E_{-\alpha}, (\mathrm{ad} E_\alpha) D_\alpha] &= [E_{-\alpha}, [E_\alpha, D_\alpha]] \\
&= -[E_\alpha, \underbrace{[D_\alpha, E_{-\alpha}]}_{=0}] - [D_\alpha, \underbrace{[E_{-\alpha}, E_\alpha]}_{=-H_\alpha}] \\
&= [D_\alpha, H_\alpha] = -(\mathrm{ad} H_\alpha) D_\alpha = -\alpha(H_\alpha)\, D_\alpha
\end{aligned}$$

Continuação da Prova de (10) .
A prova da Claim faz-se por indução adaptando o cálculo anterior a cada passo.

$$\text{Claim} \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{ad} E_\alpha)^n D_\alpha \neq 0, \quad \forall\, n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{g}_{(n+1)\alpha} \neq \{0\}, \quad \forall\, n \geq 1 \quad \Leftarrow \quad (\mathrm{ad} E_\alpha)^n D_\alpha \in \mathfrak{g}_{(n+1)\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \text{ é infinito} \qquad \text{ABSURDO} \qquad \Box$$

Prova de (11): $\quad \mathrm{B}(H, H') = \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(H)\, \alpha(H')$ **.**
Segue de (10) e da fórmula (4). $\Box$

Prova de (12) . Pelo lema anterior, $\forall$ α-string maximal

$$\beta(H_\alpha)\sum_{n=p}^{q}\overbrace{\dim(\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha})}^{=1} = -\alpha(H_\alpha)\sum_{n=p}^{q} n\,\overbrace{\dim(\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha})}^{=1}$$

$$\Rightarrow\ (q-p+1)\,\beta(H_\alpha) = -\frac{(q-p+1)(p+q)}{2}\,\alpha(H_\alpha)$$

$$\Rightarrow\ p+q = -2\,\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = -2\,\frac{\mathrm{B}(H_\beta,H_\alpha)}{\mathrm{B}(H_\alpha,H_\alpha)}$$

Em particular, Δ não pode ter mais que uma α-string maximal. $\square$

Prova de (13) . Seja $\{\,\beta+n\alpha\ :\ p\le n\le q\,\}$ a α-string maximal.

$$\beta - 2\,\frac{\mathrm{B}(H_\beta,H_\alpha)}{\mathrm{B}(H_\alpha,H_\alpha)}\,\alpha = \beta+(p+q)\,\alpha\in\Delta$$

porque $p\le p+q\le q \quad \Leftarrow\ p\le 0\le q \quad \Leftarrow\ \beta\in\Delta$ $\square$

Prova de (14) . Sejam $\{\, n\alpha \;:\; p \leq n \leq q \,\}$ a α-string maximal por $\beta = 0$ e $\mathfrak{a} = \bigoplus_{n=-1}^{q} \mathfrak{g}_{n\alpha}$.

Este subespaço é invariante por $\mathrm{ad} H_\alpha$, $\mathrm{ad} E_\alpha$ e $\mathrm{ad} E_{-\alpha}$.

$(\mathrm{ad} H_\alpha)\mathfrak{g}_{n\alpha} \subseteq \mathfrak{g}_{n\alpha}$, $(\mathrm{ad} E_\alpha)\mathfrak{g}_{n\alpha} \subseteq \mathfrak{g}_{(n+1)\alpha}$, $(\mathrm{ad} E_\alpha)\mathfrak{g}_{q\alpha} = \{0\}$,
$(\mathrm{ad} E_{-\alpha})\mathfrak{g}_{n\alpha} \subseteq \mathfrak{g}_{(n-1)\alpha}$ e $(\mathrm{ad} E_{-\alpha})\mathfrak{g}_{-\alpha} = \{0\}$.

Pelo mesmo argumento do lema anterior

$$\Rightarrow\; 0 = \mathrm{tr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{ad} H_\alpha)|_{\mathfrak{a}}) = \sum_{n=-1}^{q} n\,\alpha(H_\alpha) = \tfrac{(q+2)(q-1)}{2}\alpha(H_\alpha)$$
$$\Rightarrow\; q = 1$$

Por outro lado,

$$p\,\alpha \in \Delta \;\Rightarrow\; -p\,\alpha \in \Delta \;\Rightarrow\; -p = 1 \;\Rightarrow\; p = -1$$

Logo $\pm\alpha$ são as únicas raízes múltiplas inteiras de α.

Continuação da Prova de (14) .

Seja $\beta = c\,\alpha \in \Delta$ com $c \in \mathbb{C}$.

$$(12) \quad \Rightarrow \quad -2\,c = -2\,\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = p + q \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \quad c \in \tfrac{1}{2}\,\mathbb{Z}$$

$c \notin \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$ a α-string por β contém $\frac{1}{2}\,\alpha$

caso anterior $\Rightarrow \quad \alpha = 2\,(\frac{1}{2}\,\alpha) \notin \Delta \quad$ ABSURDO

Logo $c \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad c = \pm 1 \quad$ Pelo caso anterior $\square$

Proposição *A aplicação* $\Phi : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}$, $\Phi(\alpha) = H_\alpha$, *definida por* $\mathrm{B}(H, H_\alpha) = \alpha(H)$, $\forall\, H \in \mathfrak{h}$, *é um isomorfismo.*

Prova. Basta usar (3): $B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ é não degenerada. □

Consideremos agora o subespaço linear real $\mathfrak{h}_0 = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}\, H_\alpha$.

Proposição

(a) $\mathrm{B} : \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{h}_0 \to \mathbb{C}$ *toma valores reais e é definida positiva.*

(b) $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus i\, \mathfrak{h}_0$.

Prova de (a). $\forall\, \alpha, \beta \in \Delta$, seja $\{\, \beta + n\alpha \,:\, p_{\alpha,\beta} \leq n \leq q_{\alpha,\beta} \,\}$ a α-string maximal por β, com $p_{\alpha,\beta} \leq 0 \leq q_{\alpha,\beta}$ inteiros.

(12) $\Rightarrow\ \beta(H_\alpha) = -\frac{1}{2}\, \alpha(H_\alpha)\, (p_{\alpha,\beta} + q_{\alpha,\beta})$

$$\Rightarrow\ \alpha(H_\alpha) = \mathrm{B}(H_\alpha, H_\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta} \beta(H_\alpha)^2 \quad \text{por (11)}$$
$$= \frac{1}{4}\, \alpha(H_\alpha)^2 \sum_{\beta\in\Delta} (p_{\alpha,\beta} + q_{\alpha,\beta})^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ $\alpha(H_\alpha)$ é um número real positivo porque $\alpha(H_\alpha) \neq 0$

$\Rightarrow$ $\beta(H_\alpha) = -\frac{1}{2}\, \alpha(H_\alpha)\, (p_{\alpha,\beta} + q_{\alpha,\beta})$ é um número real

$\Rightarrow$ $\mathrm{B}(H, H) = \sum_{\beta\in\Delta} \beta(H)^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ B é definida positiva porque B não degenerada $\square$

Prova de (b). Seja $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}_0 \cap i\,\mathfrak{h}_0$.

$$H \in \mathfrak{a} \quad \Rightarrow \quad H \in \mathfrak{h}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B}(H,H) \geq 0$$

$$\begin{aligned} H \in \mathfrak{a} \quad & \Rightarrow \quad i\,H \in \mathfrak{h}_0 \\ & \Rightarrow \quad -\mathrm{B}(H,H) = i^2\,\mathrm{B}(H,H) = \mathrm{B}(iH,iH) \geq 0 \\ & \Rightarrow \quad \mathrm{B}(H,H) = 0, \quad \forall\, H \in \mathfrak{a} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{a} = \{0\} \\ & \Rightarrow \quad \mathfrak{h}_0 \cap i\,\mathfrak{h}_0 = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus i\,\mathfrak{h}_0 \end{aligned}$$

$\square$

Sistema de Raízes da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$

Seja $(\mathfrak{h}_0)^*$ o dual real de $\mathfrak{h}_0$.

Proposição *Para cada raiz* $\alpha \in \Delta$, *a sua restrição a* $\mathfrak{h}_0$ *toma valores reais. Em particular podemos considerar que* $\Delta \subset (\mathfrak{h}_0)^*$.

O espaço $(\mathfrak{h}_0)^*$ é Euclideano quando munido do produto interno seguinte $\alpha \cdot \beta := \mathrm{B}(H_\alpha, H_\beta)$.

Proposição $(\,(\mathfrak{h}_0)^*, \Delta\,)$ *é um sistema de raízes.*

Prova. Queremos ver que $\Delta \subset (\mathfrak{h}_0)^*$ é um sistema de raízes.

(1) Δ é finito porque $\#\Delta \leq \dim \mathfrak{g}$
$0 \notin \Delta$ por definição de Δ e
$\langle \Delta \rangle = (\mathfrak{h}_0)^*$ por (6).

(2) $\pm\alpha$ são os únicos múltiplos de α em Δ por (14)

(3) $\sigma_\alpha(\Delta) = \Delta$ por (13)

(4) $\langle \beta, \alpha \rangle = 2\,\frac{\mathrm{B}(H_\beta, H_\alpha)}{\mathrm{B}(H_\alpha, H_\alpha)} \in \mathbb{Z}$ por (12). $\square$

Critério de Simplicidade

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa semisimples, e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan. Seja $(\,(\mathfrak{h}_0)^*,\,\Delta\,)$, o sistema de raízes associado ao par $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Teorema *Para a toda a álgebra de Lie semisimples,*
$\mathfrak{g}$ *é simples* $\Leftrightarrow$ $(\,(\mathfrak{h}_0)^*,\,\Delta\,)$ *é irredutível.*

Prova. $(\Rightarrow)$ $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ redutível $\Rightarrow$ $\forall\, i = 1, 2$

$$\mathfrak{a}_i = \left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_i} \mathbb{C} H_\alpha\right) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_i} \mathfrak{g}_\alpha\right) \text{ ideal próprio}$$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ não é simples.

Prova do Critério de Simplicidade

Continuação da Prova. $(\Leftarrow)$ Sup. que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ não é simples, com $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ ideais. Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan.

Claim 1 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ com $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$.

Fixemos $H \in \mathfrak{h}$ regular tal que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(H, 0)$.

$H = H_1 + H_2 \in \mathfrak{h}$ com $H_i \in \mathfrak{g}_i \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ 0 = (\mathrm{ad} H)H = \underbrace{(\mathrm{ad} H)\, H_1}_{\in \mathfrak{g}_1} + \underbrace{(\mathrm{ad} H)\, H_2}_{\in \mathfrak{g}_2}$$

$$\Rightarrow\ (\mathrm{ad} H)\, H_1 = 0 = (\mathrm{ad} H)\, H_2 \quad \Rightarrow \quad H_1,\ H_2 \in \mathfrak{g}(H, 0) = \mathfrak{h}.$$

Claim 2 $\mathfrak{h}_i$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_i$.

Exercício.

Prova do Critério de Simplicidade

Seja $\Delta_i \subset (\mathfrak{h}_i)^*$ o sistema de raízes de $\mathfrak{g}_i$ relativamente a $\mathfrak{h}_i$, e seja $\pi : \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \to \mathfrak{h}_i$ o homomorfismo projecção.

Então $\quad \Delta = \pi_1^* \Delta_1 \cup \pi_2^* \Delta_2 \quad$ é o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ rel. $\mathfrak{h}$.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}_1 \quad \mathrm{B}\text{-ortogonal a } \mathfrak{g}_2 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{B}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \pi_1^* \Delta_1 \quad \text{é ortogonal a} \quad \pi_2^* \Delta_2 \\
&\Rightarrow \quad \Delta \quad \text{é redutível.}
\end{aligned}
$$

$\square$

Estrutura da álgebra de Lie determinada por Δ

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa semisimples, e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan. Seja $((\mathfrak{h}_0)^*, \Delta)$, o sistema de raízes associado ao par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Teorema *É possível escolher um vector $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, para cada $\alpha \in \Delta$, de modo que: $\forall\, \alpha, \beta \in \Delta$,*

(1) $[H, E_\alpha] = \alpha(H)\, E_\alpha$, $\forall\, H \in \mathfrak{h}$,

(2) $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$,

(3) $[E_\alpha, E_\beta] = 0$ *se* $\alpha + \beta \neq 0$ *e* $\alpha + \beta \notin \Delta$

(4) $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}\, E_{\alpha+\beta}$ *se* $\alpha + \beta \in \Delta$

onde as constantes $N_{\alpha,\beta}$ satisfazem

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \Delta\ .$$

Para uma tal escolha $N_{\alpha,\beta}^2 = \frac{q\,(1-p)}{2}\, \alpha(H_\alpha)$, *sendo $p \leq 0 < q$ inteiros tais que* $\{\beta + n\alpha\ :\ p \leq n \leq q\}$ *é a α-string maximal por β.*

Sejam $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ álgebras de Lie complexas semisimples, e $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ as respectivas subálgebras de Cartan. Sejam $(\,(\mathfrak{h}_0)^*,\,\Delta\,)$, o sistema de raízes associado ao par $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ e $(\,(\mathfrak{h}_0')^*,\,\Delta'\,)$, o sistema de raízes associado ao par $(\mathfrak{g}',\mathfrak{h}')$.

Teorema *O adjunto* $\phi^*:\mathfrak{h}_0'\to\mathfrak{h}_0$ *de qualquer isomorfismo* $\phi:(\,(\mathfrak{h}_0)^*,\,\Delta\,)\to(\,(\mathfrak{h}_0')^*,\,\Delta'\,)$ *entre estes sistemas de raízes pode estender-se a um isomorfismo* $\widehat{\phi^*}:\mathfrak{g}'\to\mathfrak{g}$ *entre as respectivas álgebras de Lie.*

A álgebra $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$

Elementos regulares : Matrizes com valores próprios distintos.

Subálgebra de Cartan : $\mathfrak{d} = \{ \, D \in \mathrm{sl}(n, \mathbb{C}) \; : \; D$ é diagonal $\}$.

Decomposição de $\mathrm{ad} : \mathfrak{d} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathrm{sl}(n, \mathbb{C}))$:

$$\mathrm{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{d} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C}\, E_{i,j}$$

$$(\mathrm{ad} D)\, E_{i,j} = (D_{i,i} - D_{j,j})\, E_{i,j}, \;\; \forall\, D \in \mathfrak{d}$$

$E_{i,j} \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ é a matriz com entrada $i\,j$ igual a 1
e todas as restantes nulas.

