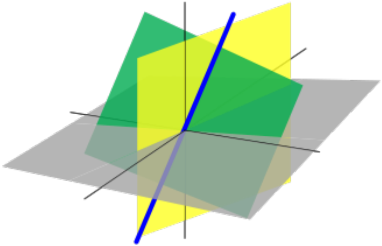
O que é a Álgebra Linear

A **Álgebra Linear** é uma área da Matemática nascida do estudo dos sistemas de equações lineares, que conecta a Álgebra abstracta à Geometria Analítica.



O que é uma Matriz

Chama-se **matriz** a qualquer tabela de números. Por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz 3×3.
O **Cálculo Matricial** (cálculo de matrizes) é uma parte essencial da Álgebra Linear.

Origens da Álgebra Linear

Apesar de muitos dos seus resultados serem muito antigos, o cálculo Matricial tem as suas origens no fim do século XIX, e a formação Álgebra Linear como disciplina autónoma dá-se no século XX.

Crescimento Populacional: Modelo de Leslie

Divide-se a população em 3 classes etárias distintas.
$n = 0, 1, 2, \ldots$ tempo medido em estações reprodutivas.
$X_n \in \mathbb{R}^3$ vector populacional na n-ésima estação reprodutiva.
A matriz de Leslie (3×3)

$$X_{n+1} = A\,X_n$$

Pretende-se compreender o comportamento assintótico $(n \to \infty)$ do vector populacional X_n conhecida a população inicial X_0.

Modelos Genéticos

Consideremos dois genes alelos: **A** dominante e **a** recessivo. A distribuição dos genótipos **AA**, **Aa** e **aa** na população é dada por vectores $X \in \mathbb{R}^3$.
Consideremos agora uma sucessão de experiências em que a descendência de cada geração é sempre cruzada com índividuos genótipicamente idênticos, por exemplo **Aa**. A sucessão dos vectores com as distribuições genéticas $X_n \in \mathbb{R}^3$ ao longo das sucessivas gerações satifaz uma lei do tipo

$$X_{n+1} = M\, X_n$$

em que M é uma matriz facilmente calculavel com base nas leis de Mendel. Pretende-se compreender o comportamento assintótico ($n \to \infty$) da distribuição genética X_n conhecida a distribuição inicial X_0.

O que é o Cálculo

Tal como a Geometria se pode definir como o estudo da *forma*, o Cálculo é o estudo da *mudança*, efectuado através dos conceitos de **derivada** (*taxa de variação*) e **integral** (*variação acumulada*), aos quais estão associadas operações de **Derivação** e **Integração** inversas uma da outra e relacionadas entre si pelo **Teorema Fundamental do Cálculo**.

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt$$

O que é uma Equação Diferencial

Uma **equação diferencial** é uma equação envolvendo derivadas (diferenciais) de uma função incógnita.

Grande parte das aplicações do Cálculo resultam de problemas equacionados em termos de equações diferenciais.

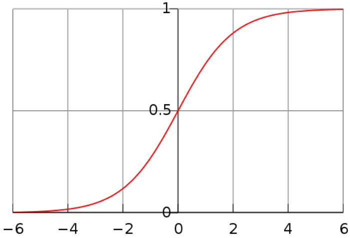
Origens do Cálculo

A fundação do Cálculo é atribuída aos trabalhos independentes de Isaac Newton (1643-1727) Gottfried Leibniz (1646-1716).

O Cálculo está na base da revolução científica e tecnológica iniciada no século XVIII.

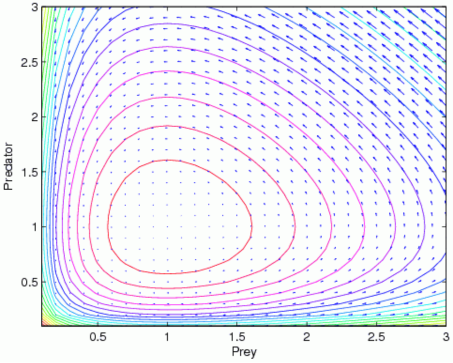
Crescimento Populacional: Modelo Logístico

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 0.1 - 0.1\,y(t)$$



Ecosistema Predador-Presa: Modelo de Lotka-Volterra

$$x'/x = \ \ a - b\,y$$
$$y'/y = -c + d\,x$$



Definição de Matriz

Uma matriz é uma **tabela** rectangular de números

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

O elementos $a_{i,j}$ dizem-se as **entradas** da matriz.
i representa a linha e j a coluna de A onde se encontra $a_{i,j}$.
Se A tem n linhas e m colunas dizemos que tem **dimensão** $n \times m$.

Matrizes Quadradas

As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

têm dimensões 2×3, 3×2 e 3×3 respectivamente.

Uma matriz diz-se **quadrada** se o seu número de linhas for igual ao número de colunas. C é uma matriz quadrada.

Diagonal Principal duma Matriz Quadrada

Chama-se **diagonal principal** duma matriz quadrada à sequência das entradas em que o índice de linha é igual ao índice de coluna

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Uma matriz quadrada em que todas as entradas fora da diagonal principal sejam nulas diz-se uma **matriz diagonal**.

Por exemplo $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal.

Matrizes Triângulares Superiores

Chama-se **matriz triângular superior** a uma matriz quadrada com todas as entradas nulas em baixo da diagonal principal.

Por exemplo $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ é uma matriz triângular superior.

Matrizes linha e Matrizes coluna

Uma matriz com uma só linha diz-se uma **matriz linha**.
Por exemplo $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Uma matriz com uma só coluna diz-se uma **matriz coluna**.
Por exemplo $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Matriz dum Sistema

Dado um sistema de n equações em m incógnitas $x_1, \ldots, x_m$

$$\begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,m}\,x_m & = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,m}\,x_m & = b_2 \\ \cdots & \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,m}\,x_m & = b_m \end{cases}$$

chama-se **matriz ampliada** do sistema à matriz seguinte

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} & b_m \end{array}\right]$$

Matriz dos coeficientes **Col. dos termos indep.**

Exemplo

O sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3\,x - z & = & 0 \\ y + 2\,z & = & -1 \\ x - y & = & 1 \end{array}\right.$$

admite a seguinte matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Método de Eliminação de Gauss

Método para resolução de sistemas de equações lineares no qual apenas são permitidas as seguintes regras:

(R1) trocar a ordem das equações,

(R2) multiplicar uma equação por um número $\lambda \neq 0$,

(R3) adicionar uma equação a outra.

Teorema *Qualquer sistema de equações lineares pode ser resolvido por eliminação de Gauss.*

Exemplo de Resolução por Eliminação de Gauss

$$\left\{\begin{aligned} x+3\,y-z &= 2\\ 2\,x+6\,y-z &= 5\\ x+5\,y-3\,z &= 4\end{aligned}\right. \xrightarrow{E_2'=E_2-2E_1} \left\{\begin{aligned} x+3\,y-z &= 2\\ z &= 1\\ x+5\,y-3\,z &= 4\end{aligned}\right.$$

$$\xrightarrow{E_3'=E_3-E_1}$$

$$\left\{\begin{aligned} x+3\,y-z &= 2\\ z &= 1\\ 2\,y-2\,z &= 2\end{aligned}\right. \xrightarrow{E_2'=E_3,E_3'=E_2} \left\{\begin{aligned} x+3\,y-z &= 2\\ 2\,y-2\,z &= 2\\ z &= 1\end{aligned}\right. \xrightarrow{E_2'=\frac{1}{2}E_2}$$

$$\left\{\begin{aligned} x+3\,y-z &= 2\\ y-z &= 1\\ z &= 1\end{aligned}\right. \xrightarrow{E_1'=E_1-3E_2} \left\{\begin{aligned} x+2\,z &= -1\\ y-z &= 1\\ z &= 1\end{aligned}\right. \xrightarrow{E_2'=E_2+E_3}$$

$$\left\{\begin{aligned} x+2\,z &= -1\\ y &= 2\\ z &= 1\end{aligned}\right. \xrightarrow{E_1'=E_1-2E_3} \left\{\begin{aligned} x &= -3\\ y &= 2\\ z &= 1\end{aligned}\right.$$

Eliminação de Gauss para Matrizes

Chama-se **eliminação de Gauss** ao método de transformação de matrizes (cuja estratégia será explicada adiante) no qual apenas são permitidas as seguintes regras:

(R1) trocar a ordem das linhas da matriz,

(R2) multiplicar uma linha da matriz por um número $\lambda \neq 0$,

(R3) adicionar uma linha a outra.

Exemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2'=L_2-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3'=L_3-L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2'=L_3, L_3'=L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2'=\frac{1}{2}L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1'=L_1-3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2'=L_2+L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1'=L_1-2L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Estratégia do Método

(1) Escolhe-se a 1ª coluna não identicamente nula da matriz. Seja i o índice desta coluna.

(2) Se $a_{1,i} = 0$ trocamos de linhas (regra R1) de modo a garantir que $a_{1,i} \neq 0$.

(3) Em seguida multiplicamos a primeira linha por $a_{1,i}^{-1}$ (regra R2) para que se tenha $a_{1,i} = 1$.

(4) Por adição ordenada (regras R2 e R3) conseguimos anular todos as restantes entradas da coluna i, $a_{2,i} = 0$, $a_{3,i} = 0$, etc.

(5) Repete-se o procedimento anterior (1-4) à submatriz formada pelas linhas a seguir à primeira.

Matrizes em Escada

Chama-se **matriz em escada** a qualquer matriz tal que

- Todas as linhas não identicamente nulas ficam acima de qualquer linha nula, e
- O primeiro coeficiente não nulo de cada linha (não nula) (dito o **pivot** dessa linha) está sempre estritamente à direita do primeiro coeficiente não nulo de qualquer linha que lhe esteja acima.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Método de Eliminação de Gauss

Teorema *Qualquer matriz pode ser transformada numa matriz em escada por eliminação de Gauss.*

Teorema *Se uma matriz A puder ser transformada em duas matrizes em escada E e E' por eliminação de Gauss então as matrizes E e E' têm*

1. *o mesmo número de linhas não nulas, e*
2. *os seus pivots nas mesmas colunas.*

Exemplo 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2' = L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3' = L_3 - 2L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3' = L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Sistema impossível !

Exemplo 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2'=L_1, L_1'=L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2'=L_2-2L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2'=-L_2, L_3'=\frac{1}{2}L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3'=L_3-L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3'=L_3+L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{sistema possível e indeterminado}$$

$$\begin{cases} x + 2\,y + 3\,z & = 3 \\ z & = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -3 - 2\,y \\ z & = 2 \end{cases}$$

Classificação dos Sistemas

Consideremos um sistema com uma matriz ampliada em escada A.