Sistema de Raízes : $\Delta = \{ \, e_i - e_j \; : \; i \neq j \, \}$ onde

$$e_i(D) = D_{i,i}, \;\; \forall\, D \in \mathfrak{d}.$$

Esta álgebra é do tipo A_{n-1}.

A álgebra $\mathrm{sp}(n, \mathbb{C})$

$$\mathrm{sp}(n, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \,:\, A, B, C \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}),\ B, C \text{ simétricas} \right\}$$

Elementos regulares : Matrizes com valores próprios distintos.

Subálgebra de Cartan :

$$\mathfrak{d} = \{ D \in \mathrm{sp}(n, \mathbb{C}) \,:\, D \text{ é diagonal simpléctica} \}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \,:\, D \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \text{ diagonal} \right\}$$

A álgebra $\mathrm{sp}(n, \mathbb{C})$

Seja como antes $e_i : \mathfrak{d} \to \mathbb{C}$, $e_i(D) = D_{i,i}$.

Decomposição de $\mathrm{ad} : \mathfrak{d} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathrm{sp}(n, \mathbb{C}))$:

$$\begin{aligned} S_{i,j} &= \begin{pmatrix} E_{i,j} & 0 \\ 0 & -E_{j,i} \end{pmatrix} \qquad 1 \leq i \neq j \leq n \\ (\mathrm{ad} D)\, S_{i,j} &= (D_{i,i} - D_{j,j})\, S_{i,j} \\ &= (e_i - e_j)(D)\, S_{i,j}, \quad \forall\, D \in \mathfrak{d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= \begin{pmatrix} 0 & E_{i,j} + E_{j,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \leq i \leq j \leq n \\ (\mathrm{ad} D)\, U_{i,j} &= (D_{i,i} + D_{j,j})\, U_{i,j} \\ &= (e_i + e_j)(D)\, U_{i,j}, \quad \forall\, D \in \mathfrak{d} \end{aligned}$$

A álgebra $\mathrm{sp}(n, \mathbb{C})$

$$L_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,j} + E_{j,i} & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{ad} D)\, L_{i,j} &= (-D_{i,i} - D_{j,j})\, L_{i,j} \\ &= (-e_i - e_j)(D)\, L_{i,j}, \quad \forall\, D \in \mathfrak{d} \end{aligned}$$

$$\mathrm{sp}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{d} \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C}\, S_{i,j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i,j} \mathbb{C}\, L_{i,j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i,j} \mathbb{C}\, U_{i,j} \right)$$

Sistema de Raízes : $\Delta = \{\, \pm e_i \pm e_j \;:\; i \neq j \,\} \cup \{\, \pm 2\, e_i \,\}$

Esta álgebra é do tipo C_n.

A álgebra $\mathrm{so}(n,\mathbb{C})$

A álgebra de Lie real $\mathrm{so}(n)$ é uma forma real da seguinte álgebra de Lie complexa

$$\mathrm{so}(n,\mathbb{C}) = \{\, A \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C}) \,:\, A^T = -A \,\}\ .$$

Elementos regulares : Matrizes com valores próprios distintos.

Subálgebra de Cartan :
$\mathfrak{d}_n = \{\, D \in \mathrm{so}(n,\mathbb{C}) \,:\, D$ é diagonal por blocos $2 \times 2 \,\}$

Uma matriz $D \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ diz-se **diagonal por blocos** 2×2 sse $D = \mathrm{diag}(D_1, \ldots, D_k)$ onde cada $D_i \in \mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$, à excepção do último bloco que satisfaz $D_k \in \mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$ se $n = 2k$, e $D_k \in \mathrm{gl}(1,\mathbb{C})$ se $n = 2k-1$.

Diagonais por Blocos 2×2 em $\mathrm{so}(n, \mathbb{C})$

$$J_2(h) := \begin{pmatrix} 0 & -ih \\ ih & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{2k}(h_1, \ldots, h_k) := \mathrm{diag}\,(\, J_2(h_1), \ldots, J_2(h_k)\,)$$
$$J_{2k-1}(h_1, \ldots, h_{k-1}) := \mathrm{diag}\,(\, J_2(h_1), \ldots, J_2(h_{k-1}),\, 0\,)$$

$J_n : \mathbb{R}^{[n/2]} \to \mathfrak{d}_n$ é um isomorfismo.

$\forall\, h \in \mathbb{R}^{[n/2]}$, consideremos $\mathrm{ad} J_n(h) : \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$
$\forall\, X = (X_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ onde cada $X_{i,j} \in \mathrm{gl}(2, \mathbb{C})$, à excepção da última linha e da última coluna que no caso $n = 2k - 1$, fora da diagonal, são respectivamente blocos 1×2 e 2×1.

$$(\mathrm{ad} J_n(h))X = (\, J(h_i)X_{i,j} - X_{i,j}J(h_j)\,)_{i,j}$$

convencionando que $J(h_i) = J_2(h_i)$ se $n = 2k$ ou $i < k$ com $n = 2k - 1$, e que $J(h_k) = 0$ quando $n = 2k - 1$.

A álgebra $\mathrm{so}(2, \mathbb{C})$

$$\mathrm{so}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -ih \\ ih & 0 \end{pmatrix} : h \in \mathbb{C} \right\}$$

é uma álgebra de dimensão complexa um

$$\Downarrow$$

$\mathrm{ad} : \mathrm{so}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathrm{so}(2, \mathbb{C}))$ é identicamente nula

$$\Downarrow$$

$\mathrm{so}(2, \mathbb{C})$ é abeliana.

$$F = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ \hline -1 & -i & 0 \end{array}\right) \quad G = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i \\ \hline 1 & -i & 0 \end{array}\right)$$

Decomposição de $\mathrm{ad} : \mathfrak{d}_3 \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathrm{so}(3,\mathbb{C}))$: $\forall\, H = J_3(h)$,

$$(\mathrm{ad} H)\, F = h\, F = e_1(H)\, F$$

$$(\mathrm{ad} H)\, G = -h\, G = -e_1(H)\, G$$

$$\mathrm{so}(3,\mathbb{C}) = \mathfrak{d}_3 \oplus \langle F \rangle \oplus \langle G \rangle$$

Sistema de Raízes : $\Delta = \{e_1, -e_1\}$.
Álgebra de tipo A_1.

Consideremos as matrizes antissimétricas

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ \hline -1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & -1 \\ \hline -1 & -i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$P = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & i & 1 \\ \hline -1 & -i & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad Q = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ \hline -1 & i & 0 & 0 \\ -i & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A decomposição espacial das raízes de $\mathrm{so}(4,\mathbb{C})$ é

$$\mathrm{so}(4,\mathbb{C}) = \mathfrak{d}_4 \oplus \langle M \rangle \oplus \langle N \rangle \oplus \langle P \rangle \oplus \langle Q \rangle.$$

A álgebra $\mathrm{so}(4,\mathbb{C})$

Decomposição de $\mathrm{ad}:\mathfrak{d}_4 \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathrm{so}(4,\mathbb{C}))$:
$\forall\, H = J_4(h_1,h_2) \in \mathfrak{d}_4$,

$$(\mathrm{ad} H)\, M = (-h_1 - h_2)\, M = (-e_1 - e_2)(H)\, M$$

$$(\mathrm{ad} H)\, N = \ (h_1 + h_2)\, N = \ (e_1 + e_2)(H)\, N$$

$$(\mathrm{ad} H)\, P = \ (h_1 - h_2)\, P = \ (e_1 - e_2)(H)\, P$$

$$(\mathrm{ad} H)\, Q = \ (-h_1 + h_2)\, Q = (-e_1 + e_2)(H)\, Q$$

Sistema de Raízes : $\quad \Delta = \{-e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_1 - e_2, -e_1 + e_2\}$.

Álgebra de tipo $A_1 \oplus A_1$. Não é simples.

A álgebra $\mathrm{so}(2n, \mathbb{C})$

Define-se $e_i \in \mathfrak{d}_n^*$ pondo
$e_i(H) = h_i, \quad \forall \ H = \mathrm{diag}(J_2(h_1), J_2(h_2), \ldots) \in \mathfrak{d}_n.$

Sejam $M_{j,\ell}$, $N_{j,\ell}$, $P_{j,\ell}$ e $Q_{j,\ell} \in \mathrm{so}(2n, \mathbb{C})$ matrizes cujas submatrizes correspondentes aos blocos $(j,j), (j,\ell), (\ell,j)$ e (ℓ,ℓ) coincidem resp. com as matrizes $M, N, P, Q \in \mathrm{so}(4, \mathbb{C})$, com todas as restantes entradas iguais a zero.

Decomposição de $\mathrm{ad} : \mathfrak{d}_{2n} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathrm{so}(2n, \mathbb{C}))$: $\forall\, H \in \mathfrak{d}_{2n}$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad} H)\, M_{j,\ell} &= (-e_j - e_\ell)(H)\, M_{j,\ell} \\
(\mathrm{ad} H)\, N_{j,\ell} &= \ (e_j + e_\ell)(H)\, N_{j,\ell} \\
(\mathrm{ad} H)\, P_{j,\ell} &= \ (e_j - e_\ell)(H)\, P_{j,\ell} \\
(\mathrm{ad} H)\, Q_{j,\ell} &= (-e_j + e_\ell)(H)\, Q_{j,\ell}
\end{aligned}$$

A álgebra $\mathrm{so}(2n, \mathbb{C})$

$$\mathrm{so}(2n, \mathbb{C}) = \mathfrak{d}_{2n} \oplus \bigoplus_{j \neq \ell} \langle M_{j,\ell} \rangle \oplus \langle N_{j,\ell} \rangle \oplus \langle P_{j,\ell} \rangle \oplus \langle Q_{j,\ell} \rangle$$

Sistema de Raízes : $\quad \Delta = \{ \pm e_j \pm e_\ell \; : \; 1 \leq j \neq \ell \leq n \}$.

$\mathrm{so}(2n, \mathbb{C})$ é de tipo D_n, $\forall\, n \geq 3$.

Em particular é simples.

A álgebra $\mathrm{so}(2n+1,\mathbb{C})$

Sejam $M_{j,\ell}$, $N_{j,\ell}$, $P_{j,\ell}$ e $Q_{j,\ell} \in \mathrm{so}(2n+1,\mathbb{C})$ as matrizes definidas no caso anterior e sejam $F_j, G_j \in \mathrm{so}(2n+1,\mathbb{C})$ matrizes cujas submatrizes correspondentes aos blocos $(j,j), (j,n+1), (n+1,j)$ e $(n+1,n+1)$ coincidem resp. com as matrizes $F, G \in \mathrm{so}(3,\mathbb{C})$, com todas as restantes entradas iguais a zero.

Decomposição de $\mathrm{ad} : \mathfrak{d}_{2n+1} \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathrm{so}(2n+1,\mathbb{C}))$: $\forall\, H \in \mathfrak{d}_{2n+1}$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad} H)\, M_{j,\ell} &= (-e_j - e_\ell)(H)\, M_{j,\ell} \\
(\mathrm{ad} H)\, N_{j,\ell} &= \ (e_j + e_\ell)(H)\, N_{j,\ell} \\
(\mathrm{ad} H)\, P_{j,\ell} &= \ (e_j - e_\ell)(H)\, P_{j,\ell} \\
(\mathrm{ad} H)\, Q_{j,\ell} &= (-e_j + e_\ell)(H)\, Q_{j,\ell} \\
(\mathrm{ad} H)\, F_j &= \quad e_j(H)\, F_j \\
(\mathrm{ad} H)\, G_j &= -e_j(H)\, G_j
\end{aligned}$$

A álgebra $\mathrm{so}(2n+1,\mathbb{C})$

$$\mathrm{so}(2n+1,\mathbb{C}) = \mathfrak{d}_{2n+1} \oplus \bigoplus_j \langle F_j\rangle \oplus \langle G_j\rangle \oplus \bigoplus_{j\neq\ell}\langle M_{j,\ell}\rangle \oplus \langle N_{j,\ell}\rangle \oplus \langle P_{j,\ell}\rangle \oplus \langle Q_{j,\ell}\rangle$$

Sistema de Raízes :
$\Delta = \{\, \pm e_i \pm e_j \,:\, 1 \leq i \neq j \leq n \,\} \cup \{\, \pm e_i \,:\, i = 1, \ldots, n \,\}$.

$\mathrm{so}(2n+1,\mathbb{C})$ é de tipo B_n, $\forall\, n \geq 2$.

Em particular é simples.

Algumas álgebras clássicas reais

$\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$ é uma forma real de $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$, $\forall\, n \geq 2$.
$\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$ é simples.

$\mathrm{sp}(n, \mathbb{R})$ é uma forma real de $\mathrm{sp}(n, \mathbb{C})$, $\forall\, n \geq 1$.
$\mathrm{sp}(n, \mathbb{R})$ é simples.

$\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$ é uma forma real de $\mathrm{so}(n, \mathbb{C})$, $\forall\, n \geq 2$.
$\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$ é simples, $\forall\, n \geq 3$, $n \neq 4$.

$\mathrm{su}(n)$ é uma forma real de $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$, $\forall\, n \geq 2$.
$\mathrm{su}(n)$ é simples, $\forall\, n \geq 2$.

$\mathrm{su}(n)$ é uma forma real de $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$

Prova.
Dada $H \in \mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$,
$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(H) = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}\left(\frac{H \pm H^*}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow$

$$H = \underbrace{\frac{H - H^*}{2}}_{\in \mathrm{su}(n)} + i\,\underbrace{(-i)\frac{H + H^*}{2}}_{\in \mathrm{su}(n)} \in \mathrm{su}(n) \oplus i\mathrm{su}(n)$$

$\square$

Relação entre Ideais e Subgrupos Normais

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Um subgrupo $H \subseteq G$ diz-se **normal** $\Leftrightarrow \forall g \in G,\ g^{-1} H g \subseteq H$.
Escreve-se $H \trianglelefteq G$ para exprimir este facto.

Sabemos já que é bijectiva a correspondência

$$\Gamma : \mathcal{S}\mathrm{ub}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{S}\mathrm{ub}_0(G), \quad \mathfrak{h} \mapsto \Gamma(\mathfrak{h}),$$

entre

$$\mathcal{S}\mathrm{ub}(\mathfrak{g}) = \{ \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} : \mathfrak{h} \text{ é uma subálgebra de } \mathfrak{g} \} \text{ e}$$

$$\mathcal{S}\mathrm{ub}_0(G) = \{ H \subset G : H \text{ é um subgrupo conexo de } G \}.$$

Proposição *Dados* $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}\mathrm{ub}(\mathfrak{g})$ *e* $H = \Gamma(\mathfrak{h}) \in \mathcal{S}\mathrm{ub}_0(G)$,
$\mathfrak{h}$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$ $\Leftrightarrow$ H *é um subgrupo normal de* G.

Relação entre Ideais e Subgrupos Normais

Prova.

$$\mathfrak{h} \text{ é um ideal de } \mathfrak{g}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \ \ (\mathrm{ad} X)\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$$

$$\Updownarrow \quad \Leftarrow \quad \mathrm{Ad}(e^X) = e^{\mathrm{ad} X}$$

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \ \ \mathrm{Ad}(e^X)\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \ \ e^X H e^{-X} \subseteq H$$

$$\Updownarrow$$

$$H \text{ é um subgrupo normal de } G$$

$\square$

Subgrupos Fechados & Quocientes

Seja G um grupo de Lie com dimensão finita.

Teorema *Todo o subgrupo fechado de G é uma subvariedade suave de G. Em particular é um grupo de Lie.*

Proposição *Se $H \subseteq G$ é um subgrupo fechado o conjunto das classes esquerdas $G/H = \{\, g\,H \,:\, g \in G \,\}$ admite uma estrutura natural de variedade que torna suaves a projecção $\pi : G \to G/H$ e a multiplicação $G \times G/H \to G/H$, $(g', gH) \mapsto (g'g)H$.*

Corolário *Se $H \subseteq G$ é um subgrupo normal e fechado então G/H é um grupo de Lie e a projecção $\pi : G \to G/H$ é suave.*

Se $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}$ são as álgebras de Lie de H e G respectivamente então a derivada $D\pi_1 : \mathfrak{g} = T_1 G \to T_1(G/H)$ tem núcleo $\mathfrak{h}$ e induz o isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq T_1(G/H)$.

Somas Directas

Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Proposição *Dados subgrupos conexos normais $H_1, H_2 \subseteq G$ cujas álgebras de Lie são os ideais $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$,*

$$G = H_1 \oplus H_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \ .$$

G diz-se **semisimples**, resp. **simples**, **solúvel** $\Leftrightarrow$ G for conexo e $\mathfrak{g}$ for semisimples, resp. simples, solúvel.

Grupos Semisimples, Simples e Solúveis

Proposição *Seja G um grupo de Lie conexo.*

G *é semisimples* $\Leftrightarrow$ *não existe* $\{1\} \neq H \trianglelefteq G$ *solúvel*
$\Leftrightarrow$ $\exists\, H_i \trianglelefteq G$ *simples tais que* $G = H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$

G *é simples* $\Leftrightarrow$ G *é não abeliano*
sem subgrupos conexos normais próprios

G *é solúvel* $\Leftrightarrow$ *existe uma série de subgrupos normais conexos*
$\{1\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_n = G$
tal que H_i / H_{i-1} *é abeliano* $\forall\, i = 1, \ldots, n$.

O Comutador de G

Seja G um grupo de Lie conexo.

Dados $g, h \in G$ define-se o **comutador de g e h** como
$$[g, h] := g\, h\, g^{-1}\, h^{-1}.$$

Chama-se **comutador de G** ao subgrupo conexo gerado pelos comutadores $[g, h]$ com $g, h \in G$, que se denota por $[G, G]$.

Proposição *Se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G então $[G, G]$ é um subgrupo normal de G que tem por álgebra de Lie o ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Prova.

$[G, G]$ é normal $\Leftarrow$ $a[g, h]a^{-1} = [aga^{-1}, aha^{-1}]$

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq T_1([G, G])$ $\Leftarrow$ $\frac{d^2}{dt^2}(e^{tX} e^{tY} e^{-tX} e^{-tY})_{t=0} = 2\,[X, Y]$ e
$\frac{d}{dt}(e^{tX} e^{tY} e^{-tX} e^{-tY})_{t=0} = 0$

Continuação da Prova.

Campbell-Baker-Hausdorff $\Rightarrow$ $[e^X, e^Y] = e^{[X,Y]+\cdots}$ onde os pontos representam termos com dois ou mais factores X, Y.

$$\Rightarrow \ \exists\, U \text{ viz. aberta de } 1 \text{ em } G \text{ tal que } [U,U] \subseteq \exp[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$$
$$\Rightarrow \ [G,G] \subseteq \Gamma([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) \quad \Rightarrow \quad T_1[G,G] \subseteq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]. \qquad \square$$

Proposição *Se G é semisimples então $[G,G] = G$.*

Prova.

$$\begin{aligned} G \text{ semisimples} \quad &\Rightarrow \quad \mathfrak{g} \text{ semisimples} \\ &\Rightarrow \quad [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g} \\ &\Rightarrow \quad [G,G] = G \end{aligned} \qquad \square$$

O Centro de G

Seja G um grupo de Lie conexo.

Chama-se **centro de G** ao subgrupo normal

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}(G) &= \{\, g \in G \;:\; [g,h] = 1,\ \forall\, h \in G \,\} \\ &= \{\, g \in G \;:\; gh = hg,\ \ \forall\, h \in G \,\}\ . \end{aligned}$$

Proposição *$\mathrm{Z}(G)$ é o núcleo da representação $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. O centro $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de $\mathrm{Z}(G)$.*

Prova.
$$\begin{aligned} g \in \mathrm{Z}(G) \ &\Leftrightarrow\ \forall\, X \in \mathfrak{g},\ \ g\, e^{tX}\, g^{-1} = e^{tX} \\ &\Leftrightarrow\ \forall\, X \in \mathfrak{g},\ \ \tfrac{d}{dt}(g\, e^{tX}\, g^{-1})_{t=0} = X \\ &\Leftrightarrow\ \forall\, X \in \mathfrak{g},\ \ \mathrm{Ad}(g)\, X = X \ \ \Leftrightarrow\ \ \mathrm{Ad}(g) = I\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R},\ \ e^{tX} \in \mathrm{Z}(G) \ &\Leftrightarrow\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \ e^{t\,\mathrm{ad}X} = \mathrm{Ad}(e^{tX}) = I \\ &\Leftrightarrow\ \mathrm{ad}X = 0 \ \ \Leftrightarrow\ \ X \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g}). \end{aligned}$$

$\square$

O Centro dum Grupo Semisimples

Proposição *Se G é semisimples então $\mathrm{Z}(G)$ é um subgrupo discreto.*

Prova.

$$
\begin{aligned}
G \text{ semisimples} \quad &\Rightarrow \quad \mathfrak{g} \text{ semisimples} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = \{0\} \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{Z}(G)_0 = \{1\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Z}(G) \text{ é discreto.}
\end{aligned}
$$

□

Caracteres dum Grupo Abeliano

Seja $\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \, : \, |z| = 1 \}$.
$\mathbb{S}^1$ é um grupo multiplicativo abeliano de dimensão um.

Seja G um grupo topológico *abeliano* e *localmente compacto*, de agora em diante um **grupo ALC**. Chama-se **caracter** de G a qualquer homomorfismo contínuo $\lambda : G \to \mathbb{S}^1$.

Define-se

$$\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{S}^1) = \{ \lambda : G \to \mathbb{S}^1 \, : \, \lambda \text{ é um caracter de } G \}$$

que é um grupo abeliano e é localmente compacto com a topologia compacta-aberta.

O grupo $\widehat{G}$ diz-se o **dual de Pontryagin** de G.

A topologia compacta-aberta é definida pela família de semi-métricas

$$\left\{ \quad d_K(\lambda, \lambda') = \max_{g \in K} |\lambda(g) - \lambda(g')| \quad : \; K \subseteq G \text{ compacto} \right\}.$$

Dualidade de Pontryagin

A dualidade de Pontryagin para grupos ALC(s)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \widehat{G} \times G \to \mathbb{S}^1 \qquad \langle \lambda, g \rangle = \lambda(g)$$

é uma ferramenta importante em Teoria de Representação de Grupos, e em Análise Funcional (Transf. de Gelfand e Fourier).

Teorema *Sejam G, G_1, G_2, G' grupos ALC(s).*

(a) $\lambda : G \simeq \widehat{\widehat{G}}, \quad x \mapsto \lambda_x, \quad \lambda_x(\alpha) = \alpha(x)$,

(b) $\widehat{G_1 \oplus G_2} = \widehat{G_1} \oplus \widehat{G_2}$,

(c) G *é compacto* $\Leftrightarrow$ $\widehat{G}$ *é discreto,*

(d) G *é conexo* $\Leftrightarrow$ $\widehat{G}$ *é livre de torsão,*

(e) $\phi : G \to G'$ *é injectiva* $\Leftrightarrow$ $\widehat{\phi} : \widehat{G'} \to \widehat{G}$ *é sobrejectiva.*

O **adjunto** $\widehat{\phi} : \widehat{G'} \to \widehat{G}$ dum homomorfismo contínuo $\phi : G \to G'$ é definido por $\widehat{\phi}(\lambda') = \lambda' \circ \phi$.

Exemplos: Duais de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n$ e $\mathbb{Z}^n$

Dual de $\mathbb{R}^n$ **:** $\widehat{\mathbb{R}^n} = \{\, e_x \;:\; x \in \mathbb{R}^n \,\} \simeq \mathbb{R}^n$ onde
$e_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^1$ é o caracter $e_x(y) = e^{2\pi i\, x\cdot y}$.

Dual de $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ **:** $\widehat{\mathbb{T}^n} = \{\, e_k \;:\; k \in \mathbb{Z}^n \,\} \simeq \mathbb{Z}^n$ onde
$e_k : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1$ é o caracter $e_k(x) = e^{2\pi i\, k\cdot x}$.

Dual de $\mathbb{Z}^n$ **:** $\widehat{\mathbb{Z}^n} = \{\, e_x \;:\; x \in \mathbb{T}^n \,\} \simeq \mathbb{T}^n$ onde
$e_x : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{S}^1$ é o caracter $e_x(k) = e^{2\pi i\, k\cdot x}$.

Teorema *Para qualquer grupo de Lie G, abeliano, conexo de dimensão de dimensão n, a exponencial* $\exp : \mathfrak{g} = T_1G \to G$ *é um epimorfismo de grupos cujo núcleo* $\mathfrak{z} = \mathrm{Nuc}(\exp)$ *é um subgrupo discreto de* $\mathfrak{g}$. *Além disso* $G \simeq \mathbb{T}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ *onde* $k = \mathrm{rank}(\mathfrak{z})$.

Prova. G abeliano $\Rightarrow$ $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é um epimorfismo.

exp difeomorfismo local $\Rightarrow$ $\mathfrak{z} = \mathrm{Nuc}(\exp)$ é discreto

$k = \mathrm{rank}(\mathfrak{z})$ $\Rightarrow$ $\exists\, a_i \in \mathfrak{z}$ tais que $\mathfrak{z} = \mathbb{Z}a_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}a_k$

Sejam $\mathfrak{t} = \mathbb{R}a_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}a_k$, $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{g}$ subespaço tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{f}$

Sejam $T = \exp(\mathfrak{t})$ e $F = \exp(\mathfrak{f})$. Então

$$G = T \oplus F \overset{\exp}{\simeq} \mathfrak{t}/\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{f} \simeq \mathbb{T}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}. \qquad \square$$

Grupos de Lie Abelianos

Corolário *Todo o grupo de Lie G, abeliano, compacto, conexo de dimensão de dimensão n, é isomorfo ao toro n-dimensional* $\mathbb{T}^n$.

Subgrupos de Cartan

Seja G um grupo de Lie semisimples, conexo e complexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. G diz-se complexo $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ for complexa, o que equivale a dizer que G é uma variedade complexa.

Chama-se **subgrupo de Cartan** de G a qualquer subgrupo conexo $H \subseteq G$ tal que $\mathfrak{h} = T_1 H$ seja uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Teorema *Seja G um grupo de Lie semisimples, conexo e complexo.*

(1) G *admite subgrupos de Cartan.*

(2) $\forall\, H_1, H_2 \subset G$ *subgrupos de Cartan,*
$\exists\, g \in G$ *tal que* $H_2 = g\, H_1\, g^{-1}$.

Seja G um grupo de Lie semisimples, conexo e complexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Proposição *$\forall\, H \subseteq G$, H é um subgrupo de Cartan $\Leftrightarrow$ H for um subgrupo abeliano conexo maximal tal que $\mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ é semisimples, $\forall\, g \in H$.*

Segue do lema seguinte

Lema *Dado um subgrupo abeliano conexo $H \subseteq G$ com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ são equivalentes:*

(1) $\forall\, A \in \mathfrak{h},\ \mathrm{ad}(A) \in \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ *é semisimples,*

(2) $\forall\, g \in H,\ \mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ *é semisimples.*

Prova do Lema. $(2) \Rightarrow (1)$: Resulta de se ter $\forall\, A \in \mathfrak{h}$,

$\mathrm{ad}(A)$ é semisimples $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ad}(e^{A}) = e^{\mathrm{ad}(A)}$ é semisimples.

$(1) \Rightarrow (2)$: Por comutatividade, se $\mathrm{Ad}(e^{A_i})$ for semisimples $\forall\, i = 1, \ldots, n$ então $\mathrm{Ad}(e^{A_1} \ldots e^{A_n}) = \mathrm{Ad}(e^{A_1}) \ldots \mathrm{Ad}(e^{A_n})$ também é semisimples. $\square$

O grupo das formas multiplicativas $\mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*)$

Seja H um grupo de Lie abeliano, conexo e complexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, e $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ visto como grupo multiplicativo.

Define-se
$\mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*) = \{ \lambda : H \to \mathbb{C}^* \,:\, \lambda$ é um homomorfismo suave $\}$

Proposição $\mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*)$ *é um grupo abeliano formado por homomorfismos holomórfos.*

$\forall \lambda \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*)$ define-se $\lambda_\sharp = D\lambda_1 : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$.

$$\forall A \in \mathfrak{h}, \quad \lambda(e^A) = e^{\lambda_\sharp(A)}.$$

Formas Inteiras

Seja H um grupo de Lie abeliano, conexo e complexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.

$\alpha \in \mathfrak{h}^*$ diz-se uma **forma inteira** $\Leftrightarrow\ \alpha(\mathrm{Nuc}(\exp)) \subseteq 2\pi i\,\mathbb{Z}$.