O sistema é impossível $\Leftrightarrow$ a matriz A tiver um pivot na última coluna.

O sistema é possível e determinado $\Leftrightarrow$ a matriz A tiver um pivot em cada coluna da matriz dos coeficientes, mas nenhum pivot na última coluna.

O sistema é possível mas indeterminado $\Leftrightarrow$ a matriz A tiver alguma coluna da matriz dos coeficientes sem pivot, mas nenhum pivot na última coluna.

Um Erro Comum

As seguintes operações não podem ser efctuadas em simultâneo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2'=L_2-2L_1,\ L_1'=L_1-\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3/2 & 4 \\ 0 & -3 & -8 \end{array}\right]$$

A matriz obtida não representa um sistema equivalente ao primeiro.

Se efectuarmos as mesmas operações separadamente chegamos a um resultado diferente

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2'=L_2-2L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1'=L_1-\frac{1}{2}L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 7/2 & 10 \\ 0 & -3 & -8 \end{array}\right]$$

Representação Cartesiana de Pontos no Espaço

Fixado um sistema de eixos coordenados, no plano ou no espaço, todo o ponto pode ser representado pelas suas coordenadas em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

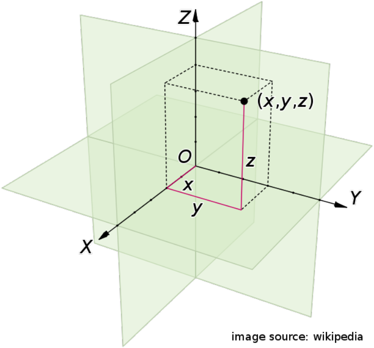
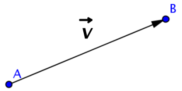


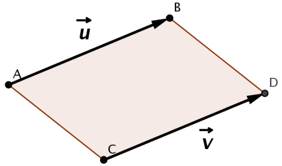
image source: wikipedia

Vectores Livres

Chama-se **vector** a qualquer segmento orientado ligando dois pontos.

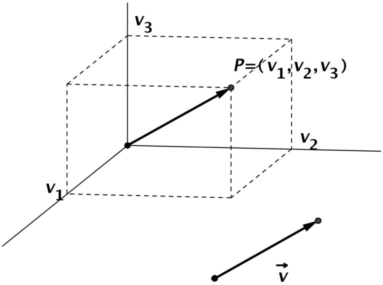


Dois vectores consideram-se idênticos quando o quadrilátero que os contenha como lados opostos for um paralelogramo.



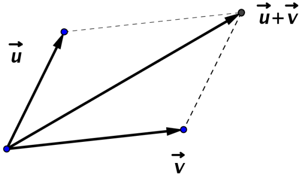
Representação Cartesiana de Vectores

Por definição as coordenadas dum vector $\vec{v}$ são as coordenadas do ponto extremidade $P = (v_1, v_2, v_3)$ dum representante desse vector aplicado à origem.



Adição de Vectores

A adição de vectores faz-se pela regra do paralelogramo.

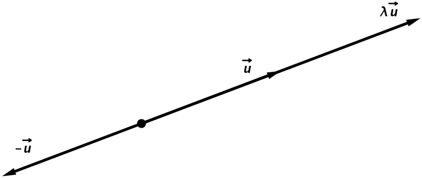


Esta operação geométrica corresponde em coordenadas à adição em $\mathbb{R}^n$.
Se $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ então

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) .$$

Multiplicação dum Vector por um Escalar

Em Álgebra Linear chama-se **escalar** a qualquer número real.
Define-se geométricamente a multiplicação dum vector $\vec{v}$ por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

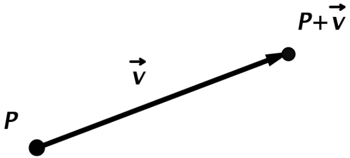


Esta operação geométrica corresponde em coordenadas à multiplicação por λ em $\mathbb{R}^n$.
Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ então

$$\lambda\,\vec{v} = (\lambda\, v_1, \ldots, \lambda\, v_n)\ .$$

Adição dum Vector a um Ponto

Dado um ponto P e um vector $\vec{v}$, a adição $P + \vec{v}$ representa o ponto extremidade Q dum vector $\overrightarrow{PQ}$ idêntico a $\vec{v}$.

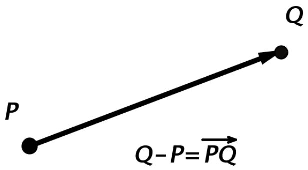


Esta operação geométrica corresponde em coordenadas à adição em $\mathbb{R}^n$.
Se $P = (p_1, \ldots, p_n)$ e $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ então

$$P + \vec{v} = (p_1 + v_1, \ldots, p_n + v_n) \, .$$

Diferença entre Pontos

Dados pontos P e Q, a diferença $Q - P$ representa o vector $\overrightarrow{PQ}$ que liga P a Q.



Esta operação geométrica corresponde em coordenadas à diferença em $\mathbb{R}^n$.
Se $P = (p_1, \ldots, p_n)$ e $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ então

$$Q - P = (q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n) \, .$$

Propriedades da Adição de Vetores

$\vec{0}$ designa o **vector nulo**, de comprimento zero.
$-\vec{v}$ representa o **simétrico** do vector $\vec{v}$, com a mesma direcção e comprimento mas sentido oposto.

Quaisquer que sejam os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$,

1. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$,
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
3. $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$,
4. $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} = (-\vec{v}) + \vec{v}$.

Propriedades da Multiplicação por um Escalar

Quaisquer que sejam os escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, e os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$,

1. $\lambda\,(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\,\vec{u} + \lambda\,\vec{v}$,
2. $(\lambda + \mu)\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} + \mu\,\vec{v}$,
3. $(\lambda\,\mu)\,\vec{v} = \lambda\,(\mu\,\vec{v})$,
4. $1\,\vec{v} = \vec{v}$.

Propriedades das Operações entre Pontos e Vectores

Quaisquer que sejam os pontos P, Q, e os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$,

1. $P + \vec{0} = P$,
2. $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v})$,
3. $\vec{w} = Q - P$ é o único vector tal que $P + \vec{w} = Q$,
4. $(C - A) = (C - B) + (B - A)$.

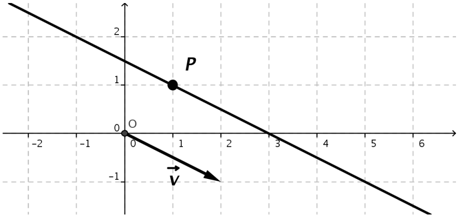
Equação Vectorial duma Recta

Dado um ponto P e um vector $\vec{v}$,

$$X = P + t\,\vec{v} \quad (t \text{ parâmetro})$$

diz-se a **equação vectorial** da recta $\mathcal{R}$ que passa por P com a direcção de $\vec{v}$. Cada valor do parâmetro t corresponde um ponto X na recta $\mathcal{R}$.

Exemplo duma Recta



Por exemplo

$$(x, y) = (1, 1) + t\,(2, -1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = 1 + 2\,t \\ y & = 1 - t \end{cases}$$

é a equação vectorial da recta que passa por $P = (1, 1)$ com a direcção de $\vec{v} = (2, -1)$.

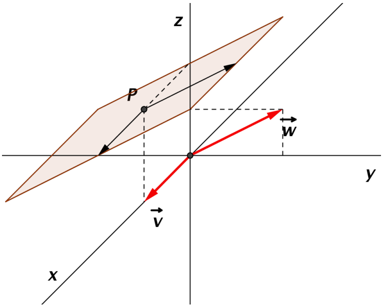
Equação Vectorial dum Plano

Dado um ponto P e dois vectores não colineares $\vec{v}$, $\vec{w}$

$$X = P + t\,\vec{v} + s\,\vec{w} \quad (t, s \text{ parâmetros})$$

diz-se a **equação vectorial** do plano $\mathcal{P}$ que passa por P com a direcção dos vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Cada par de valores dos parâmetros t e s corresponde um ponto X no plano $\mathcal{P}$.

Exemplo dum Plano



Por exemplo

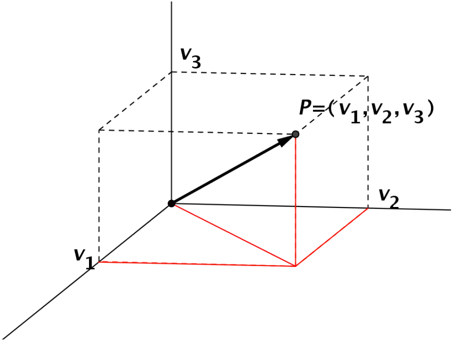
$$(x, y, z) = (2, 0, 2) + t\,(2, 0, 0) + s\,(0, 2, 1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= 2 + 2\,t \\ y &= 2\,s \\ z &= 2 + s \end{cases}$$

é a equação vectorial do plano que passa por $P = (2, 0, 2)$ com a direcção de $\vec{v} = (2, 0, 0)$ e $\vec{w} = (0, 2, 1)$.

Norma de Vectores

Chama-se **norma** dum vector $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ ao seu comprimento,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}\,.$$



O Produto Interno de Vectores

O **produto interno** de dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ define-se por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \; \|\vec{v}\| \cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \ .$$

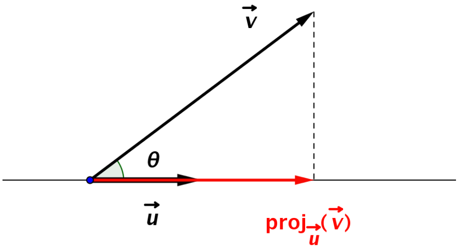
Em particular, dois vectores são perpendiculares (ortogonais)

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \ .$$

Relação com Projecções Ortogonais

A projecção ortogonal dum vector $\vec{v}$ sobre a recta com a direcção de $\vec{u}$ é dada por

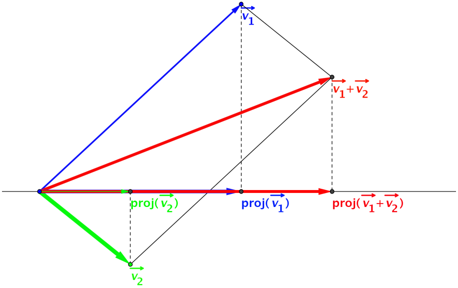
$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u}\ .$$



Propriedades da Projecção Ortogonal

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{v_1}) + \mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{v_2})$$

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\lambda\, \vec{v}) = \lambda\, \mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$$



Propriedades do Produto Interno

Quaisquer que sejam os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,
3. $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$,
4. $\lambda\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\,\vec{v})$,
5. $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.