Proposição *O mapa* $\Phi : \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*) \to \mathfrak{h}^*,\quad \Phi(\lambda) = \lambda_\sharp,$ *é um isomorfismo sobre o subespaço das formas inteiras.*

Prova.
$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) = \lambda_\sharp = 0 \ &\Rightarrow\ \lambda(e^A) = e^{\lambda_\sharp(A)} = e^0 = 1 \\ &\Rightarrow\ \lambda = 1 \qquad \Leftarrow\ \exp : \mathfrak{h} \to H \text{ é sobrej.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathfrak{h}^* \text{ é forma inteira} \ &\Rightarrow\ \mathrm{Nuc}(e^\alpha) \supseteq \mathrm{Nuc}(\exp) \\ &\Rightarrow\ \exists\, \lambda \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*)\ ,\ \ e^\alpha = \lambda \circ \exp \\ &\Rightarrow\ \alpha = \lambda_\sharp. \end{aligned}$$ $\square$

As Raízes são formas inteiras.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa e semisimples.

Proposição *Se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, toda a raiz $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{g}$ relativamente a $\mathfrak{h}$ é uma forma inteira.*

Prova. Dada uma raiz $\alpha \in \Delta$, $\exists\, X \in \mathfrak{g}_\alpha - \{0\}$ tal que

$$\forall\, A \in \mathfrak{h},\ (\mathrm{ad}A)\, X = \alpha(A)\, X.$$

Então

$$\forall\, A \in \mathfrak{h},\ \mathrm{Ad}(e^A)\, X = e^{\mathrm{ad}A}\, X = e^{\alpha(A)}\, X.$$

$$\begin{aligned} e^A = 1 \quad &\Rightarrow\ \mathrm{Ad}(e^A) = I \\ &\Rightarrow\ X = \mathrm{Ad}(e^A)\, X = e^{\alpha(A)}\, X \\ &\Rightarrow\ e^{\alpha(A)} = 1 \quad \Rightarrow\ \alpha(A) \in 2\pi i\, \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo α é uma forma inteira. $\square$

Decomposição semisimples duma representação

Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$,
G um grupo de Lie complexo.

Chama-se **representação de G em V** a todo o homomorfismo de grupos de Lie, $\rho : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$.

Chama-se **decomposição semisimples** de $\rho : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ a uma decomposição em soma directa $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ tal que $\forall\, g \in G,\ \forall\, i = 1, \ldots, m,\ \ \rho(g)(V_i) \subseteq V_i$ e $\ \exists\, \lambda_i(g) \in \mathbb{C}^*$ tal que
$\rho(g)|_{V_i} = \lambda_i(g)\, I$ é um múltiplo da identidade.

Para cada $i = 1, \ldots, m$, a aplicação $g \mapsto \lambda_i(g)$ está em $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$. $\lambda_i : G \to \mathbb{C}^*$ diz-se um **peso** de $\rho : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$.

O subespaço V_i fica completamente determinado pelo peso λ_i,
$V_i = \{\, v \in V\ :\ \forall\, g \in G,\ \rho(g)\, v = \lambda_i(g)\, v \,\}$.

Existência de Decomposição Semisimples

Teorema *Seja* $\rho : H \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ *uma representação dum grupo abeliano* H *num espaço vectorial complexo* V *tal que*

$\forall\, g \in H, \quad \rho(g) \quad$ *é semisimples.*

Então ρ *admite uma decomposição semisimples.*

Prova. A prova por indução na dimensão de H. $\square$

Representação Adjunta do Subgrupo de Cartan

Sejam G grupo de Lie semisimples, conexo e complexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, H subgrupo de Cartan de G com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ a decomposição espacial das raízes de $\mathfrak{g}$ rel. a $\mathfrak{h}$.

Para cada raiz $\alpha \in \Delta$ define-se $\omega_\alpha \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^*)$ por

$$\omega_\alpha(e^A) := e^{\alpha(A)}, \ \forall\, A \in \mathfrak{h}.$$

ω_α está bem definida porque α é uma forma inteira.

Teorema *Para cada raiz $\alpha \in \Delta$, ω_α é um peso de $\mathrm{Ad} : H \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ com subespaço próprio associado $\mathfrak{g}_\alpha$.*

Prova. Dados $\alpha \in \Delta$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $A \in \mathfrak{h}$,

$$(\mathrm{ad} A)\, X = \alpha(A)\, X \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (\mathrm{Ad}(e^A)\, X = e^{\mathrm{ad} A}\, X = e^{\alpha(A)}\, X = \omega_\alpha(e^A)\, X$$

$$\Rightarrow \quad (\mathrm{Ad}(g)\, X = \omega_\alpha(g)\, X, \quad \forall\, g \in H.$$

□

O Grupo de Weyl

Sejam G grupo de Lie semisimples, conexo e complexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, H subgrupo de Cartan de G com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.

Chama-se **grupo de Weyl** de G relativamente a H ao grupo

$$\mathcal{W}(G, H) := \mathrm{N}_G(H)/H,$$

onde $\mathrm{N}_G(H)$ denota o **normalizador** de H,

$$\mathrm{N}_G(H) = \{ g \in G \, : \, g\, H\, g^{-1} = H \} = \{ g \in G \, : \, \mathrm{Ad}(g)\, \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \} \, .$$

Chama-se **automorfismo exterior de** $\mathfrak{h}$ a um automorfismo da forma $\mathrm{Ad}(g)|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ com $g \in \mathrm{N}_G(H)$.

Proposição *O grupo de Weyl é isomorfo ao grupo dos automorfismos exteriores de* $\mathfrak{h}$*.*

Prova. A aplicação $\Phi : \mathrm{N}_G(H) \to \{ \text{automorf. exteriores de } \mathfrak{h} \}$ é um epimorfismo com núcleo H. $\square$

O Grupo de Weyl Permuta o Sistema de Raízes Δ

Sejam G grupo de Lie semisimples, conexo e complexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, H subgrupo de Cartan de G com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.

Vendo os elementos de $\mathcal{W}(G, H)$ como automorfismos exteriores, este grupo actua em $\mathfrak{h}$.

Por pull-back o grupo $\mathcal{W}(G, H)$ actua igualmente em $\mathfrak{h}^*$,

$$\mathcal{W}(G, H) \times \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*, \; (s, \alpha) \mapsto \alpha \circ s.$$

Proposição *O grupo de Weyl permuta as raízes de $\mathfrak{g}$ relativas a $\mathfrak{h}$.* $\forall\, s \in \mathcal{W}(G, H), \quad \alpha \in \Delta \quad \Rightarrow \quad \alpha \circ s \in \Delta.$

O Grupo de Weyl Permuta o Sistema de Raízes Δ

Prova da Proposição. $\forall\, \alpha \in \Delta \quad \exists\, X \in \mathfrak{g} - \{0\}$ tal que $\forall\, A \in \mathfrak{h},\ (\mathrm{ad} A)\, X = \alpha(A)\, X$

Dado $g \in \mathrm{N}_G(H)$, $\quad \mathrm{Ad}(g)\, \mathfrak{h} = g\, \mathfrak{h}\, g^{-1} = \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(A)\, \mathrm{Ad}(g)\, X &= Ad(g)\, \mathrm{ad}(g^{-1}\, A\, g)\, X \\ &= \mathrm{Ad}(g)\, \alpha(g^{-1}\, A\, g)\, X \\ &= (\alpha \circ \mathrm{Ad}(g))(A)\ \mathrm{Ad}(g)\, X \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \alpha \circ \mathrm{Ad}(g) \in \Delta. \qquad \square$$

Um Exemplo: $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

As matrizes seguintes

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Elas satisfazem as relações:

$$[H_0, E_1] = 2\,E_1, \quad [H_0, E_1'] = -2\,E_1' \quad \text{e} \quad [E_1, E_1'] = H_0.$$

$\mathfrak{h} = \mathbb{C}\,H_0$ é uma subálgebra de Cartan que determina o subgrupo de Cartan $H = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}$.

As relações anteriores mostram que esta álgebra de Lie tem duas raízes e que a sua decomposição espacial é

$$\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) = \langle H_0 \rangle \oplus \langle E_1 \rangle \oplus \langle E_1' \rangle.$$

Um Exemplo: $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

O elemento $g_0 = e^{E_1}\, e^{-E_1'}\, e^{E_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ satisfaz:

$$\mathrm{Ad}(g_0)\, H_0 = -H_0, \quad \mathrm{Ad}(g_0)\, E_1 = -E_1' \quad \text{e} \quad \mathrm{Ad}(g_0)\, E_1' = -E_1.$$

Resulta em particular que $g_0^2 = I$ e $\mathrm{Ad}(g_0)\, \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$.

Temos $\mathcal{W}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) = \{ g_0, I \} \simeq \mathbb{Z}_2$ e o elemento g_0 determina um automorfismo exterior da álgebra que troca as duas raízes de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

Sejam G grupo de Lie semisimples, conexo e complexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, H subgrupo de Cartan de G com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ a decomposição espacial das raízes de $\mathfrak{g}$ rel. a $\mathfrak{h}$.

Para cada raiz $\alpha \in \Delta$ podemos tomar $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ e $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tais que

$$[H_\alpha, E_\alpha] = 2\,E_\alpha, \quad [H_\alpha, E_{-\alpha}] = -2\,E_{-\alpha} \quad \text{e} \quad [E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha.$$

Proposição *Definindo* $g_\alpha = e^{E_\alpha}\, e^{-E_{-\alpha}}\, e^{E_\alpha} \in G$

(1) $\mathrm{Ad}(g_\alpha) H_\alpha = -H_\alpha$,

(2) $\forall \ H \in \mathfrak{h}, \ \alpha(H) = 0 \ \Rightarrow \ \mathrm{Ad}(g_\alpha) H = H$,

(3) $\mathrm{Ad}(g_\alpha) H = H - \alpha(H)\, H_\alpha$,

(4) $\mathrm{Ad}(g_\alpha)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$.

Prova. $\mathfrak{a}_\alpha = \mathbb{C}\, H_\alpha \oplus \mathbb{C}\, E_\alpha \oplus \mathbb{C}\, E_{-\alpha}$ é uma álgebra de Lie isomorfa a $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.
As contas do exemplo anterior $\Rightarrow$ (1).

$$\begin{aligned} \alpha(H) = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; (\mathrm{ad} E_\alpha)\, H = 0 = (\mathrm{ad} E_{-\alpha})\, H \\ &\Rightarrow \;\; e^{\mathrm{ad} E_\alpha}\, H = H = e^{\mathrm{ad} E_{-\alpha}}\, H \\ &\Rightarrow \;\; \mathrm{Ad}(g_\alpha)\, H = e^{\mathrm{ad} E_\alpha}\, e^{-\mathrm{ad} E_{-\alpha}}\, e^{\mathrm{ad} E_\alpha}\, H = H \Rightarrow (2). \end{aligned}$$

(3) segue de (1) e (2) aplicados a uma base de $\mathfrak{h}$ formada por H_α e por elementos $H_\beta \in \mathfrak{h}$ com $\alpha(H_\beta) = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4). □

Logo o automorfismo exterior $s_\alpha := \mathrm{Ad}(g_\alpha)|_{\mathfrak{h}}$ é uma involução em $\mathcal{W}(G,H)$.

Reflexões no Grupo de Weyl

Proposição *Para cada* $\alpha \in \Delta$,

(1) $s_\alpha \in \mathcal{W}(G, H)$ *preserva* $\mathfrak{h}_0 = \bigoplus_{\beta\in\Delta} \mathbb{R}\, H_\beta$, $s_\alpha(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$,

(2) $A \in \mathfrak{h}_0$ *e* $\alpha(A) = 0 \Rightarrow s_\alpha(A) = A$,

(3) $\beta \in \Delta$ *e* $\mathrm{B}(H_\alpha, H_\beta) = 0 \Rightarrow s_\alpha(H_\beta) = H_\beta$,

(4) O automorfismo $s_\alpha|_{\mathfrak{h}_0} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_0)$ *é a reflexão em torno do hiperplano ortogonal a* H_α *para o produto interno definido por* B,

(5) O automorfismo $s_\alpha^* : \beta \mapsto \beta \circ s_\alpha$ *de* $\mathfrak{h}_0^*$ *é a reflexão em torno do hiperplano ortogonal a* α *para o produto interno definido por* $\alpha \cdot \beta = \mathrm{B}(H_\alpha, H_\beta)$,

(6) $\mathcal{W}(G, H)$ *é gerado pelas reflexões* $\{\, s_\alpha \,:\, \alpha \in \Delta\}$,

(7) $\mathcal{W}(G, H) = \mathcal{W}(\Delta)$.

O Grupo de Weyl de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$

Chama-se *matriz de permutação* a qualquer matriz obtida por permutação das linhas da matriz identidade.

O conjunto $\mathcal{P}_n$ das matrizes de permutação $n \times n$ é um grupo isomorfo ao grupo simétrico S_n de ordem $n!$.

Chama-se *matriz diagonal permutada* a qualquer matriz obtida por permutação das linhas duma matriz diagonal.

O grupo D_n das matrizes diagonais com determinante um é um subgrupo de Cartan de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.

O Grupo de Weyl de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$

$$\mathrm{N}_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})}(\mathrm{D}_n) = \{ \text{ mat. diagonais permutadas} : \det_{\mathbb{C}} = 1 \}$$

O grupo de Weyl de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ é $\mathcal{W}(\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})) \simeq \mathcal{P}_n \simeq \mathrm{S}_n$.

A acção de $\mathcal{W}(\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}))$ nas raízes de $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ é descrita por

$$\mathrm{S}_n \times \Delta \to \Delta \qquad (\pi, e_i - e_j) \mapsto e_{\pi(i)} - e_{\pi(j)} \ .$$

O Grupo de Weyl de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$

Proposição *Dada uma matriz de permutação* $P \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$,

$$P \text{ é simpléctica} \quad \Leftrightarrow \quad P \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} P.$$

Prova. P matriz de permutação $\Rightarrow$ P é ortogonal $\Rightarrow$

$$P^T J P = J \quad \Leftrightarrow \quad P J = J P \quad \Leftrightarrow \quad P \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} P. \quad \square$$

Designaremos por $\mathcal{P}_{2n}^{\mathrm{sp}}$ o grupo das matrizes de permutação simplécticas $P \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$. Seja $P_i = E_{i,i+n} + E_{i+n,i}$ a matriz obtida da identidade $I \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$ transpondo as linhas i e $i + n$.

Proposição *Existe um epimorfismo* $\phi : \mathcal{P}_{2n}^{\mathrm{sp}} \to \mathrm{S}_n$ *cujo núcleo é gerado pelas matrizes* P_i. *Em particular* $\mathcal{P}_{2n}^{\mathrm{sp}}$ *tem ordem* $2^n\, n!$

O Grupo de Weyl de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$

O grupo D_n das matrizes diagonais simplécticas é um subgrupo de Cartan de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$.

Chama-se *matriz diagonal simpléctica permutada* a qualquer matriz obtida por permutação simpléctica das linhas duma matriz diagonal simpléctica, i.e., da forma PD com $P \in \mathcal{P}_{2n}^{\mathrm{sp}}$ e $D \in \mathrm{D}_n$.

$\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})}(\mathrm{D}_n) = \{$ mat. diag. simplécticas permutadas $\}$

O grupo de Weyl de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ é $\mathcal{W}(\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})) \simeq \mathcal{P}_{2n}^{\mathrm{sp}}$.

Cada elemento $\pi \in \mathcal{W}(\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})) = \mathcal{P}_{2n}^{\mathrm{sp}}$ induz

- uma permutação de $(e_1, \ldots, e_n, -e_1, \ldots, -e_n)$,
- que por sua vez induz uma permutação de
  $\Delta = \{ \pm e_i \pm e_j \ : \ i \neq j \} \cup \{ \pm 2e_j \}$.

O Grupo de Weyl de $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$

Designaremos por $\mathcal{P}_{2n}^{\mathrm{so}}$ o grupo das matrizes de permutação $P \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$ com $\det P = 1$ que comutam com

$$\mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Seja P_i a matriz obtida transpondo as linhas $2i-1$ e $2i$ da identidade $I \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$.

Proposição *Existe um epimorfismo $\phi : \mathcal{P}_{2n}^{\mathrm{so}} \to \mathrm{S}_n$ cujo núcleo é gerado pelas matrizes $P_i P_n$.* $\mathcal{P}_{2n}^{\mathrm{so}}$ *tem ordem $2^{n-1}\, n!$*

O grupo D_{2n} das matrizes diagonais

$$\mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} 0 & -ih_1 \\ ih_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & ih_n \\ ih_n & 0 \end{pmatrix}\right].$$

é um subgrupo de Cartan de $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$.

O Grupo de Weyl de $SO(2n, \mathbb{C})$

Chama-se *matriz ortogonal-diagonal permutada* a qualquer matriz da forma PD com $P \in \mathcal{P}_{2n}^{\mathrm{so}}$ e $D \in \mathrm{D}_{2n}$.

$\mathrm{N}_{\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})}(\mathrm{D}_{2n}) = \{$ mat. ortog.-diagonais permutadas $\}$

O grupo de Weyl de $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$ é $\mathcal{W}(\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})) \simeq \mathcal{P}_{2n}^{\mathrm{so}}$.

Cada elemento $\pi \in \mathcal{W}(\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})) = \mathcal{P}_{2n}^{\mathrm{so}}$ induz

- uma permutação de $(e_1, -e_1, \ldots, e_n, -e_n)$,
- que por sua vez induz uma permutação de
  $\Delta = \{ \pm e_i \pm e_j \ : \ i \neq j \}$.

O Grupo de Weyl de $\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C})$

Designaremos por $\mathcal{P}^{\mathrm{so}}_{2n+1}$ o grupo das matrizes $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ com determinante um tais que o bloco P é uma matriz de permutação $P \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$ que comuta com

$$\mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Seja P_i a matriz obtida transpondo as linhas $2i-1$ e $2i$ da identidade $I \in \mathrm{GL}(2n+1,\mathbb{C})$ e trocando o sinal à última linha.

Proposição *Existe um epimorfismo* $\phi : \mathcal{P}^{\mathrm{so}}_{2n+1} \to \mathrm{S}_n$ *cujo núcleo é gerado pelas matrizes* P_i*. Em particular* $\mathcal{P}^{\mathrm{so}}_{2n+1}$ *tem ordem* $2^n\, n!$

O grupo D_{2n+1} das matrizes diagonais

$$\mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} 0 & -ih_1 \\ ih_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & ih_n \\ ih_n & 0 \end{pmatrix}, 0\right].$$

é um subgrupo de Cartan de $\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C})$.

O Grupo de Weyl de $SO(2n+1,\mathbb{C})$

Chama-se *matriz ortogonal-diagonal permutada* a qualquer matriz da forma PD com $P \in \mathcal{P}^{\mathrm{so}}_{2n+1}$ e $D \in \mathrm{D}_{2n+1}$.

$\mathrm{N}_{\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C})}(\mathrm{D}_{2n+1}) = \{$ mat. ortog.-diagonais permutadas$\}$

O grupo de Weyl de $\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C})$ é $\mathcal{W}(\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C})) \simeq \mathcal{P}^{\mathrm{so}}_{2n+1}$.

Cada elemento $\pi \in \mathcal{W}(\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C})) = \mathcal{P}^{\mathrm{so}}_{2n+1}$ induz

- uma permutação de $(e_1, -e_1, \ldots, e_n, -e_n)$,
- que por sua vez induz uma permutação de
  $\Delta = \{\, \pm e_i \pm e_j \;:\; i \neq j \,\} \cup \{\pm e_j\}$.

Introdução: Grupos Abelianos Compactos

Teorema *Dado um grupo abeliano compacto G , existe em G uma única medida positiva μ que é invariante por translações em G e satisfaz $\mu(G) = 1$.*

Introdução: Transformada de Fourier

Seja G um grupo abeliano compacto.

Teorema *Os caracteres em $\widehat{G}$ formam um sistema ortonormado completo de funções em $\mathrm{L}^2(G,\mu)$.*

Corolário *Para cada função $f \in \mathrm{L}^2(G,\mu)$,*

$$f = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \langle f,\chi\rangle\, \chi \quad \textit{onde} \quad \langle f,\chi\rangle = \int_G f(x)\, \overline{\chi(x)}\, d\mu(x).$$

A aplicação $\mathcal{F} : \mathrm{L}^2(G) \to \mathrm{L}^2(\widehat{G})$, $\mathcal{F}(f)(\chi) = \langle f,\chi\rangle$, é uma isometria.

Considerando no grupo discreto $\widehat{G}$ a medida de contagem, a isometria inversa é descrita por uma fórmula análoga.

À custa da medida invariante μ define-se uma operação de convolução de funções. A transformada de Fourier converte a convolução de duas funções no produto das suas transformadas de Fourier e vice-versa.

Introdução: Teorema de Peter-Weyl

O teorema de Peter-Weyl extende parcialmente esta teoria ao contexto dos grupos compactos não abelianos.

Medidas de Haar

Seja G um grupo topológico localmente compacto e μ uma medida de Borel regular positiva em G.

μ diz-se uma **medida de Haar esquerda** $\Leftrightarrow$

$$(L_g)_*\mu = \mu, \quad \forall\, g \in G.$$

μ diz-se uma **medida de Haar direita** $\Leftrightarrow$

$$(R_g)_*\mu = \mu, \quad \forall\, g \in G.$$

μ diz-se uma **medida de Haar bi-invariante** $\Leftrightarrow$

$$(L_g)_*\mu = \mu = (R_g)_*\mu, \quad \forall\, g \in G.$$

Integração Invariante

Sejam G um grupo topológico e localmente compacto, e μ uma medida de Haar esquerda em G.

Proposição *Para qualquer função* $f \in \mathrm{L}^1(G, \mu)$,

$$\int_G f(g_0\, g)\, d\mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g), \quad \forall\, g_0 \in G\ .$$

Prova.

$$\begin{aligned} \int_G f(g_0\, g)\, d\mu(g) &= \int_G (f \circ L_{g_0})(g)\, d\mu(g) \\ &= \int_G f(g)\, d(L_{g_0})_* \mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g) \end{aligned}$$

□

Existência e Unicidade de Medidas de Haar

Teorema *Em todo o grupo topológico localmente compacto G existem medidas de Haar esquerdas, resp. direitas.*
Quaisquer duas medidas de Haar esquerdas, resp. direitas, μ_1 e μ_2 em G são colineares, $\exists \lambda > 0$ tal que $\mu_2 = \lambda\, \mu_1$.

Proposição *Existe um homomorfismo de grupos $\Delta : G \to \mathbb{R}_+$ tal que para todo o $g \in G$,*

(1) $(R_g)_* \mu = \Delta(g^{-1})\, \mu$, $\forall\ \mu$ *medida de Haar esquerda,*

(2) $(L_g)_* \mu = \Delta(g)\, \mu$, $\forall$ *medida de Haar direita* μ.

O homomorfismo $\Delta_G : G \to \mathbb{R}_+$ diz-se a **função modular** ou o **módulo de Haar** do grupo G.

Função Modular de Haar

Prova da Proposição.

μ medida de Haar esq. $\Rightarrow$ $(R_g)_*\mu$ medida de Haar esq.
definimos $\Delta^R_\mu(g)$ por $(R_g)_*\mu = \Delta^R_\mu(g)\,\mu$

μ medida de Haar dir. $\Rightarrow$ $(L_g)_*\mu$ medida de Haar dir.
definimos $\Delta^L_\mu(g)$ por $(L_g)_*\mu = \Delta^L_\mu(g)\,\mu$

$\dim\{$ medidas de Haar $\} = 1$ $\Rightarrow$ $\Delta^R_\mu(g)$ e $\Delta^L_\mu(g)$ não dependem de μ

$$L_{g'\,g} = L_{g'} \circ L_g \;\Rightarrow\; \Delta^L(g'\,g) = \Delta(g')\,\Delta(g)$$

Continuação da Prova da Proposição.

Seja $i : G \to G,\ i(g) = g^{-1}$.

μ medida de Haar esq. $\quad \Rightarrow \quad i_*\mu$ medida de Haar direita

$$L_g \circ i = i \circ R_{g^{-1}} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\Delta^L(g)\, i_*\mu &= (L_g)_*(i_*\mu) = (L_g \circ i)_*\mu = (i \circ R_{g^{-1}})_*\mu \\ &= i_*\left((R_{g^{-1}})_*\mu\right) = i_*\Delta^R(g^{-1})\,\mu = \Delta^R(g^{-1})\, i_*\mu\end{aligned}$$

Logo $\quad \Delta^L(g) = \Delta^R(g^{-1})$. $\square$

Grupos Unimodulares

Seja G um grupo topológico e localmente compacto.
G diz-se **unimodular** $\Leftrightarrow$ $\Delta_G(g) \equiv 1$.

Proposição *Seja G um grupo topológico e localmente compacto.*
G é unimodular $\Leftrightarrow$ G admite medidas de Haar bi-invariantes.

Proposição *Todo o grupo de Lie semisimples é unimodular.*

Prova. G semisimples $\Rightarrow$ $G = [G, G] \subseteq \mathrm{Nuc}(\Delta_G)$
$\Rightarrow$ $\Delta_G = 1$. $\square$

Proposição *Todo o grupo de Lie compacto é unimodular.*

Prova. Como $\{1\}$ é o único subgrupo compacto de $\mathbb{R}_+$,

$$G \text{ compacto} \;\Rightarrow\; \Delta_G(G) \text{ compacto} \;\Rightarrow\; \Delta_G(G) = \{1\}$$
$$\Rightarrow\; \Delta_G = 1. \qquad \square$$

Num grupo compacto existe uma única medida de Haar bi-invariante μ normalizada pela condição $\mu(G) = 1$.

Álgebra das Medidas de Borel $\mathcal{M}(G)$

Seja G um grupo compacto.

Designamos por $\mathcal{M}(G)$ o espaço das medidas de Borel complexas em G munido da norma $\|\mu\| = |\mu|\,(G)$. Com esta norma $\mathcal{M}(G)$ é espaço de Banach, o dual do espaço das funções contínuas $\mathcal{C}(G)$.

Em $\mathcal{M}(G)$ define-se uma operação de **convolução** $(\mu_1, \mu_2) \mapsto \mu_1 * \mu_2$ e uma **involução** $\mu \mapsto \mu^*$

$$\int_G f(g)\, d(\mu_1 * \mu_2)(g) := \int_G \int_G f(g_1\, g_2)\, d\mu_1(g_1)\, d\mu_2(g_2)$$

$$\int_G f(g)\, d(\mu^*)(g) := \overline{\int_G \overline{f(g^{-1})}\, d\mu(g)}$$

Com estas operações, $\mathcal{M}(G)$ é uma **álgebra de Banach de involução** cuja identidade é a medida de Dirac δ_1.

Álgebra das Funções Integráveis $\mathrm{L}^1(G)$

Dado um grupo compacto G, seja
dg = medida de Haar bi-invariante em G.

$$\mathrm{L}^1(G) := \mathrm{L}^1(G, dg)$$

Proposição *Identificando* $f = \mu_f$, *com* $\mu_f(B) = \int_B f(g)\, dg$, $\mathrm{L}^1(G) \subset \mathcal{M}(G)$ *é uma subálgebra de involução sem identidade.*

Em $\mathrm{L}^1(G)$ a operação de **convolução** $(f_1, f_2) \mapsto f_1 * f_2$ e a **involução** $f \mapsto f^*$ estão definidas por

$$(f_1 * f_2)(g) := \int_G f_1(h)\, f_2(h^{-1}\, g)\, dh$$

$$f^*(g) := \overline{f(g^{-1})}$$

Álgebras de Banach de Involução

Chama-se **álgebra de Banach de Involução** ou $*$-**álgebra de Banach** a uma álgebra de Banach complexa $\mathcal{A}$ munida dum operador $\mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto x^*$, satisfazendo as propriedades:

(1) $x \mapsto x^*$ é $\mathbb{C}$-linear,

(2) $(x\,y)^* = y^*\,x^*, \quad \forall\, x, y \in \mathcal{A}$,

(3) $(x^*)^* = x, \quad \forall\, x \in \mathcal{A}$,

(4) $\|x^*\| = \|x\|, \quad \forall\, x \in \mathcal{A}$.

Uma álgebra de Banach de involução diz-se uma C^*-**álgebra** se verificar ainda a propriedade

(5) $\|x\,x^*\| = \|x\|^2, \quad \forall\, x \in \mathcal{A}$.

As duas álgebras anteriores são álgebras de involução mas não são C^*-álgebras.