Vectores Ortonormados

Uma lista de vectores $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ diz-se **ortonormada** se forem perpendiculares entre si e tiverem todos norma igual a um.
Isto equivale a dizer que

$$\vec{v_i} \cdot \vec{v_j} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases} \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Os vectores $\vec{e_1} = (1, 0, 0 \ldots, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{e_n} = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ de $\mathbb{R}^n$, todos com norma igual a um e alinhados segundo os eixos coordenados, formam uma lista ortonormada de vectores.

Caracterização algébrica do Produto Interno

O produto interno de dois vectores $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ em $\mathbb{R}^n$ é dado por

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1\, u_1 + \cdots + v_n\, u_n \ .$$

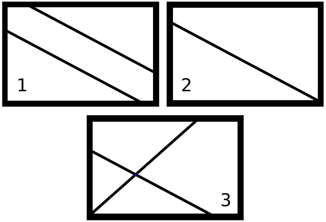
Se $\vec{v} = v_1\, \vec{e_1} + \ldots + v_n\, \vec{e_n}$ e $\vec{u} = u_1\, \vec{e_1} + \ldots + u_n\, \vec{e_n}$ então

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{u} = {} & (v_1\, \vec{e_1} + v_2\, \vec{e_2} + \ldots + v_n\, \vec{e_n}) \cdot (u_1\, \vec{e_1} + u_2\, \vec{e_2} + \ldots + u_n\, \vec{e_n}) \\
= {} & v_1\, u_1\, \vec{e_1} \cdot \vec{e_1} + v_1\, u_2\, \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + \ldots + v_1\, u_n\, \vec{e_1} \cdot \vec{e_n} + \\
& + v_2\, u_1\, \vec{e_2} \cdot \vec{e_1} + v_2\, u_2\, \vec{e_2} \cdot \vec{e_2} + \ldots + v_2\, u_n\, \vec{e_2} \cdot \vec{e_n} + \\
& + \qquad \cdots \qquad + \\
& + v_n\, u_1\, \vec{e_n} \cdot \vec{e_1} + v_n\, u_2\, \vec{e_n} \cdot \vec{e_2} + \ldots + v_n\, u_n\, \vec{e_n} \cdot \vec{e_n} \\
= {} & v_1\, u_1 + v_2\, u_2 + \cdots + v_n\, u_n \ .
\end{aligned}$$

As parcelas a vermelho correspondem a vectores perpendiculares.

Soluções dum Sistema 2×2 (duas equações em duas incógnitas)

O conjunto das soluções dum sistema 2×2 pode ser:

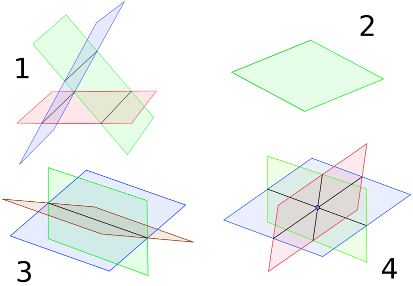


1. vazio
2. uma recta
3. um ponto

Soluções dum Sistema 3×3 (três equações em três incógnitas)

O conjunto das soluções dum sistema 3×3 pode ser:

1. vazio
2. um plano
3. uma recta
4. um ponto



Subespaços Afins

Chama-se **subespaço afim** de $\mathbb{R}^n$ ao conjunto S das soluções dum sistema de equações lineares.

Dizemos que um vector $\vec{v}$ é **paralelo** ao conjunto S quando existem pontos $P, Q \in S$ tais que $\vec{v} = Q - P$.

Chama-se **combinação linear** dos vectores $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ a qualquer vector obtido como soma

$$t_1\,\vec{v_1} + t_2\,\vec{v_2} + \cdots + t_n\,\vec{v_n}\ ,$$

para certos escalares $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.

Dimensão dum Subespaço Afim

Proposição

Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é um subespaço afim então dados $P \in S$ e $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}$ vectores paralelos a S, $P + t_1\,\vec{v_1} + t_2\,\vec{v_2} + \cdots + t_k\,\vec{v_k} \;\in\; S$, quaisquer que sejam os escalares $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$.

Chama-se **dimensão** dum subespaço afim S de $\mathbb{R}^n$ ao menor número de vectores $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}$ paralelos a S tais que fixado um ponto $P \in S$ qualquer outro ponto $X \in S$ se pode obter somando a P uma combinação linear dos vectores $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}$, i.e.,

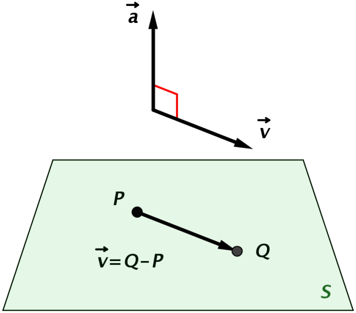
$$X = P + t_1\,\vec{v_1} + t_2\,\vec{v_2} + \cdots + t_k\,\vec{v_k}\;,$$

para certos escalares $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$.

Perpendicularidade a um Subespaço Afim

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um subespaço afim.

Diz-se que um vector $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ é **perpendicular** a S quando $\vec{a}$ for perpendicular a todos os vectores $\vec{v}$ paralelos a S.

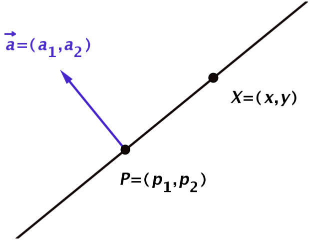


Equação Cartesiana duma recta em $\mathbb{R}^2$.

Dado um ponto $P = (p_1, p_2)$ e um vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$,

$$a_1\,(x - p_1) + a_2\,(y - p_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1\,x + a_2\,y = a_1\,p_1 + a_2\,p_2$$

é a **equação cartesiana** da recta por P perpendicular ao vector $\vec{a}$.



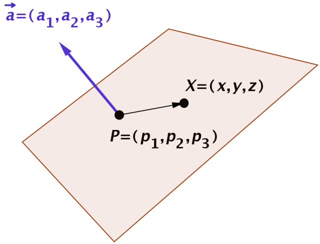
Qualquer recta definida em $\mathbb{R}^2$ pela equação cartesiana $a_1\,x + a_2\,y = b$ é perpendicular ao vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$.

Equação Cartesiana dum plano em $\mathbb{R}^3$.

Dado um ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$ e um vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$,

$$a_1 (x - p_1) + a_2 (y - p_2) + a_3 (z - p_3) = 0$$

é a **equação cartesiana** do plano por P perpendicular ao vector $\vec{a}$.



Qualquer plano definido em $\mathbb{R}^3$ pela equação cartesiana $a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z = b$ é perpendicular ao vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Hiperplanos em $\mathbb{R}^n$.

Chama-se **hiperplano de** $\mathbb{R}^n$ a um subespaço afim definido por uma única equação linear

$$a_1\,x_1 + \ldots + a_n\,x_n = b\ .$$

As rectas são os hiperplanos de $\mathbb{R}^2$

Os planos são os hiperplanos de $\mathbb{R}^3$

Todo o hiperplano de $\mathbb{R}^n$ é um subespaço afim de dimensão $n-1$, perpendicular ao vector $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ dos coeficientes da equação.

Exemplo

Considere-se o hiperplano S de $\mathbb{R}^4$ definido pela equação

$$x - y + z - w = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + y - z + w$$

O conjunto S de soluções desta equação

$$\begin{aligned}
(x, y, z, w) &= (1 + y - z + w, y, z, w) \\
&= (1, 0, 0, 0) + (y, y, 0, 0) + (-z, 0, z, 0) + (w, 0, 0, w) \\
&= (1, 0, 0, 0) + y\,(1, 1, 0, 0) + z\,(-1, 0, 1, 0) + w\,(1, 0, 0, 1)
\end{aligned}$$

passa pelo ponto $(1, 0, 0, 0)$ e tem a direcção dos três vectores $\vec{v_1} = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{v_2} = (-1, 0, 1, 0)$, $\vec{v_3} = (1, 0, 0, 1)$. Logo S tem dimensão 3.

Característica duma Matriz

Chama-se **característica** ou **rank** duma matriz A ao número de linhas não nulas (igual ao número de pivots) de qualquer matriz em escada obtida de A por eliminação de Gauss.

A característica de A será denotada por $r(A)$.

Proposição

Um sistema definido por uma matriz ampliada $[A|b]$ é possível se e somente se $r(A) = r([A|b])$.

Exemplo

O sistema

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

tem característica 2 e grau de indeterminação 2.

$$\left\{\begin{array}{rl} x + z + w & = 2 \\ z - w & = 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} x & = 1 - 2\,w \\ z & = 1 + w \end{array}\right.$$

O conjunto de soluções deste sistema

$$\begin{aligned} (x, y, z, w) &= (1 - 2\,w, y, 1 + w, w) \\ &= (1, 0, 1, 0) + (0, y, 0, 0) + (-2\,w, 0, w, w) \\ &= (1, 0, 1, 0) + y\,(0, 1, 0, 0) + w\,(-2, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

é um plano que passa pelo ponto $(1, 0, 1, 0)$ e tem a direcção dos dois vectores $\vec{v_1} = (0, 1, 0, 0)$ e $\vec{v_2} = (-2, 0, 1, 1)$.

Grau de indeterminação dum Sistema

Seja $[A|b]$ a matriz ampliada dum sistema S, que por eliminação de Gauss é transformada numa matriz em escada $[E|e]$.

Chama-se **grau de indeterminação do sistema** S ao número de colunas sem pivots da matriz dos coeficientes E.

Grau de indeterminação e Subespaços afins

Proposição

Seja $S \neq \emptyset$ *um subespaço afim, solução dum sistema definido pela matriz ampliada* $[A|b]$.

1. *O grau de indeterminação do sistema é igual a* $n - r(A)$ *em que* n *é o número de incógnitas do sistema (colunas de* A*).*
2. *O grau de indeterminação do sistema é igual à dimensão do subespaço* S.
3. *O subespaço* S *é perpendicular a todas as linhas da matriz* A.

Grau de indeterminação e Subespaços afins

Num sistema de equações lineares são iguais os números seguintes:

- o grau de indeterminação do sistema.
- o número de colunas de sem pivot na matriz em escada que se obtem de A por eliminação de Gauss.
- o número de variáveis livres quando se resolve o sistema.
- o número de vectores na representação paramétrica do conjunto solução do sistema.
- a dimensão do conjunto solução do sistema.

Representação de Sistemas de Equações Lineares

Todo o sistema de n equações em m incógnitas $x_1, \ldots, x_m$

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,m}\,x_m & = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,m}\,x_m & = b_2 \\ \cdots & \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,m}\,x_m & = b_m \end{array}\right.$$

pode ser representado matricialmente

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Representação de Sistemas de Equações Lineares

Se X é a coluna das incógnitas dum sistema com matriz ampliada $[A|B]$, o sistema pode também ser representado através da **equação matricial** $AX = B$.

Por exemplo

$$\left\{\begin{array}{rl} x - y + z & = 0 \\ 2x + z & = 1 \\ y - 2z & = 2 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade

Chama-se **matriz identidade** a qualquer matriz diagonal com todas as entradas na diagonal principal iguais a 1.
Por exemplo

$$[1] \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cada espaço de matrizes quadradas $\mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times n}$ tem uma única matriz identidade que é denotada por I.

Elemento Neutro da Multiplicação de Matrizes

1. $A\,I = A, \quad$ se $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times m}$, $I \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{m\times m}$,
2. $I\,B = B, \quad$ se $B \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times m}$, $I \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times n}$,
3. $A\,I = A = I\,A, \quad$ se $A, I \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times n}$.

A matriz identidade I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes.

Lei do Anulamento do Produto

Lei do Anulamento do Produto
Dados números reais $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a\,b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \;\; ou \;\; b = 0\,.$$

Existência de Inversos
Dado $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, *existe* $a^{-1} \in \mathbb{R}$ *tal que* $\;a\,a^{-1} = 1 = a^{-1}\,a$.

Questão
Valem as mesmas propriedades para a multiplicação de matrizes?

Inversos e Anulamento do Produto

A lei do anulamento do produto não é válida para matrizes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ não podem ter inversos no sentido da definição seguinte.

Matrizes Inversas

Uma matriz $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times n}$ diz-se **invertível** se existir $B \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times n}$ tal que $A\,B = I = B\,A$. A matriz B diz-se a **inversa** de A.

Quando existe a inversa duma matriz A é única e denota-se por A^{-1}.

Propriedades

1. $A\,B = I \quad \Rightarrow \quad B\,A = I$ e $B = A^{-1}$, *se* $A, B \in \mathcal{M}at_{n\times n}$,
2. $(A^{-1})^{-1} = A$, *se* $A, \in \mathcal{M}at_{n\times n}$ *for invertível*,
3. $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$, *se* $A, B \in \mathcal{M}at_{n\times n}$ *forem invertíveis.*

Exemplo: Verificação duma Relação inversa

Dadas $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

$$A\,B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$B\,A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo: Cálculo duma Inversa

Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ consideremos a matriz de incógnitas

$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$ e a equação $\quad A\,X = I.$

Esta equação

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

é equivalente a 3 sistemas de 3 equações em 3 incógnitas

Exemplo: Cálculo duma Inversa

São eles

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como estes 3 sistemas partilham a mesma matriz dos coeficientes, podemos representá-los por uma única **matriz ampliada**.

Exemplo: Cálculo duma Inversa

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1'=L_2, L_2'=L1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2'=L_2-2L_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2'=L_3, L_3'=L_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2'=-L_2, L_3'=L_3-2L_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3'=-L_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2'=L_2+L_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1'=L_1-L_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Exemplo: Cálculo duma Inversa

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Elim. Gauss}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Critério de Invertibilidade

Proposição

Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}at_{n\times n}$, são equivalentes as afirmações:

1. *A é invertível,*
2. *A pode ser transformada por eliminação de Gauss na matriz identidade $I \in \mathcal{M}at_{n\times n}$,*
3. *A pode ser transformada por eliminação de Gauss numa matriz triângular superior com todas as entradas na diagonal principal diferentes de zero.*

Cálculo da Matriz Inversa por Eliminação de Gauss

Input: $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times n}$,

$$[\,A\,|\,I\,] \xrightarrow{\text{Elim. Gauss}} [\,I\,|\,B\,] \qquad (I \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times n})\ .$$

Output: $B \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times n}$.

$$A^{-1} = B$$

Resolução de Sistemas através da Matriz Inversa

Proposição

Dadas matrizes $A \in \mathcal{M}at_{n\times n}$ *e* $B \in \mathcal{M}at_{n\times 1}$, *se* A *é uma matriz invertível então o sistema* $AX = B$ *é possível e determinado, sendo a solução do sistema* $X = A^{-1}B$.

Exemplo

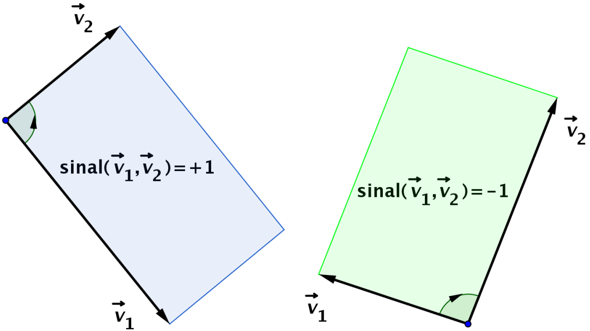
$$\begin{cases} 2x + z &= 1 \\ x + y &= 1 \\ -y + z &= 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= -2 \\ y &= 3 \\ z &= 5 \end{cases}$$

Área Orientada dum Paralelogramo

Dados vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ define-se $\text{sinal}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ como o sentido do ângulo orientado de $\vec{v}_1$ para $\vec{v}_2$.

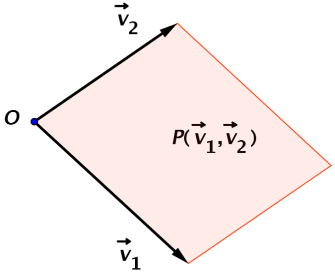


Convenciona-se que $\text{sinal}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$ quando os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ forem colineares.

Área Orientada dum Paralelogramo

Dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ seja

$$P(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \{\, O + t_1\, \vec{v}_1 + t_2\, \vec{v}_2 \;:\; t_1, t_2 \in [0,1] \,\}$$



Chama-se **área orientada** do paralelogramo $P(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ao número

$$A(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \text{sinal}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \times (\, \text{área de } P(\vec{v}_1, \vec{v}_2)\,)\ .$$

Propriedades da Função $A(\vec{v_1}, \vec{v_2})$

1. $A(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -A(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$,
2. $A(\lambda\, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \lambda\, A(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$,
3. $A(\vec{v}_1, \lambda\, \vec{v}_2) = \lambda\, A(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$,
4. $A(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são colineares,
5. $A(\vec{v}_1 + \lambda\, \vec{v}_2, \vec{v}_2) = A(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$,
6. $A(\vec{v}_1, \vec{v}_2 + \lambda\, \vec{v}_1) = A(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$,
7. $A(\vec{v}_1, \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = A(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + A(\vec{v}_1, \vec{v}_3)$,
8. $A(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_3) = A(\vec{v}_1, \vec{v}_3) + A(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Fórmula Explícita para $A(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ as linhas da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{2\times 2}$.
Escrevendo $\vec{e}_1 = (1,0)$ e $\vec{e}_2 = (0,1)$ temos
$\vec{v}_1 = a_{1,1}\,\vec{e}_1 + a_{1,2}\,\vec{e}_2$ e $\vec{v}_2 = a_{2,1}\,\vec{e}_1 + a_{2,2}\,\vec{e}_2$ pelo que

$$\begin{aligned}
A(\vec{v}_1, \vec{v}_2) &= A\left(a_{1,1}\,\vec{e}_1 + a_{1,2}\,\vec{e}_2\, ,\ a_{2,1}\,\vec{e}_1 + a_{2,2}\,\vec{e}_2 \right) \\
&= \ a_{1,1}\,a_{2,1}\underbrace{A\left(\vec{e}_1, \vec{e}_1\right)}_{=0} + a_{1,1}\,a_{2,2}\underbrace{A\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right)}_{=1} \\
&\quad + a_{1,2}\,a_{2,1}\underbrace{A\left(\vec{e}_2, \vec{e}_1\right)}_{=-1} + a_{1,2}\,a_{2,2}\underbrace{A\left(\vec{e}_2, \vec{e}_2\right)}_{=0} \\
&= a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,1}\ .
\end{aligned}$$

Determinante duma Matriz 2×2.

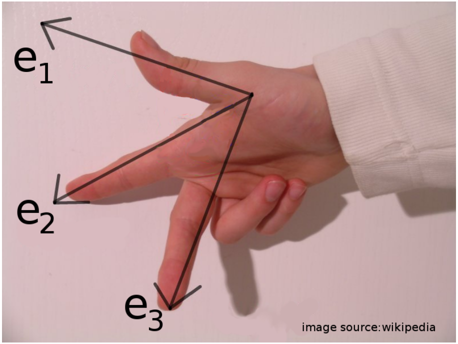
Chama-se **determinante** duma matriz
$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{2\times 2}$ ao número

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1} \; .$$

Logo, o determinante de A dá-nos área orientada do paralelogramo definido pelas duas linhas de A.

Orientação dum Sistema de três vectores em $\mathbb{R}^3$

Dados vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ dizemos que $\text{sinal}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 0$ se os vectores forem complanares, dizemos que $\text{sinal}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 1$ se for possivel com a mão direita alinhar o polegar com o primeiro, o indicador com o segundo e o dedo médio com o terceiro.



Caso contrário é possível fazer o mesmo com a mão esquerda e dizemos que $\text{sinal}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = -1$.

Orientação dum Sistema de três vectores em $\mathbb{R}^3$

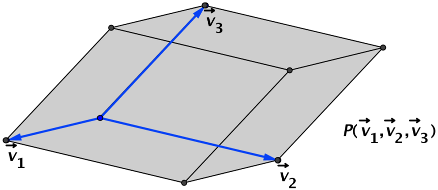
A ordem dos vectores é crucial. A troca de dois vectores implica a troca do respectivo sinal.

$$\begin{aligned}
\text{sinal}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) &= -\text{sinal}(\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3) \\
&= -\text{sinal}(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1) \\
&= -\text{sinal}(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2)
\end{aligned}$$

Volume Orientado dum Paralelipípedo

Dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ seja

$$P(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \{\, O + t_1\, \vec{v}_1 + t_2\, \vec{v}_2 + t_3\, \vec{v}_3 \ :\ t_1, t_2, t_3 \in [0,1] \,\}$$



Chama-se **volume orientado** do paralelipípedo $P(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ ao número

$$V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \text{sinal}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \times (\,\text{volume de } P(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\,)\,.$$

Propriedades da Função $V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

O volume orientado dum paralelipípedo satisfaz as propriedades:

1. $V(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$,
2. $V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = -V(\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3) = -V(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1)$,
3. $V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são complanares,
4. $V(\lambda\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \lambda\, V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$,
5. $V(\vec{v}_1 + \lambda\, \vec{v}_2 + \mu\, \vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$,
6. $V(\vec{v}_1 + \vec{u}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) + V(\vec{u}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

As propriedades 4,5 e 6 de V no 1º argumento valem igualmente para o 2º e 3º argumentos.