Sejam G um grupo compacto e V um espaço vectorial complexo. Chama-se **representação de G em V** a qualquer homomorfismo de grupos $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$. O conceito de representação é equivalente a um espaço vectorial complexo V munido duma estrutura de multiplicação à esquerda por elementos do grupo G que corresponde a uma acção $G \times V \to V$. Abreviando, designamos a representação $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ pelo par (V, Φ).

Chama-se **subespaço Φ-invariante** a qualquer subespaço vectorial complexo $W \subseteq V$ tal que $\forall g \in G, \quad \Phi(g)\, W = W$.
O subespaço W diz-se **próprio** $\Leftrightarrow$ $W \neq \{0\}$ e $W \neq V$.

Uma representação (V, Φ) diz-se **irredutível** $\Leftrightarrow$ (V, Φ) não tem subespaços invariantes próprios.

Seja G um grupo compacto.

Sejam (V, Φ) e (V', Φ') duas representações de G.
Uma aplicação $\mathbb{C}$-linear $L : V \to V'$ diz-se um **morfismo** de (V, Φ) para (V', Φ') $\Leftrightarrow$ $\forall g \in G, \;\; \Phi'(g) \circ L = L \circ \Phi(g)$.

Um morfismo entre representações diz-se um **isomorfismo** sse for um isomorfismo como aplicação $\mathbb{C}$-linear.

O conjunto das representações dum grupo compacto G com os morfismo e isomorfismos acima definidos constitui uma categoria.

Sub-Representações e Quocientes

Seja G um grupo compacto e (V, Φ) uma sua representação.

Dado um subespaço Φ-invariante $W \subset V$:

define-se a **sub-representação** $\Phi|_W : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$ por
$\Phi|_W(g)(x) := \Phi(g)(x), \ \forall\, g \in G, \, x \in W$.

e define-se a **representação quociente** $\Phi/_W : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V/W)$
por $\Phi/_W(g)(x + W) := \Phi(g)(x + W), \ \forall\, g \in G, \, x + W \in V$.

A inclusão $\quad i : (W, \Phi|_W) \hookrightarrow (V, \Phi)$
e a projecção $\quad \pi : (V, \Phi) \to (V/W, \Phi/_W)$
  são morfismos entre estas representações.

Somas Directas de Representações

Seja G um grupo compacto.

Dadas duas representações (V_1, Φ_1) e (V_2, Φ_2) define-se o **produto cartesiano** $(V_1 \times V_2, \Phi_1 \times \Phi_2)$ por

$$(\Phi_1 \times \Phi_2)(g) := \Phi_1(g) \times \Phi_2(g), \ \forall\, g \in G.$$

Dados subespaços Φ-invariantes $V_1, V_2 \subset V$ tais que $V = V_1 \oplus V_2$, (V, Φ) é isomorfa ao produto cartesiano de $(V_1, \Phi|_{V_1})$ e $(V_2, \Phi|_{V_2})$.

Representação Dual ou Contragradiente

Seja G um grupo compacto.

Dada uma representação (V, Φ) define-se a **representação dual** ou **contragradiente** de Φ, $\Phi^* : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V^*)$, por

$$(\Phi^*)(g)\,\alpha := \alpha \circ \Phi(g^{-1}), \quad \forall\, g \in G\ .$$

A dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \to \mathbb{C}$ satisfaz:

$$\langle \Phi(g)\,v, \Phi^*(g)\,\alpha \rangle = \langle v, \alpha \rangle, \quad \forall\, g \in G,\ v \in V,\ \alpha \in V^*\ .$$

Seja G um grupo compacto.

Dadas duas representações (V, Φ) e (V, Φ') define-se uma representação $\Psi = \Psi_{\Phi,\Phi'} : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(V, V'))$ no espaço $\mathcal{L}(V, V') = \{ L : V \to V' \, : \, L \text{ é } \mathbb{C}\text{-linear} \}$ pondo

$$\Psi(g)\, L := \Phi'(g)\, L\, \Phi(g^{-1}), \quad \forall\, g \in G \,.$$

Ψ é uma representação porque

$$\begin{aligned} \Psi(g_1\, g_2)\, L &= \Phi'(g_1\, g_2)\, L\, \Phi((g_1\, g_2)^{-1}) \\ &= \Phi'(g_1)\, \Phi'(g_2)\, L\, \Phi(g_2^{-1})\, \Phi(g_1^{-1}) \\ &= \Phi'(g_1)\, (\, \Psi(g_2)\, L\,)\, \Phi(g_1^{-1}) \\ &= \Psi(g_1)\, \Psi(g_2)\, L \,. \end{aligned}$$

Considerando $V' = \mathbb{C}$ obtemos a representação contragradiente como $\Phi^* = \Psi_{\Phi,1_{\mathbb{C}}}$ onde $1_{\mathbb{C}} : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ denota a representação constante $= I_{\mathbb{C}}$.

Morfismos como Pontos Fixos

Sejam (V, Φ) e (V', Φ') representações do grupo compacto G.

Proposição *Dado* $L \in \mathcal{L}(V, V')$,
L *é um morfismo* $\Leftrightarrow$ $\Psi(g)\, L = L$.

Proposição *Dado* $L \in \mathcal{L}(V, V')$,

(a) $\widetilde{L} = \int_G \Psi(g) L \, dg$ *é um morfismo de representações.*

(b) $(V, \Phi) = (V', \Phi') \Rightarrow \mathrm{tr}_C(\widetilde{L}) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(L)$.

Vamos dizer que $\widetilde{L}$ é a (Φ, Φ')-**média** de L.

Prova da Proposição. $\widetilde{L}$ é um morfismo porque

$$\Psi(g_0)\,\widetilde{L} = \int_G \Psi(g_0)\,\Psi(g) L\,dg = \int_G \Psi(g_0\,g) L\,dg$$
$$= \int_G \Psi(g) L\,dg = \widetilde{L}\,.$$

$$\Psi(g)\,L = \Phi(g)\,L\,\Phi(g)^{-1} \;\Rightarrow\; \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(\Psi(g)\,L) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(L)$$
$$\Rightarrow\; \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(\widetilde{L}) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(L)\;.$$

$\square$

Representações Unitárias

Se V estiver munido dum produto interno complexo $(\cdot,\cdot)$, a representação $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ diz-se **unitária** $\Leftrightarrow$ $\forall\, g \in G$, $(\Phi(g)v, \Phi(g)u) = (v,u)$ $\forall\, v, u \in V$, ou seja $\Phi(g)$ unitária.

Proposição *Toda a representação $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ dum grupo compacto G num espaço complexo V é unitária para algum produto interno em V.*

Prova. Denotemos por dg a integração relativamente à medida de Haar normalizada em G.
Dado um produto interno complexo arbitrário $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em V definimos um novo produto interno por

$$(u,v) = \int_G \langle \Phi(g)\,u, \Phi(g)\,v \rangle\, dg \quad \forall\, u, v \in V\ .$$

Continuação da Prova.
CLAIM Φ é unitária para o produto interno $(\cdot,\cdot)$.

Dado $g_0 \in G$, quaisquer que sejam $u, v \in V$,

$$
\begin{aligned}
(\Phi(g_0)\,u, \Phi(g_0)\,v) &= \int_G \langle \Phi(g)\,\Phi(g_0)\,u, \Phi(g)\,\Phi(g_0)\,v\rangle\, dg \\
&= \int_G \langle \Phi(g\,g_0)\,u, \Phi(g\,g_0)\,v\rangle\, dg \\
&= \int_G \langle \Phi(g)\,u, \Phi(g)\,v\rangle\, dg = (u,v)\ .
\end{aligned}
$$

$\square$

Decomponibilidade

Proposição *Sejam* $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ *uma representação unitária e* $W \subset V$ *um subespaço vectorial complexo.*
W Φ*-invariante* $\Rightarrow$ $W^{\perp}$ Φ*-invariante.*

Prova. Sup. que W é Φ-invariante.
Dados $v \in W^{\perp}$ e $g \in G$,

$$\forall\, u \in W,\ \ (\Phi(g)\, v, u) = (v, \overbrace{\Phi(g^{-1})\, u}^{\in W}) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \Phi(g)\, v \in W^{\perp}. \qquad \square$$

Corolário *Para toda a representação* $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ *dum grupo compacto* G *num espaço complexo* V *existe uma decomposição* $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ *em subespaços* Φ*-invariantes e irredutíveis. Em particular*
$$(V, \Phi) \simeq (V_1, \Phi|_{V_1}) \times \ldots \times (V_n, \Phi|_{V_n}).$$

Lema de Schur

Lema de Schur *Sejam* (V, Φ) *e* (V', Φ') *representações irredutíveis do mesmo grupo compacto.*

$L : V \to V'$ *morfismo* $\Rightarrow$ $L = 0$ *ou* L *isomorfismo.*

Prova. $\mathrm{Im}(L) = L(V)$ e $\mathrm{Nuc}(L)$ são subespaços invariantes. $\square$

Corolário *Seja* (V, Φ) *uma representação irredutível.*

$L : V \to V$ *endomorfismo* $\Rightarrow$ $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ *tal que* $L = \lambda\, I_V$.

Prova. Tome-se λ valor próprio de L e aplique-se o lema de Schur ao morfismo $L - \lambda\, I_V$. $\square$

Morfismos Médios entre Representações Irredutíveis

Seja G um grupo compacto.

Proposição *Sejam (V,Φ) e (V',Φ') representações irredutíveis.*

(a) (V,Φ) *e* (V',Φ') *não isomorfas* $\Rightarrow \widetilde{L} = 0 \;\; \forall\, L \in \mathcal{L}(V,V')$.

(b) $\widetilde{L} = (\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(L)/\dim V)\, I_V, \quad \forall\, L \in \mathcal{L}(V,V)$.

Prova. Pelo Lema de Schur,
(V,Φ) e (V',Φ') não isomorfas $\Rightarrow \widetilde{L} = 0$.

Pelo corolário do Lema de Schur,

$$(V,\Phi) = (V',\Phi') \;\Rightarrow\; \widetilde{L} = \lambda\, I_V$$
$$\Rightarrow\; \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(L) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(\widetilde{L}) = \lambda \dim V$$
$$\Rightarrow\; \widetilde{L} = (\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(L)/\dim V)\, I_V\, . \qquad \square$$

Coeficientes Matriciais dum Grupo Compacto

Seja G um grupo compacto, e (V, Φ) uma sua representação.

Chama-se **coeficiente matricial** de (V, Φ) a qualquer função

$$\varphi(g) = \varphi_{u,v}(g) = (\Phi(g)\, u, v)$$

onde $u, v \in V$ e $(\cdot, \cdot)$ representa um produto interno complexo em V que torne Φ uma representação unitária.

Fixando uma base $(e_1, \ldots, e_n)$ em V, $\varphi_{e_i, e_j}(g)$ é o coeficiente $(i\,j)$ da matriz que representa o automorfismo $\Phi(g) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ nesta base.

Seja G um grupo compacto.

Proposição *Sejam (V,Φ) e (V',Φ') representações irredutíveis.*

(a) se as representações são não isomorfas os correspondentes coeficientes matriciais são ortogonais entre si

$$\int_G (\Phi'(g)\,u',v')\,\overline{(\Phi(g)\,u,v)}\,dg = 0 \quad \forall\, u,v\in V,\ u',v'\in V' \ .$$

(b) o produto interno de coeficientes matriciais da mesma representação é dado por,

$$\int_G (\Phi(g)\,u',v')\,\overline{(\Phi(g)\,u,v)}\,dg = \frac{(u',u)\,\overline{(v',v)}}{\dim V} \quad \forall\, u,v,u',v'\in V \ .$$

Prova. (a) Sup. que (V,Φ) e (V',Φ') não são isomorfos e seja $L \in \mathcal{L}(V,V')$ definida por $L(v) = (v,u)\,u'$. Então

$$\widetilde{L}(v) = \int_G (\Phi(g^{-1})\,v,u)\,\Phi'(g)\,u'\,dg \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}
\int_G (\Phi'(g)\,u',v')\,\overline{(\Phi(g)\,u,v)}\,dg &= \int_G (\Phi'(g)\,u',v')\,\overline{(u,\Phi(g^{-1})\,v)}\,dg \\
&= \int_G (\Phi'(g)\,u',v')\,(\Phi(g^{-1})\,v,u)\,dg \\
&= \left(\int_G (\Phi(g^{-1})\,v,u)\,\Phi'(g)\,u'\,dg\,,\ v'\right) \\
&= (\,\widetilde{L}(v),\ v'\,) = 0\,.
\end{aligned}$$

Continuação da Prova. (b) Seja $L \in \mathcal{L}(V, V)$ definida por $L(v) = (v, u)\, u'$. Então $\widetilde{L} = (\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(L)/\dim V)\, I_V$ e sendo $\{e_i\}_i$ uma base ortonormada de V,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(L) &= \sum_i (L(e_i), e_i) = \sum_i (e_i, u)\,(u', e_i) \\ &= \sum_i (u', e_i)\,\overline{(u, e_i)} = (u', u)\ .\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_G (\Phi(g)\, u', v')\, \overline{(\Phi(g)\, u, v)}\, dg &= (\, \widetilde{L}(v),\ v'\,) \\ &= (\, (\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(L)/\dim V)\, v,\ v'\,) \\ &= \frac{(u', u)\,(v, v')}{\dim V} = \frac{(u', u)\,\overline{(v', v)}}{\dim V}\ .\end{aligned}$$

$\square$

Teorema de Peter-Weyl

Seja G um grupo compacto.

Teorema *O subespaço linear gerado pelos coeficientes matriciais de todas as representações irredutíveis de G é denso em $\mathrm{L}^2(G)$.*

Seja $\{ (V_\lambda, \Phi^\lambda) : \lambda \in \Lambda \}$ uma família completa de representações irredutíveis de G não isomorfas entre si. Seja $d_\lambda = \dim V_\lambda$ e $\{ e_i^\lambda : 1 \leq i \leq d_\lambda \}$ uma base ortonormada de V_λ.

Corolário *A família de coeficientes matriciais*

$$\sqrt{d_\lambda}\, \Phi^\lambda_{i,j}(g) := \sqrt{d_\lambda}\, (\Phi^\lambda(g) e_i^\lambda, e_j^\lambda) \quad \lambda \in \Lambda, \quad 1 \leq i, j \leq d_\lambda,$$

forma um sistema ortonormado completo em $\mathrm{L}^2(G)$.