Aplicação das Propriedades

$$
\begin{aligned}
&V(2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{v}_3) \\
&= V(2\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{v}_3) + V(3\vec{v}_2, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{v}_3) \\
&= 2V(\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{v}_3) + 3V(\vec{v}_2, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{v}_3) \\
&= 2(V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) - V(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_3)) + 3(V(\vec{v}_2, \vec{v}_2, \vec{v}_3) - V(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_3)) \\
&= 2V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) - 2V(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_3) + 3V(\vec{v}_2, \vec{v}_2, \vec{v}_3) - 3V(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_3) \\
&= 2V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) - 2\underbrace{V(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_3)}_{=0} + 3\underbrace{V(\vec{v}_2, \vec{v}_2, \vec{v}_3)}_{=0} - 3\underbrace{V(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_3)}_{=0} \\
&= 2V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)
\end{aligned}
$$

Fórmula Explícita para $V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

Sejam $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ as linhas da matriz
$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{3\times 3}$. Temos

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= a_{1,1}\,\vec{e}_1 + a_{1,2}\,\vec{e}_2 + a_{1,3}\,\vec{e}_3 \\ \vec{v}_2 &= a_{2,1}\,\vec{e}_1 + a_{2,2}\,\vec{e}_2 + a_{2,3}\,\vec{e}_3 \\ \vec{v}_3 &= a_{3,1}\,\vec{e}_1 + a_{3,2}\,\vec{e}_2 + a_{3,3}\,\vec{e}_3 \end{aligned}$$

pelo que desenvolvendo $V(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_3)$ por aplicação das propriedades 4 e 6 obtemos $27 = 3 \times 3 \times 3$ parcelas da forma

$$a_{1,i}\, a_{2,j}\, a_{3,k}\, V(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k).$$

Mas estas parcelas anulam-se sempre que os índices i, j, k não sejam todos distintos.

Fórmula Explícita para $V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

Logo, a soma reduz-se a seis parcelas correspondentes às $6 = 3!$ permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$.

$$\begin{aligned}
V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = {} & a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, \underbrace{V(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}_{=1} + a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2}\, \underbrace{V(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2)}_{=-1} \\
& + a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3}\, \underbrace{V(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)}_{=-1} + a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,1}\, \underbrace{V(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)}_{=1} \\
& + a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2}\, \underbrace{V(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)}_{=1} + a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1}\, \underbrace{V(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1)}_{=-1} \\
= {} & a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{1,2}\, a_{1,3}\, a_{1,1} + a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2} \\
& - a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3} - a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1}
\end{aligned}$$

Determinante duma Matriz 3×3.

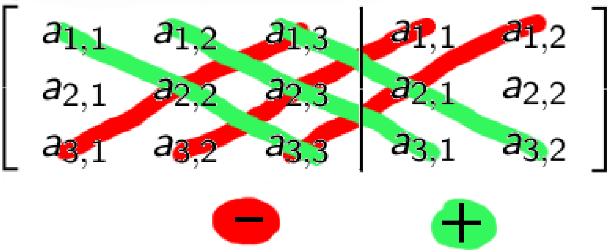
Chama-se **determinante** duma matriz
$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}at_{3\times 3}$ ao número

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} &= \\ &= a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,1} + a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2} \\ &\quad - a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3} - a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1} \end{aligned}$$

O determinante de A é o volume orientado do paralelipípedo definido pelas três linhas de A.

Regra de Sarrus (Determinantes 3×3) .

Repetindo as duas primeiras colunas da matriz após a terceira, o determinante é igual à soma dos produtos das entradas nas diagonais verdes menos a soma dos produtos das entradas nas diagonais encarnadas.



Existência da função Determinante para Matrizes $n \times n$

Vamos identificar $\mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times n}$ com $(\mathbb{R}^n)^n$.

Proposição

Existe uma única função $V : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $V(I) = V(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1.$ *Para* $i \neq j$
2. $V(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots \vec{v}_n) = -V(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots \vec{v}_n).$
3. $V(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = 0 \Leftrightarrow$ *algum dos vectores* $\vec{v}_i$ *se puder escrever como combinação linear dos restantes.*
4. $V(\lambda \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \lambda V(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n).$
5. $V(\vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n, \dots, \vec{v}_2, \vec{v}_n) = V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n).$
6. $V(\vec{v}_1 + \vec{u}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) + V(\vec{u}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n).$

As propriedades 4,5 e 6 de V no 1º argumento valem igualmente para os restantes argumentos i.e., linhas da matriz argumento.

Notação da função Determinante

A única função nas condições da proposição anterior diz-se a função **determinante**. Os seus argumentos são representados como linhas duma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times n}$$

Em vez de $V(A)$ usa-se a notação

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} .$$

Uma Fórmula Explícita

Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma_1}\, a_{2,\sigma_2} \cdots a_{n,\sigma_n}\ ,$$

onde S_n é o conjunto das permutações $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, e $\operatorname{sgn}(\sigma)$, **o sinal da permutação** σ, é igual a ± 1 consoante o número de transposições necessárias para reordenar as entradas de σ é par ou ímpar.

Cálculo de Determinantes por Eliminação de Gauss

Valem as seguintes regras:

(R1) Se $A \xrightarrow{L_i'=L_j, L_j'=L_i} B$ então $|A| = -|B|$. Numa troca de duas linhas o determinante vem multiplicado por -1.

(R2) Se $A \xrightarrow{L_i'=\lambda L_i} B$ então $|A| = \frac{1}{\lambda}|B|$. Se multiplicarmos uma linha por um escalar $\lambda \neq 0$ o determinante vem multiplicado pelo mesmo factor λ,

(R3) Se $A \xrightarrow{L_i'=L_i+\lambda L_j} B$ então $|A| = |B|$. Se a uma linha adicionarmos qualquer múltiplo de outra linha o determinante não se altera.

(R4) O determinante duma matriz diagonal é igual ao produto das entradas na diagonal principal.

Um Exemplo

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\,(3 \times 2 \times 1) = -12$$

As operações efectuadas foram respectivamente
(1) $L_2' = L_1, L_1' = L_2$, (2) $L_1' = \frac{1}{2} L_1$, (3) $L_3' = L_3 - L_1$,
(4) $L_3' = L_3 - L_2$, (5) $L_1' = L_1 - L_3$.

▷ ver exemplo

Determinante duma Matriz Triângular Superior

O determinante duma matriz triângular superior é igual ao produto das entradas na diagonal principal.

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = a_{1,1}\, a_{2,2} \cdots a_{n,n}$$

Havendo alguma linha nula o determinante é igual a zero.Caso contrário, usando apenas a regra (R4) da Eliminação de Gauss podemos transformar a matriz triângular superior numa matriz diagonal com a mesma diagonal principal.

Mais Propriedades do Determinante

Proposição

Dadas matrizes $A, B \in \mathcal{M}at_{n\times n}$

1. $\det(I) = 1$,
2. $\det(A\,B) = \det(A)\,\det(B)$,
3. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, *se* A *for invertível,*
4. $\det(A^T) = \det(A)$.

Uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}at_{n\times n}$ diz-se **singular** se $\det(A) = 0$. Caso contrário diz-se **não singular** .

Proposição

Dada uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}at_{n\times n}$ *, são equivalentes as afirmações:*

1. *A é invertível,*
2. *A é não singular, i.e.,* $\det(A) \neq 0$*,*
3. *A tem característica* $r(A) = n$*,*
4. *O sistema de n equações em n incógnitas* $AX = B$ *é possível e determinado, qualquer que seja a matriz* $B \in \mathcal{M}at_{n\times 1}$.

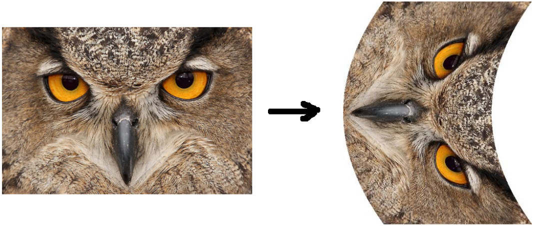
Transformações $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Chama-se **transformação** a qualquer aplicação $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, definida por

$$T(x_1,\ldots,x_n) = (\, T_1(x_1,\ldots,x_n),\ \ldots,\ T_m(x_1,\ldots,x_n)\,)$$

à custa de m funções $T_1:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, ..., $T_m:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, que se dizem as **componentes** de T.

Por exemplo $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\qquad T(x,y) = (y, -x-y^2)$



Transformações Lineares

Uma transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diz-se **linear** se quaisquer que sejam $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $T(\lambda\, \vec{v}) = \lambda\, T(\vec{v})$,
2. $T(\vec{v} + \vec{u}) = T(\vec{v}) + T(\vec{u})$,

1. $T(\vec{0}) = \vec{0}$,
2. $T(P + \lambda\, \vec{v}) = T(P) + \lambda\, T(\vec{v})$. Em particular T transforma rectas em rectas.

▷ Ver applet

Transformações Lineares definidas por Matrizes

Identificando $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times 1}, \quad (x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

dada uma matriz $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{m\times n}$, define-se

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{por} \quad T_A(X) = AX.$$

Proposição

Para cada matriz $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{m\times n}$, $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear.

Exemplo

A transformação

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (3\,x + y - z, y + 2\,z, -x + 3\,y)$$

representada por

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

é uma transformação linear.

Proposição

Dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existe uma única matriz $A \in \mathcal{M}at_{m\times n}$ tal que $T = T_A$.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, a coluna i da matriz A é o vector $T(\vec{e}_i)$ onde $\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{posição } i}, 0, \ldots, 1)$.

▷ Ver applet

Soma e Produto por um Escalar de Transformações Lineares

Proposição

Dadas transformações lineares $T, S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e um escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$, *as transformações soma e o produto definidas por*

1. $T + S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad (T + S)(\vec{v}) = T(\vec{v}) + S(\vec{v}),$
2. $\lambda T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad (\lambda T)(\vec{v}) = \lambda T(\vec{v}),$

são transformações lineares.

Composição de Transformações Lineares

Proposição

1. *A aplicação identidade* $id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é linear,*
2. *Dadas transformações lineares* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *a composição* $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $(S \circ T)(\vec{v}) = S(T(\vec{v}))$ *é uma transformação linear,*
3. *Dada uma transformação linear bijectiva* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *a aplicação inversa* $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é uma transformação linear.*

Operações sobre Matrizes *versus* Operações sobre Transformações Lineares

Proposição

1. $T_{\lambda A} = \lambda\, T_A$,
2. $T_{A+B} = T_A + T_B$, $\;$ *se* $A, B \in \mathcal{M}at_{n\times m}$,
3. $T_I = id_{\mathbb{R}^n}$, $\;$ *se* $I \in \mathcal{M}at_{n\times n}$,
4. $T_{AB} = T_A \circ T_B$, $\;$ *se* $A \in \mathcal{M}at_{n\times m}$ *e* $B \in \mathcal{M}at_{m\times k}$,
5. *se* A *é invertível então* T_A *é bijectiva e* $\;T_{A^{-1}} = (T_A)^{-1}$.

Transformações Lineares e Determinantes

Seja $A \in \mathcal{M}at_{n\times n}$ numa das dimensões $n = 2$ ou $n = 3$.
Se $det(A) > 0$

$$\text{sinal}\,(\; T_A(\vec{v}_1),\; \ldots,\; T_A(\vec{v}_n)\,) = \text{sinal}\,(\; \vec{v}_1,\; \ldots,\; \vec{v}_n\,)$$

e dizemos que a transformação T_A **preserva a orientação**.
Se $det(A) < 0$

$$\text{sinal}\,(\; T_A(\vec{v}_1),\; \ldots,\; T_A(\vec{v}_n)\,) = -\text{sinal}\,(\; \vec{v}_1,\; \ldots,\; \vec{v}_n\,)$$

e dizemos que a transformação T_A **inverte a orientação**.

Dado uma região $S \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\text{Volume}\, T_A(S) = |\det(A)|\ \text{Volume}(S)$$

e dizemos que $|\det(A)|$ é o **coeficiente de dilatação volúmica** da transformação T_A.

▷ Ver applet

Reflexões em torno dum eixo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, então $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma reflexão em torno do eixos dos xx.

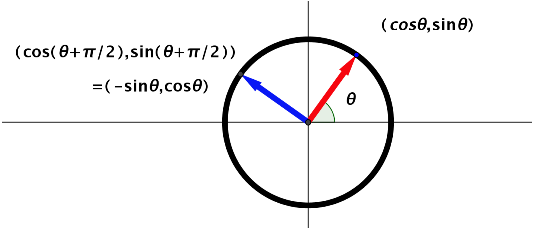
Se $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $T_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma reflexão em torno do eixos dos yy.

Se $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, então $T_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma reflexão em torno do eixo $y = x$.

▷ Ver applet

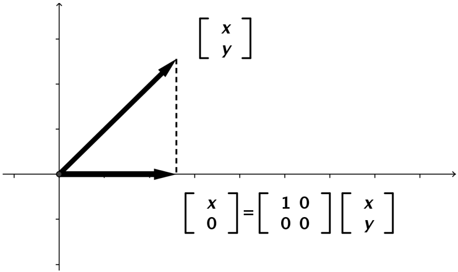
Rotações

Se $\quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, então a transformação $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma rotação de ângulo θ no sentido directo (contrário ao dos ponteiros do relógio).



Projecções sobre os eixos

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, então $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a projecção ortogonal sobre o eixo dos xx.

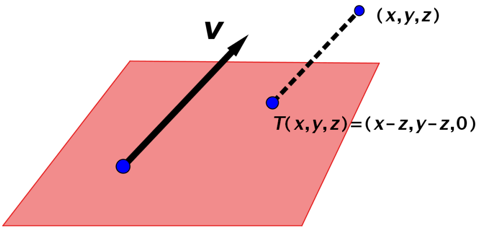


Se $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $T_B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a projecção ortogonal sobre o eixo dos yy.

Projecção sobre um Plano

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ então $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T_A(x, y, z) = (x - z, y - z)$ é a projecção de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}^2$, identificado com o plano $z = 0$, paralela ao vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

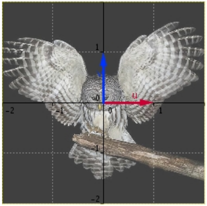


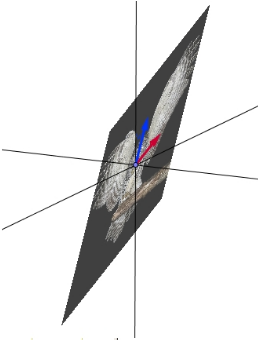
Note que o vector que liga (x, y, z) a $(x - z, y - z, 0)$ é $\underbrace{(x - z, y - z, 0)}_{=T_A(x,y,z)} - (x, y, z) = -z\,\vec{v}$.

Parametrização dum Plano em $\mathbb{R}^3$

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$ e $\vec{v}_2 = (2, -1, 0)$.

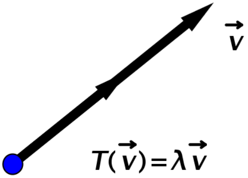
Então $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $T_A(x, y) = (x + 2\,y, -y, 2\,x) = x\,\vec{v}_1 + y\,\vec{v}_2$ é uma parametrização do plano que passa pela origem $O = (0, 0, 0)$ e é paralelo aos dois vectores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.





Vectores Próprios

Dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, um vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ diz-se um **vector próprio** se for não nulo e colinear com a sua imagem $T(\vec{v})$, i.e., se $\vec{v} \neq 0$ e existir um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(\vec{v}) = \lambda \, \vec{v}$.



Se $T = T_A$ for definida por uma matriz $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times n}$, diremos igualmente $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ é um vector próprio de A.

▷ Ver applet

Valores Próprios

Dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ diz-se um **valor próprio** se existir um vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ tal que $T(\vec{v}) = \lambda\,\vec{v}$.

Proposição

Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}at_{n\times n}$*, um escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *é um valor próprio de* $T_A(X) = A\,X \quad \Leftrightarrow \; \det(A - \lambda\, I) = 0$.

São equivalentes :

- *Para algum* $X \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad A\,X = \lambda\,X$,
- *O sistema* $(A - \lambda\, I)\,X = 0$ *é (possível) indeterminado,*
- $\det(A - \lambda\, I) = 0$.

Valores Próprios

Seja $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times n}$.

Proposição

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I)$ é um polinómio de grau n, que se diz o polinómio característico da matriz A. Os valores próprios são as raízes (zeros) de $p_A(\lambda)$.

Corolário

Toda a matriz $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{n\times n}$ tem no máximo n valores próprios.

Proposição

Se $\lambda = \alpha$ é uma raíz do polinómio característico $p_A(\lambda)$, então as soluções não nulas do sistema $(A - \alpha\, I)\, X = 0$ são os vectores próprios de A associados a α.

O conjunto de todos os valores próprios de A diz-se o **espectro** da matriz A.

Cálculo dos Valores Próprios (Exemplo 2×2)

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
0 = \det(A - \lambda\, I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda) + 2 \\
= \lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = (\lambda - 1)\,(\lambda - 2)
\end{aligned}
$$

Os valores próprios de A são $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$.

Cálculo dos Vectores Próprios (Exemplo 2×2)

Para $\lambda = 1$ temos

$$(A - I)\,X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$2\,x_1 + x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2\,x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 2$ temos

$$(A - 2\,I)\,X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

▷ Ver applet

Cálculo dos Valores Próprios (Exemplo 3×3)

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1-\lambda & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & -1-\lambda & -2-2\lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda^2-\lambda+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & -1-\lambda & -2-2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-3\lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Logo, os valores próprios de A são $\lambda = -1$, $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$.

Cálculo dos Vectores Próprios (Exemplo 3×3)

Para $\lambda = -1$ temos

$$(A+I)\,X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo dos Vectores Próprios (Exemplo 3×3)

Para $\lambda = 1$ temos

$$(A - I)\,X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & 0 \\ x_2 + 2\,x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -2\,x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sistemas Dinâmicos

Chama-se **Sistema Dinâmico** a uma aplicação $T : X \to X$ onde

- X representa o conjunto dos estados do sistema,
- T representa a lei de evolução: ao estado $x \in X$ segue sempre o estado $x' = T(x) \in X$.

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ modela o tempo num sistema dinâmico.

Qualquer sucessão de estados $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X que satifaça a relação recursiva

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

diz-se uma **órbita** do sistema. As órbitas do sistema dinâmico T são as sequências possíveis de estados do sistema.

Órbitas dum Sistema

Fixado o estado inicial $p_0 \in X$ do sistema existe uma única órbita $(x_n)_n$ do sistema tal que $x_0 = p_0$.

Esta única órbita é $x_n = T^n(p_0)$, para $n \in \mathbb{N}$, onde as potências de T se definem por

$$T^0 = \mathrm{id}_X \quad \text{e} \quad T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n \text{ vezes}} .$$

Pretende-se compreender, antecipar, o comportamento assintótico (quando $n \to +\infty$) das órbitas $x_n = T^n(p_0)$ do sistema conhecido o seu estado inicial $x_0 = p_0$.

Sistemas Dinâmicos Lineares

Chama-se **Sistema Dinâmico Linear** a uma transformação linear $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$.

1. os estados do sistema são vectores $X \in \mathbb{R}^k$,
2. a lei de evolução é descrita por uma matriz $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{k\times k}$,

$$X_{n+1} = A\,X_n.$$

Crescimento Populacional: Modelo de Leslie

Divide-se a população em k classes etárias distintas e mede-se o tempo $n = 0, 1, 2, \ldots$ em estações reprodutivas.

O estado do sistema é representado por um vector populacional $X = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ em que a componente x_i mede o número de indivíduos na classe etária i.

O modelo de Leslie é um sistema dinâmico linear

$$X_{n+1} = A\, X_n$$

A lei de evolução da população é descrita por uma matriz $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{k\times k}$ que se diz **Matriz de Leslie**.

Modelos Genéticos

Considere-se uma população de seres vivos com dois genes alelos: **A** dominante e **B** recessivo para determinada característica.

O estado da população (sistema) é descrito por um vector $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ e $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, cujas componentes representam as frequências dos três genótipos **AA** , **AB** e **BB** na referida população.

Num programa de selecção artificial, a descendência de cada geração é cruzada com índividuos genótipicamente idênticos **BB**. As leis de Mendel permitem-nos derivar uma lei de evolução

$$X_{n+1} = M\,X_n \quad (M \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{3\times 3})$$

para as frequências $X_n \in \mathbb{R}^3$ dos vários genótipos na população ao longo de gerações sucessivas $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Potências duma Matriz

Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}at_{n\times n}$ e um número natural $n \in \mathbb{N}$ define-se

$$\begin{aligned} A^0 &= I \\ A^n &= \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ vezes}} \\ A^{-n} &= (A^{-1})^n \qquad \text{se } A \text{ for invertível .} \end{aligned}$$

Proposição

Com esta definição, dada $A \in \mathcal{M}at_{n\times n}$,

$$A^{n+m} = A^n A^m$$

quaisquer que sejam $n, m \in \mathbb{N}$ em geral, e quaisquer que sejam $n, m \in \mathbb{Z}$ se A for invertível.