Prova do Teorema de Peter-Weyl.
G actua à esq. de forma unitária no espaço de Hilbert $\mathrm{L}^2(G)$.

$$L : G \times \mathrm{L}^2(G) \to \mathrm{L}^2(G), \quad (L_x f)(y) := f(x^{-1}\, y).$$

Logo $L : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{L}^2(G)\right)$ é uma repr. unitária de G em $\mathrm{L}^2(G)$.

Seja $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{L}^2(G)$ o subespaço fechado gerado por todos os coeficientes matriciais de representações de G. Veremos que este é um subespaço L-invariante.

Seja $\mathcal{U}^\perp$ o complemento ortogonal de $\mathcal{U}$ em $\mathrm{L}^2(G)$. Este subespaço é também L-invariante.

Sup. que $\mathcal{U}^\perp \neq \{0\}$ constrói-se uma sub-representação com dimensão finita de $(\mathcal{U}^\perp, L|_{\mathcal{U}^\perp})$ cujos coeficientes matriciais estão em $\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{U} = \{0\} \;\Rightarrow\;$ ABSURDO. $\square$

1º Passo para o Teorema de Peter-Weyl

Proposição [Invariância de $\mathcal{U}$] $\forall\, f \in \mathcal{U}, \forall\, x \in G$:

(1) $L_x f \in \mathcal{U}$, *onde* $(L_x f)(y) := f(x^{-1}\, y)$,

(2) $R_x f \in \mathcal{U}$, *onde* $(R_x f)(y) := f(y\, x)$,

(3) $f^* \in \mathcal{U}$, $\overline{f} \in \mathcal{U}$.

Prova. Seja $h(x) = (\Phi(x)\, u, v)$.

(1) $(L_x h)(y) = h(x^{-1}\, y) = (\Phi(x^{-1}\, y)\, u, v) = (\Phi(y)\, u, \Phi(x)\, v)$,

(2) $(R_x h)(y) = h(y\, x) = (\Phi(y\, x)\, u, v) = (\Phi(y)\, (\Phi(x)\, u), v)$,

(3) $h^*(x) = \overline{h(x^{-1})} = \overline{(\Phi(x^{-1})\, u, v)} = (\Phi(x)\, v, u)$,

(3') $\overline{h}(x) = \overline{(\Phi(x)\, u, v)} = (\overline{\Phi(x)}\, \overline{u}, \overline{v})$. $\square$

Em (3') assume-se que $V = \mathbb{C}^n$ com o produto interno canónico e que $\Phi(x) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Proposição [Invariância de $\mathcal{U}^\perp$]
$\forall\, f \in \mathcal{U}^\perp$, $g \in \mathrm{L}^1(G)$, $\forall\, x \in G$:

(1) $L_x f \in \mathcal{U}^\perp$,

(2) $g * f \in \mathcal{U}^\perp$, *$\mathcal{U}^\perp$ é um ideal em $\mathrm{L}^1(G)$,*

(3) $f^* \in \mathcal{U}^\perp$, $\overline{f} \in \mathcal{U}^\perp$.

Prova. Sejam $f \in \mathcal{U}^\perp$, $g \in \mathrm{L}^1(G)$.

(1) $(L_x f, h) = (f, L_{x^{-1}} h) = 0, \quad \forall\, h \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad L_x f \in \mathcal{U}^\perp$,

(2) $$(g * f)(x) = \int_G g(y)\, f(y^{-1} x)\, dy = \int_G g(y)\, (L_y f)(x)\, dy$$
$$\Rightarrow \quad g * f = \int_G g(y)\, (L_y f)\, dy \in \mathcal{U}^\perp,$$

(3) $(f^*, h) = \overline{(f, h^*)} = 0, \quad \forall\, h \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad f^* \in \mathcal{U}^\perp$,

(3') $(\overline{f}, h) = \overline{(f, \overline{h})} = 0, \quad \forall\, h \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \overline{f} \in \mathcal{U}^\perp$. □

3º Passo para o Teorema de Peter-Weyl

Proposição $\forall f, g, h \in \mathrm{L}^2(G),\ \forall x \in G,$

(a) $(h, f * g) = (h * g^*, f)$,

(b) $(f, L_x g) = (f * g^*)(x),\ \forall x \in G$,

(c) $L_x(f * g) = (L_x f) * g,\ \forall x \in G$,

(d) $f * g = g * f$ *se* $g(x) = g(y\, x\, y^{-1}),\ \forall x, y \in G$.

Prova. (a)

$$
\begin{aligned}
(h, f * g) &= \int_G h(x)\, \overline{(f * g)(x)}\, dx \\
&= \int_G h(x) \int_G \overline{f(y)\, g(y^{-1}\, x)}\, dy\, dx \\
&= \int_G \int_G h(x)\, g^*(x^{-1}\, y)\, \overline{f(y)}\, dx\, dy \\
&= (h * g^*, f)
\end{aligned}
$$

3º Passo para o Teorema de Peter-Weyl

(b) $(f * g^*)(x) = \int_G f(y)\, g^*(y^{-1}\, x)\, dy$

$$= \int_G f(y)\, \overline{g(x^{-1}\, y)}\, dy = (f, L_x g)$$

(c) $L_x(f * g)(x') = (f * g)(x^{-1}\, x') = \int_G f(y)\, g(y^{-1}\, x^{-1}\, x')\, dy$

$$= \int_G f(y)\, g((x\, y)^{-1}\, x')\, dy$$

$$= \int_G f(x^{-1}\, z)\, g(z^{-1}\, x')\, dz = ((L_x f) * g)(x')$$

Na última passagem efectuou-se a mudança de variável $y \mapsto z = x\, y = L_{x^{-1}}(y)$.

3º Passo para o Teorema de Peter-Weyl

(d) $g(x) = g(y\,x\,y^{-1}) \;\Rightarrow\; g(y^{-1}\,x) = g(x\,y^{-1}) \;\Rightarrow$

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)\,g(y^{-1}\,x)\,dy = \int_G g(x\,y^{-1})\,f(y)\,dy$$

$$= \int_G g(z)\,f(z^{-1}\,x)\,dz = (g * f)(x).$$

Na última passagem efectuou-se a mudança de variável $y \mapsto z = x\,y^{-1} = (L_{x^{-1}} \circ i)(y)$, e teve-se em conta que a inversão $i : y \mapsto y^{-1}$ preserva a medida de Haar em G. $\square$

Proposição *Se* $\mathcal{U}^\perp \neq \{0\}$ *existe* $K \in \mathcal{U}^\perp$ *tal que:*

1. K *é contínua* e $K \neq 0$,
2. $K(x) = K(y\,x\,y^{-1})$, $\forall\, x, y \in G$,
3. $K^* = K$.

Prova. $\mathcal{U}^\perp \neq \{0\} \;\Rightarrow\; \exists\, K_0 \in \mathcal{U}^\perp, \quad K_0 \neq 0,$

$\Rightarrow$ tomando $\phi \in \mathcal{C}(G)$, $K_1 := \phi * K_0 \in \mathcal{U}^\perp$ é contínua. Escolhendo ϕ temos $K_1(1) = 1$,

$\Rightarrow$ $K_2(x) := \int_G K_1(y\,x\,y^{-1})\,dy \in \mathcal{U}^\perp$ é contínua satisfaz $K_2(x) = K_2(y\,x\,y^{-1})$ e $K_2(1) = 1$,

$\Rightarrow$ $K := K_2 + (K_2)^* \in \mathcal{U}^\perp$ é contínua e satisfaz $K(x) = K(y\,x\,y^{-1})$, $K = K^*$ e $K(1) = 2$. $\square$

5º Passo para o Teorema de Peter-Weyl

Consideremos o operador $T_K : \mathrm{L}^2(G) \to \mathrm{L}^2(G), \quad T_K(f) = f * K$.

Proposição

(a) T_K *deixa* $\mathcal{U}^\perp$ *invariante,*

(b) T_K *é auto-adjunto e compacto,*

(c) $\mathrm{spec}(T_K)$ *é formado por uma sequência de valores próprios não nulos tendendo a* 0*, todos com espaço próprio de dimensão finita.*

Prova.

(a): $T_K(\mathcal{U}^\perp) = \mathcal{U}^\perp \quad \Leftarrow \quad \mathcal{U}^\perp$ é um ideal em $\mathrm{L}^1(G)$

(b): T_K é auto-adjunto $\quad \Leftarrow \quad (h, f * K) = (h * K^*, f) = (h * K, f)$
T_K é um operador compacto $\quad \Leftarrow \quad K$ contínua

(c): $\Leftarrow$ (b). $\square$

6º Passo para o Teorema de Peter-Weyl

Proposição *Se* $\mathfrak{U}^\perp \neq \{0\}$ *existe um subespaço* $V \subset \mathfrak{U}^\perp$ *com dimensão finita* ≥ 1 *tal que* $L_x V = V, \ \forall x \in G$.
A representação $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, $\Phi(x) = L_x|_V$, *é contínua.*

Prova. Seja $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ um valor próprio de $T_K|_{\mathfrak{U}^\perp} : \mathfrak{U}^\perp \to \mathfrak{U}^\perp$ e $V_\lambda \subset \mathfrak{U}^\perp$ o correspondente espaço próprio de dim. $< +\infty$.

V_λ é invariante para $L : G \to \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(G))$ porque

$$\begin{aligned} f \in V_\lambda \quad &\Rightarrow \quad T_K(f) = \lambda f \\ &\Rightarrow \quad T_K(L_x f) = (L_x f) * K = L_x(f * K) = L_x\, T_K(f) = \lambda\, L_x f \\ &\Rightarrow \quad L_x f \in V_\lambda. \end{aligned}$$

Φ contínua $\quad \Leftarrow \quad L$ fracamente contínua. $\square$

7º Passo para o Teorema de Peter-Weyl

Proposição *Quaisquer que sejam $f, g \in V$, a função $h(x) = (f, L_x g)$ está em* $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{\perp} = \{0\}$.

Prova. $h(x) = (f, L_x g) = \overline{(\Phi(x)g, f)}$ está em $\mathcal{U}$
$\Leftarrow$ h é um coeficiente matricial

$$h(x) = (f, L_x g) = f * g^* \in \mathcal{U}^{\perp} \quad \Leftarrow \quad g \in \mathcal{U}^{\perp}$$

Logo $h \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{\perp} = \{0\}$. □

Caracteres duma Representação

Seja $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ uma representação dum grupo compacto.

Chama-se **caracter** de Φ à aplicação definida por

$$\chi_\Phi : G \to \mathbb{C}, \ \ \chi_\Phi(g) := \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(\Phi(g)), \ \ \forall\, g \in G.$$

$f : G \to \mathbb{C}$ diz-se uma **função de classe** $\quad \Leftrightarrow \ \forall\, y \in G,$

$$f(x) = f(y\, x\, y^{-1}).$$

Proposição *Qualquer caracter χ_Φ duma representação $\Phi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ é uma função de classe.*

Propriedades dos Caracteres

Proposição *Dadas representações unitárias* (V, Φ) *e* (V', Φ') *dum grupo compacto* G,

(a) $\chi_{\Phi^*} = \overline{\chi_\Phi}$,

(b) $\chi_{\Phi \oplus \Phi'} = \chi_\Phi + \chi_{\Phi'}$,

(c) $\chi_{\Phi \otimes \Phi'} = \chi_\Phi \, \chi_{\Phi'}$.

Prova. Reduz-se ao cálculo dos traços dos operadores $\Phi(g)$, $\Phi'(g)$, $\Phi^*(g)$, $\Phi \oplus \Phi'$ e $\Phi \otimes \Phi'$ relativamente as bases fixadas em V e V', que induzem novas bases em V^*, $V \oplus V'$ e $V \otimes V'$. $\square$

Caracteres dum Grupo Abeliano Compacto

Proposição *Seja G é um grupo abeliano compacto.*

(a) *Toda a classe de conjugação é singular.*

(b) *Todas as funções são de classe.*

(c) *Toda a representação irredutível de G é unidimensional.*

(d) *O caracter χ_Φ duma representação irredutível Φ de G é um homomorfismo de grupos $\chi_\Phi : G \to \mathbb{S}^1$, $\chi_\Phi \in \widehat{G}$.*

Ortogonalidade dos Caracteres

Proposição *Dadas representações irredutíveis* (V, Φ) *e* (V', Φ') *dum grupo compacto* G*,*

(a) $(\chi_\Phi, \chi_{\Phi'}) = 0$ *se* Φ *e* Φ' *não são isomorfos,*

(b) $(\chi_\Phi, \chi_{\Phi'}) = 1$ *se* Φ *e* Φ' *são isomorfos.*

Prova. Sejam $\{e_i\}_i$ e $\{e'_k\}_k$ bases de V e V' respectivamente, e sejam $\Phi_{i,j}(x) := (\Phi(x)\, e_i, e_j)$ e $\Phi'_{k,\ell}(x) := (\Phi'(x)\, e'_k, e'_\ell)$.

$$(\chi_\Phi, \chi_{\Phi'}) = \left(\sum_i \Phi_{i,i}, \sum_k \Phi'_{k,k} \right) = \sum_i \sum_k (\Phi_{i,i}, \Phi'_{k,k})$$

Lema de Schur $\Rightarrow$ (a)

Φ isomorfo a Φ' $\Rightarrow$ $\Phi'(g) = L\, \Phi(g)\, L^{-1}, \ \forall\, g \in G$

$\Rightarrow$ $\chi_{\Phi'} = \chi_\Phi$

$$(\chi_\Phi, \chi_\Phi) = \sum_i (\Phi_{i,i}, \Phi_{i,i}) = \sum_i \frac{1}{\dim V} = 1. \qquad \square$$

Corolário *Sejam* $(V_1, \Phi_1), \ldots, (V_n, \Phi_n)$ *e* (V', Φ') *representações irredutíveis de* G *e* $(V, \Phi) = (V_1 \oplus \ldots \oplus V_n,\ \Phi_1 \oplus \ldots \oplus \Phi_n)$. *Então* $(\chi_\Phi, \chi_{\Phi'})$ *é um inteiro não negativo igual ao número de factores* (V_i, Φ_i) *isomorfos a* (V', Φ').

Prova.

$(\chi_\Phi, \chi_{\Phi'}) = (\chi_{\Phi_1} + \cdots + \chi_{\Phi_n}, \chi_{\Phi'}) = (\chi_{\Phi_1}, \chi_{\Phi'}) + \cdots + (\chi_{\Phi_n}, \chi_{\Phi'})$.