Órbitas dum Sistema Dinâmico Linear

Seja $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ um sistema dinâmico linear definido por uma matriz $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{k\times k}$, $T(X) = A\,X$.

A órbita de T com estado inicial $p \in \mathbb{R}^k$ é $X_n = A^n\,p$.

Se p for um vector próprio de A com $A\,p = \lambda\,p$, então p é também um vector próprio de A^n com $A^n\,p = \lambda^n\,p$.

▷ Ver applet

Órbita duma combinação linear de vectores próprios

Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ os seus vectores próprios, $A\, v_1 = v_1$ e $A\, v_2 = 2\, v_2$.

Temos $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2\, v_1 + 3\, v_2$

Logo

$$
\begin{aligned}
A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= A^n \, (-2\, v_1 + 3\, v_2) = -2\, A^n\, v_1 + 3\, A^n\, v_2 \\
&= -2\, v_1 + 3 \cdot 2^n\, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 \\ 4 - 3 \cdot 2^n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Cálculo duma Potência

Questão *Como calcular a potência* A^n *(n grande) duma matriz* $A \in \mathcal{M}at_{k \times k}$ *sem ter de realizar* $n-1$ *produtos de matrizes ?*

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A$$

$$\vdots$$

$$A^n = A^{n-1} \cdot A$$

Potências duma Matriz Diagonal

O produto de matrizes diagonais é comutativo

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \mu_k \end{bmatrix}$$

Em particular $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{bmatrix}.$

Uma matriz $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{k\times k}$ diz-se **diagonalizável** se existirem duas matrizes $D, P \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{k\times k}$, D diagonal e P invertível tais que

$$P^{-1}\,A\,P = D.$$

Proposição
Dadas matrizes $A, D, P \in \mathcal{M}\mathrm{at}_{k\times k}$, D diagonal e P invertível tais que $P^{-1}\,A\,P = D$ então para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = P\,D^n\,P^{-1}.$$

Diagonalização de Matrizes

Seja $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}$, cujas colunas são $\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_k e_k$.

Sejam $p_1, \ldots, p_k$ as colunas de P.

$$P^{-1} A P = D \quad \Leftrightarrow \quad A P = P D \quad \Leftrightarrow \text{ para cada } i = 1, \ldots, k,$$
$$A p_i = P(\lambda_i e_i) = \lambda_i (P e_i) = \lambda_i p_i.$$

As colunas de P são vectores próprios de A associados a valores próprios λ_i que coincidem com as entradas diagonais da matriz D.

Critério de Diagonalização

Teorema

Uma matriz $A \in \mathcal{M}at_{k\times k}$ é diagonalizável $\Leftrightarrow$ *A admitir k vectores próprios tais que a matriz $P \in \mathcal{M}at_{k\times k}$ com essas k colunas seja não singular.*

Além disso, se

1. $A\,p_i = \lambda_i\,p_i$ *é um vector próprio para* $i = 1, \ldots, k$,
2. $P = [p_1|\cdots|p_k]$ *for uma matriz invertível que tem por colunas os vectores próprios* p_i,
3. $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}$ *for a matriz diagonal com os valores próprios correspondentes*

então

$$P^{-1}\,A\,P = D \quad .$$

Critério de Diagonalização

Corolário

Toda a matriz $A \in \mathcal{M}at_{k\times k}$ *com* k *valores próprios (reais) e distintos é diagonalizável.*

Exemplo

Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ os seus vectores próprios, $A\,v_1 = v_1$ e $A\,v_2 = 2\,v_2$.

Então A é diagonalizável e $P^{-1}\,A\,P = D$ com

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculemos a inversa de P

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2' = L_2 + 2\,L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1' = L_1 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$ Logo $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo

Da proposição entrior segue que

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^{100} &= A^{100} = P\,D^{100}\,P^{-1} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^{101}-1 & 2^{100}-1 \\ 2-2^{101} & 2-2^{100} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

O Modelo de Leslie

Patrick Leslie (1945) *"The use of matrices in certain population mathematics"*. Biometrika, 33(3), 183-212.

O modelo proposto por Leslie é um sistema dinâmico linear que modela a evolução temporal duma população dividida em classes etárias.

- A reprodução ocorre em estações anuais bem definidas.
- Um censo à população é realizado após cada estação reprodutiva, onde o número de fêmeas por classe etária é registado.

O Modelo de Leslie

Seja $k \in \mathbb{N}$ o número de classes etárias.

As classes etárias são numeradas $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

A variável $t = 0, 1, 2, \ldots$ representa o tempo em anos.

$N_i(t) =$ número de fêmeas na classe etária i no ano t.

$N(t) = \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ \vdots \\ N_{k-1}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k$ diz-se o **vector populacional** no tempo t.

Leis de Evolução do Modelo

Recém-Nascidas numa estação reprodutiva

$$N_0(t+1) = f_0\, N_0(t) + f_1\, N_1(t) + \ldots + f_{k-1}\, N_{k-1}(t)$$

$f_i =$ número médio de crias de fêmeas por fêmea
na classe etária i.

Sobreviventes da estação reprodutiva anterior

$$N_{i+1}(t+1) = s_i\, N_i(t) \qquad (0 \leq s_i \leq 1)$$

$s_i =$ proporção de fêmeas da classe etária i que
sobrevive até ao ano seguinte.

Leis de Evolução do Modelo

$$\left\{\begin{array}{rcl} N_0(t+1) & = & f_0\, N_0(t) + f_1\, N_1(t) + \ldots + f_{k-1}\, N_{k-1}(t) \\ N_1(t+1) & = & s_0\, N_0(t) \\ N_2(t+1) & = & s_1\, N_1(t) \\ \ldots & & \\ N_{k-1}(t+1) & = & s_{k-2}\, N_{k-2}(t) \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ \ldots \\ N_{k-1}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{k-2} & f_{k-1} \\ s_0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & \cdots & s_{k-2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \\ \ldots \\ N_{k-1}(t) \end{bmatrix}$$

Lei de Evolução do Modelo

A evolução do vector populacional satisfaz

$$N(t+1) = A\,N(t)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{k-2} & f_{k-1} \\ s_0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & \cdots & s_{k-2} & 0 \end{bmatrix}$$

é chamada a **matriz de Leslie**.

Dado o vector populacional inicial $N(0)$,

$$N(t) = A^t\,N(0)$$

Distribuições de Idades Estáveis

Um vector $V \in \mathbb{R}_+^k$ diz-se **uma distribuição de idades estável** se existir $\lambda > 0$ tal que

1. a órbita $N(t) = A^t\, V$ satisfaz $\frac{N_i(t)}{N_i(t-1)} = \lambda$ para todo $t \in \mathbb{N}$,
2. para qualquer outro vector inicial $N(0)$ a órbita $N(t) = A^t\, N(0)$ satisfaz $\lim_{t \to +\infty} \frac{N_i(t)}{N_i(t-1)} = \lambda$.

A propriedade 1. é equivalente a V ser um vector próprio de A, i.e., $A\, V = \lambda\, V$.

Vector Próprio Dominante

$V \in \mathbb{R}^k_+$ diz-se **um vector próprio dominante** da matriz A se existir $\lambda > 0$ tal que $A\,V = \lambda\,V$ e todos os restantes valores próprios de A tiverem valores absolutos $< \lambda$.

Proposição
Se $V \in \mathbb{R}^k_+$ for um vector próprio dominante da matriz A então V é distribuição de idades estável.

Vector Próprio Dominante

Suponha que $A\,V_1 = \lambda_1\,V_1$ e $A\,V_2 = \lambda_2\,V_2$ são vectores próprios de A com valores próprios λ_1, λ_2 tais que $|\lambda_2| < \lambda_1$.

Se $N(0) = c_1\,V_1 + c_2\,V_2$ então

$$\begin{aligned} N(t) &= A^t\,N(0) = c_1\,A^t\,V_1 + c_2\,A^t\,V_2 \\ &= \mathbf{c_1}\,(\lambda_1)^{\mathbf{t}}\,\mathbf{V_1} + \mathbf{c_2}\,(\lambda_2)^{\mathbf{t}}\,\mathbf{V_2} \end{aligned}$$

onde a segunda parcela (amarela) é desprezável se comparada com primeira (vermelho), quando $t \to +\infty$. Em particular, a direcção do vector populacional $N(t)$ aproxima-se da direcção do vector próprio V_1 para t grande.

Vector Próprio Dominante

$V_{1,i}$ componente i do vector V_1
$V_{2,i}$ componente i do vector V_2

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_i(t)}{N_i(t-1)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{c_1\,(\lambda_1)^t\, V_{1,i} + c_2\,(\lambda_2)^t\, V_{2,i}}{c_1\,(\lambda_1)^{t-1}\, V_{1,i} + c_2\,(\lambda_2)^{t-1}\, V_{2,i}}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\mathbf{c_1}\,\lambda_1\,\mathbf{V_{1,i}} + \mathbf{c_2}\,\lambda_2\,(\lambda_2/\lambda_1)^{\mathbf{t-1}}\,\mathbf{V_{2,i}}}{\mathbf{c_1}\,\mathbf{V_{1,i}} + \mathbf{c_2}\,(\lambda_2/\lambda_1)^{\mathbf{t-1}}}$$

$$= \frac{c_1\,\lambda_1\,V_{1,i}}{c_1\,V_{1,i}} = \lambda_1$$

A indeterminação é levantada dividindo numerador e denominador por $(\lambda_1)^{t-1}$. Os termos "amarelos" convergem para zero.

Teorema

Se uma matriz de Leslie A satisfizer

- $s_i > 0$ *para todo* $i = 0, 1, \ldots, k-1$, *e*
- $f_i > 0$ *para* $i = 1, 2, \ldots, k-1$,

então A admite um vector próprio dominante que em particular é uma distribuição de idades estável.

Exemplo dum Modelo de Leslie

Considere a matriz de Leslie $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

Os valores próprios de A são $\lambda = -1$ e $\lambda = 2$.

Cálculo dos Vectores Próprios

Para $\lambda = -1$ temos

$$(A + I)\,X = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 + 2\,x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\,x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 2$ temos

$$(A - 2\,I)\,X = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1/2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$-x_1 + 4\,x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

▷ Ver applet

Cálculo duma órbita

Exercício

Calcule explicitamente $N(t)$ para o vector inicial $N(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A matriz de Leslie $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ tem vectores próprios

$v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A\, v_1 = 2\, v_1$ e $A\, v_2 = -v_2$.