$\square$

Corolário *Sejam* (V, Φ) *e* (V', Φ') *representações de* G.

$$\Phi \text{ é isomorfo a } \Phi' \quad \Leftrightarrow \quad \chi_\Phi = \chi_{\Phi'}.$$

Corolário *Seja* (V, Φ) *uma representação de* G.

$$\Phi \text{ é irredutível} \quad \Leftrightarrow \quad (\chi_\Phi, \chi_\Phi) = 1.$$

Expansão de Fourier das Funções de Classe

Seja $\mathrm{Cl}(G) = \{ f \in \mathrm{L}^2(G) \, : \, f$ é uma função de classe $\}$
$\mathrm{Cl}(G)$ é um subespaço fechado de $\mathrm{L}^2(G)$.

Seja $\{ (V_\lambda, \Phi^\lambda) \, : \lambda \in \Lambda \}$ uma família completa de representações irredutíveis de G não isomorfas entre si. Seja $\chi^\lambda := \chi_{\Phi^\lambda}$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Teorema *Os caracteres de G, $\{\chi^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, formam um sistema ortonormado completo de $\mathrm{Cl}(G)$. Em particular, $\forall f \in \mathrm{Cl}(G)$,*

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} (f, \chi^\lambda) \, \chi^\lambda \, .$$

Dada uma representação $\Phi : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ designamos por $\Phi_{i,j}(g) := (\Phi(g) \, e_i, e_j)$ o coeficiente matricial correspondente aos vectores e_i e e_j da base canónica em $\mathbb{C}^n$.

Médias duma Representação

Dados uma representação $\Phi : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e uma função $f : G \to \mathbb{C}$ definimos $\Phi(f) \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ por

$$\Phi(f) := \int_G f(x)\, \Phi(x)\, dx \ .$$

Lema *Se f é uma função de classe e a representação Φ é irredutível então* $\Phi(f) = \frac{(f, \overline{\chi_\Phi})}{n}\, I$.

Prova. $\Phi(f)$ é um morfismo de representações porque

$$\begin{aligned}\Phi(y)\, \Phi(f)\, \Phi(y^{-1}) &= \int_G f(x)\, \Phi(y\, x\, y^{-1})\, dx \\ &= \int_G f(y^{-1}\, x\, y)\, \Phi(x)\, dx = \Phi(f).\end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}\Phi(f) = \int_G f(x)\, \mathrm{tr}\Phi(x)\, dx = (f, \overline{\chi_\Phi}) \quad \Rightarrow \quad \Phi(f) = \frac{(f, \overline{\chi_\Phi})}{n}\, I. \qquad \square$$

Expansão de Fourier

Prova do Teorema. Φ^λ unitária $\Rightarrow \overline{\Phi^\lambda_{i,j}(x)} = \Phi^\lambda_{j,i}(x^{-1})$

Pelo Teorema de Peter-Weyl

$$f = \sum_\lambda d_\lambda \sum_{i,j=1}^{d_\lambda} (f, \Phi^\lambda_{i,j})\, \Phi^\lambda_{i,j} = \sum_\lambda d_\lambda \sum_{i,j=1}^{d_\lambda} \int_G f(x)\, \overline{\Phi^\lambda_{i,j}(x)}\, dx\, \Phi^\lambda_{i,j}$$

$$= \sum_\lambda d_\lambda \sum_{i,j=1}^{d_\lambda} \int_G f(x)\, \Phi^\lambda_{j,i}(x^{-1})\, dx\, \Phi^\lambda_{i,j} \quad \Leftarrow \quad \overline{\Phi^\lambda_{i,j}(x)} = \Phi^\lambda_{j,i}(x^{-1})$$

$$= \sum_\lambda d_\lambda \sum_{i,j=1}^{d_\lambda} \int_G f(x^{-1})\, \Phi^\lambda_{j,i}(x)\, dx\, \Phi^\lambda_{i,j} \quad \Leftarrow \quad \text{substituição: } x \leftarrow x^{-1}$$

$$= \sum_\lambda d_\lambda \sum_{i,j=1}^{d_\lambda} \Phi^\lambda_{j,i}(\overline{f^*})\, \Phi^\lambda_{i,j} = \sum_\lambda (\overline{f^*}, \overline{\chi_{\Phi^\lambda}})\, \mathrm{tr}\Phi^\lambda = \sum_\lambda (f, \chi^\lambda)\, \chi^\lambda\,.$$

Pelo lema anterior $\Phi^\lambda_{i,j}(\overline{f^*}) = 0$ se $i \neq j$ e $\Phi^\lambda_{i,i}(\overline{f^*}) = (\overline{f^*}, \overline{\chi_{\Phi^\lambda}})/d_\lambda$.

Representações do toro $\mathbb{T}^n$

$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é comutativo $\Rightarrow$ todas as representações irredutíveis são unidimensionais.

$\forall\, k \in \mathbb{Z}^n$, $\Phi_k : \mathbb{T}^n \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, $\Phi_k(t) := e^{2\pi\, i\, k\cdot t}\, I$ é uma representação irredutível.

$e_k(t) := \mathrm{tr}\,\Phi_k(t) = e^{2\pi\, i\, k\cdot t}$ é o caracter associado.

$\forall\, f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n)$ admite a expansão de Fourier,

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (f, e_k)\, e_k\ .$$

Representações de $\mathrm{SU}(2)$

A álgebra de Lie $\mathrm{su}(2)$ de $\mathrm{SU}(2)$ é uma forma real de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ que admite a base:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfazendo as relações:

$$[H,E] = 2E,\ [H,F] = -2F \quad \text{e} \quad [E,F] = H.$$

Dada uma representação $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\varphi = D\Phi_I : \mathrm{su}(2) \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ é uma repr. de álgebras de Lie que admite extensão complexa $\varphi : \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$.

Representações de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$

Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ valor próprio de $\varphi(H)$ com $\Re\mathrm{e}(\lambda)$ máxima.
Tome-se $v_0 \in V - \{0\}$ tal que $\varphi(H)\, v_0 = \lambda\, v_0$.
Defina-se $v_i = \varphi(F)^i\, v_0$ para $i \geq 0$, convencionando que $v_{-1} = 0$.

Proposição *Para cada $i \geq 0$,*

(a) $\varphi(E)\, v_0 = 0$,

(b) $\varphi(H)\, v_i = (\lambda - 2i)\, v_i$,

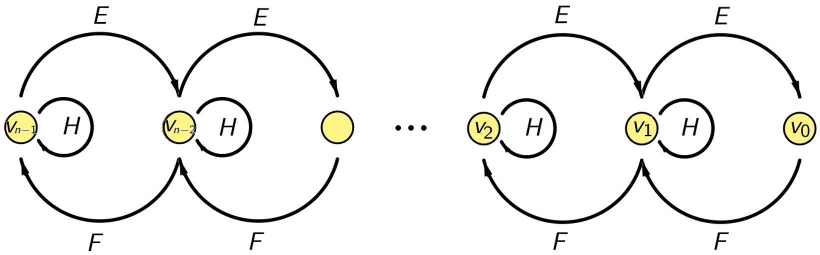
(c) $\varphi(E)\, v_i = i\,(\lambda - i + 1)\, v_{i-1}$,

(d) $V = \langle v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle$ *se* φ *for irredutível e* dim $V = n$,

(e) $\lambda = n - 1$.

Representações Irredutíveis de $\mathrm{SU}(2)$ e $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$

Corolário *Todas as representações irredutíveis $\varphi : \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ num espaço V de dimensão n são isomorfas. Todas as representações irredutíveis $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ num espaço V de dimensão n são isomorfas.*



H, E e F são geradores de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Prova da Proposição.

$$\varphi(H)\,\varphi(E)\,v_0 = \varphi(E)\,\overbrace{\varphi(H)\,v_0}^{=\lambda\,v_0} + \varphi(\overbrace{[H,E]}^{=2E})\,v_0 = (\lambda+2)\,\varphi(E)\,v_0$$

(a) $\Re\mathrm{e}(\lambda)$ máxima $\;\Rightarrow\; \lambda+2\notin \mathrm{spec}(\varphi(H)) \;\Rightarrow\; \varphi(E)\,v_0 = 0.$

(b) Por indução: O caso $i=0$ vale porque $\varphi(H)\,v_0 = \lambda\,v_0$.
Sup. que $\varphi(H)\,v_i = (\lambda-2i)\,v_i$,

$$\begin{aligned}\varphi(H)\,v_{i+1} &= \varphi(H)\,\varphi(F)\,v_i = \varphi(F)\,\overbrace{\varphi(H)\,v_i}^{=(\lambda-2i)\,v_i} + \varphi(\overbrace{[H,F]}^{=-2F})\,v_i\\ &= (\lambda-2(i+1))\,\varphi(F)\,v_i = (\lambda-2(i+1))\,v_{i+1}\,.\end{aligned}$$

(c) Por indução: O caso $i = 0$ vale porque $\varphi(E)\, v_0 = 0 = v_{-1}$.
Sup. que $\varphi(E)\, v_i = i\,(\lambda - i + 1)\, v_{i-1}$,

$$\begin{aligned}\varphi(E)\, v_{i+1} &= \varphi(E)\,\varphi(F)\, v_i = \varphi(F)\,\overbrace{\varphi(E)\, v_i}^{=i\,(\lambda-i+1)\, v_{i-1}} + \varphi(\overbrace{[E,F]}^{=H})\, v_i \\ &= (i\,(\lambda - i + 1) + \lambda - 2i)\, v_i = (i+1)\,(\lambda - i)\, v_i\,.\end{aligned}$$

(d) Seja W o subespaço gerado pelos vectores v_i com $i \geq 0$.

Relações anteriores $\Rightarrow$ W é (V,φ)-invariante

φ irredutível $\Rightarrow$ $W = V$ tem dimensão n

$\varphi(H)\, v_i = (\lambda - 2i)\, v_i \;\Rightarrow\; v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ são lin. indep. e $v_n = 0$.

$\Rightarrow\; V = \langle v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle$.

(e) $\operatorname{tr}\{\varphi(H)\} = \operatorname{tr}\{\varphi(E)\,\varphi(F)\} - \operatorname{tr}\{\varphi(F)\,\varphi(E)\} = 0$

Por outro lado,

$\operatorname{tr}\{\varphi(H)\} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda - 2\,i = n\lambda - n\,(n-1) = n\,(\lambda - (n-1))\,.$

Logo $\lambda = n - 1$. $\square$

Representação de $\mathrm{SU}(2)$

Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço dos polinómios homogéneos de grau n,
$p(z) = p(z_1, z_2) = a_0\, z_1^n + a_1\, z_1^{n-1}\, z_2 + \ldots + a_{n-1}\, z_1\, z_2^{n-1} + a_n\, z_2^2$
nas variáveis z_1, z_2.

Proposição $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}_n)$, $\Phi(U)\, p(z) = p(U^{-1} z)$, *é uma representação irredutível do grupo* $\mathrm{SU}(2)$.

$$\begin{aligned}\Phi(U_1\, U_2)\, p(z) &= p((U_1\, U_2)^{-1} z) = p(U_2^{-1}\, U_1^{-1} z) \\ &= (\Phi(U_2)\, p)(U_1^{-1} z) = \Phi(U_1)\, \Phi(U_2)\, p(z)\ .\end{aligned}$$

Lema *A representação* $\varphi : \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}_n)$ *satisfaz:*

(1) $\varphi(H)\,p(z) = -z_1\frac{\partial p}{\partial z_1}(z) + z_2\frac{\partial p}{\partial z_2}(z)$,

(2) $\varphi(E)\,p(z) = -z_2\,\frac{\partial p}{\partial z_1}(z)$,

(3) $\varphi(E)\,p(z) = -z_1\,\frac{\partial p}{\partial z_2}(z)$

Prova. Para calcular $\varphi : \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}_n)$ observemos que

$$\varphi(X)\,p(z) = \frac{d}{dt}\left(\Phi(e^{-tX}\,p(z)\right)_{t=0}.$$

Representação de $\mathrm{SU}(2)$

$$(1)\quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; e^{-tH} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi(H)\, p(z) = \tfrac{d}{dt} p(e^{-t} z_1, e^{t} z_2)_{t=0} = -z_1 \tfrac{\partial p}{\partial z_1}(z) + z_2 \tfrac{\partial p}{\partial z_2}(z)\ .$$

$$(2)\quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; e^{-tE} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi(E)\, p(z) = \tfrac{d}{dt} p(z_1 - t\, z_2, z_2)_{t=0} = -z_2\, \tfrac{\partial p}{\partial z_1}(z)\ .$$

$$(3)\quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; e^{-tE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi(E)\, p(z) = \tfrac{d}{dt} p(z_1, -t\, z_1 + z_2)_{t=0} = -z_1\, \tfrac{\partial p}{\partial z_2}(z)\ . \qquad \square$$

Proposição *Para cada monómio $z_1^i\, z_2^j \in \mathcal{P}_n$,*

$$\varphi(H)\, z_1^i\, z_2^j = (j - i)\, z_1^i\, z_2^j\ .$$

Em particular,

$$\operatorname{spec}\{\varphi(H)\} = \{-n, -n+2, \ldots, n-2, n\}.$$

$T = \left\{ R_\theta := \begin{pmatrix} e^{i\,\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\,\theta} \end{pmatrix} \,:\, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$ é um subgrupo abeliano maximal de $\mathrm{SU}(2)$, dito um **toro maximal**.

Todo o elemento de $\mathrm{SU}(2)$ é conjugado a um elemento de T.

Representação de $\mathrm{SU}(2)$

Proposição *O endomorfismo* $\Phi(e^{R_\theta}) = \Phi(e^{i\,\theta\,H}) = e^{i\,\theta\,\varphi(H)}$ *tem valores próprios* $\{\, e^{-i\,n\,\theta},\, e^{-i\,(n-2)\,\theta}, \ldots, e^{i\,(n-2)\,\theta},\, e^{i\,n\,\theta}\,\}$ *.*

Os caracteres desta família de representações irredutíveis são

$$\begin{aligned}\chi_\Phi(R_\theta) &= e^{-i\,n\,\theta} + e^{-i\,(n-2)\,\theta} + \ldots + e^{i\,(n-2)\,\theta} + e^{i\,n\,\theta} \\ &= \frac{e^{i\,(n+1)\,\theta} - e^{-i\,(n+1)\,\theta}}{e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}} = \frac{\sin((n+1)\,\theta)}{\sin\theta} \ .\end{aligned}$$