Temos $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\, v_1 + \frac{1}{2}\, v_2$

Cálculo duma órbita

Logo

$$N(t) = A^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A^t \left(\frac{1}{2}\, v_1 + \frac{1}{2}\, v_2 \right) = \frac{1}{2}\, A^t\, v_1 + \frac{1}{2}\, A^t\, v_2$$

$$= \frac{2^t\, v_1}{2} + \frac{(-1)^t\, v_2}{2} = \begin{bmatrix} 2^{t+1} + (-1)^{t+1} \\ 2^{t-1} + (-1)^t/2 \end{bmatrix}$$

Em particular

$$N_0(t) = 2^{t+1} + (-1)^{t+1}$$

$$N_1(t) = 2^{t-1} + (-1)^t/2$$

▷ Ver applet

$V = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio dominante de A.

Logo V é uma distribuição de idades estável.

Modelo Genético

Considere-se uma população de seres vivos com dois genes alelos: **A** dominante e **B** recessivo para determinada característica.

O estado da população (sistema) é descrito por um vector $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_3 \geq 0$ e $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, cujas componentes representam as frequências dos três genótipos **AA** , **AB** e **BB** na referida população.

Problema
Num programa de selecção artificial, a descendência de cada geração é cruzada com índividuos genotipicamente idênticos **AB**. *Ao fim de muitas gerações qual é a distribuição das frequências? Esta distribuição limite depende da distribuição inicial?*

Das leis de Mendel tiramos as tabelas de frequências de genótipos para as descendências nos cruzamentos seguintes

AB AA

AA	AB	BB
1/2	1/2	0

AB AB

AA	AB	BB
1/4	1/2	1/4

AB BB

AA	AB	BB
0	1/2	1/2

Modelo Genético

Considere-se uma população de seres vivos com dois genes alelos: **A** dominante e **B** recessivo para determinada característica.

O estado da população (sistema) é descrito por um vector $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_3 \geq 0$ e $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, cujas componentes representam as frequências dos três genótipos **AA** , **AB** e **BB** na referida população.

Problema Genético

Problema

Num programa de selecção artificial, a descendência de cada geração é cruzada com índividuos genotipicamente idênticos **AB**. *Ao fim de muitas gerações qual é a distribuição das frequências? Esta distribuição limite depende da distribuição inicial?*

Das leis de Mendel tiramos as tabelas de frequências de genótipos para as descendências nos cruzamentos seguintes

AB AA

AA	AB	BB
1/2	1/2	0

AB AB

AA	AB	BB
1/4	1/2	1/4

AB BB

AA	AB	BB
0	1/2	1/2

Frequências dos genótipos na geração t:

$$(p_1(t), p_2(t), p_3(t))$$

AB AA		
$p_1(t)$		
AA	**AB**	**BB**
$\frac{1}{2}\, p_1(t)$	$\frac{1}{2}\, p_1(t)$	0

AB AB		
$p_2(t)$		
AA	**AB**	**BB**
$\frac{1}{4}\, p_2(t)$	$\frac{1}{2}\, p_2(t)$	$\frac{1}{4}\, p_2(t)$

AB BB		
$p_3(t)$		
AA	**AB**	**BB**
0	$\frac{1}{2}\, p_3(t)$	$\frac{1}{2}\, p_3(t)$

AA	$\frac{1}{2}\, p_1(t) + \frac{1}{4}\, p_2(t)$
AB	$\frac{1}{2}\, p_1(t) + \frac{1}{2}\, p_2(t) + \frac{1}{2}\, p_3(t)$
BB	$\frac{1}{4}\, p_2(t) + \frac{1}{2}\, p_3(t)$

Frequências dos genótipos na geração $t + 1$:

$$(p_1(t+1), p_2(t+1), p_3(t+1))$$

Sistema Dinâmico Linear

Seja $P(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ a distribuição de frequências de genótipos na geração t.

$$\left\{\begin{array}{ll} p_1(t+1) & = \frac{1}{2}\,p_1(t) + \frac{1}{4}\,p_2(t) \\ p_2(t+1) & = \frac{1}{2}\,p_1(t) + \frac{1}{2}\,p_2(t) + \frac{1}{2}\,p_3(t) \\ p_3(t+1) & = \qquad\qquad\quad \frac{1}{4}\,p_2(t) + \frac{1}{2}\,p_3(t) \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$P(t+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} P(t)$$

$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$

Como

$$\begin{cases} p_1(t+1) & = \frac{1}{2}\, p_1(t) + \frac{1}{4}\, p_2(t) \\ p_2(t+1) & = \frac{1}{2}\, p_1(t) + \frac{1}{2}\, p_2(t) + \frac{1}{2}\, p_3(t) \\ p_3(t+1) & = \qquad\qquad\; \frac{1}{4}\, p_2(t) + \frac{1}{2}\, p_3(t) \end{cases}$$

se

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$$

então

$$p_1(t+1) + p_2(t+1) + p_3(t+1) = 1\ .$$

Logo, em cada geração $t \in \mathbb{N}$

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1\ .$$

Cálculo dos Valores Próprios

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1/2-\lambda & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2-\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1/2-\lambda)^3 - (1/2-\lambda)/4 = (1/2-\lambda)\,(\lambda^2-\lambda) \\ &= -\lambda\,(\lambda-1/2)\,(\lambda-1) \end{aligned}$$

Logo, os valores próprios de A são $\lambda = 0$, $\lambda = 1/2$ e $\lambda = 1$.

Cálculo dos Vectores Próprios

Para $\lambda = 1$ temos

$$(A - I)\,X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 + x_3 & = & 0 \\ -x_2 + 2\,x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ 2\,x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo dos Vectores Próprios

Para $\lambda = 1/2$ temos

$$(A - (1/2)I)\,X = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo dos Vectores Próprios

Para $\lambda = 0$ temos

$$A\,X = (A - 0\,I)\,X = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & 0 \\ x_2 + 2\,x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -2\,x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resposta ao Problema

Qualquer que seja a distribuição de frequências inicial $P(0)$

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = (1/4, 1/2, 1/4) \ .$$

Sejam $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ os vectores próprios da matriz A, respectivamente associados aos valores próprios $\lambda = 1$, $\lambda = 1/2$ e $\lambda = 0$.

Resposta ao Problema

O vector inicial $P(0)$ pode se secrever como combinação linear dos vectores próprios

$$P(0) = \alpha_1 \, v_1 + \alpha_2 \, v_2 + \alpha_3 \, v_3 \ .$$

Logo

$$\begin{aligned} P(t) &= A^t \, P(0) = A^t \, (\alpha_1 \, v_1 + \alpha_2 \, v_2 + \alpha_3 \, v_3) \\ &= \alpha_1 \, A^t \, v_1 + \alpha_2 \, A^t \, v_2 + \alpha_3 \, A^t \, v_3 \\ &= \alpha_1 \, v_1 + \alpha_2 \, (1/2)^t \, v_2 + 0 \, v_3 \\ &\text{converge para } \ \alpha_1 \, v_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 2\,\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \ \text{ quando } \ t \to +\infty \end{aligned}$$

Resposta ao Problema

Como $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$ para todo o tempo $t \in \mathbb{N}$, no limite tem-se forçosamente $\alpha_1 + 2\,\alpha_1 + \alpha_1 = 1$.

Logo $\alpha_1 = 1/4$ e

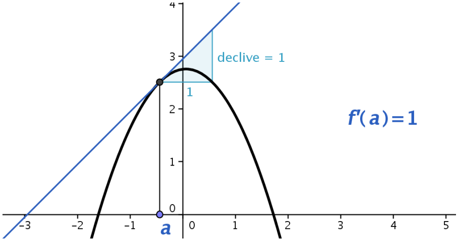
$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) .$$

Significado Geométrico da Derivada

Seja $f(x)$ uma função real de variável real, i.e., $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
A derivada duma função $f(x)$ num ponto $x = a \in D$, definida por

$$f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \,,$$

mede o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.



Derivadas e Movimento

Se a variável x representa o tempo e $y = f(x)$ representa a posição dum móvel no instante x, dizemos que $y = f(x)$ é uma **lei de movimento**.

A derivada $f'(a)$ mede a velocidade instantânea no instante $x = a$. Dizemos que $v = f'(x)$ é a **lei de velocidades** associada à lei do movimento $y = f(x)$.

▷ Ver applet

Derivação

Chama-se **Derivação** à operação que a cada função $f(x)$ associa a sua derivada $f'(x)$.

$$D \; : \; f(x) \mapsto f'(x)$$

A **derivação** transforma cada lei de movimento na respectiva lei de velocidades.

Primitivação

Chama-se **Primitivação** à operação inversa da derivação:

$$P \;:\; f'(x) \mapsto f(x)\,.$$

A **primitivação** permite recuperar a lei dum movimento a partir da respectiva lei de velocidades.

Primitivas

Chama-se **primitiva** duma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a qualquer função $g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in D$.

Escrevemos $\quad P[\,f(x)\,] = Pf(x) = g(x) + c \quad$ para exprimir que $g(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Note que sendo c uma constante e $g(x)$ uma primitiva de $f(x)$ então $\quad g(x) + c \quad$ é também uma primitiva de $f(x)$.

Unicidade da Primitiva

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo D.

Teorema

Se $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são primitivas de $f(x)$ em D então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $g_1(x) = g_2(x) + c$ para todo $x \in D$.

Prova:

Tem-se

$$(g_1 - g_2)'(x) = g_1'(x) - g_2'(x) = f(x) - f(x) = 0\,.$$

Logo, porque D é um intervalo, $g_1 - g_2$ é constante, i.e., $g_1(x) = g_2(x) + c$. $\square$

Primitivação de Potências

- $P[1] = x + c$
- $P[x] = \frac{x^2}{2} + c$
- $P[x^2] = \frac{x^3}{3} + c$

- $P[x^n] = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$

Regras de Derivação

- $c' = 0$ (a derivada duma constante é zero)
- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
- $(c\,f)'(x) = c\,f'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$
- $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$

Regra da Decomposição
Dadas funções $f_1, f_2 : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e constantes* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

$$P\,[\,c_1\,f_1 + c_2\,f_2\,] = c_1\,P\,[\,f_1\,] + c_2\,P\,[\,f_2\,]\ .$$

Esta regra é uma combinação das seguintes duas regras:

- $P\,[\,f + g\,] = P\,[\,f\,] + P\,[\,g\,]$
- $P\,[\,c\,f\,] = c\,P\,[\,f\,]$

Exemplo (Regra da Decomposição)

$$
\begin{aligned}
P[\,3-2\,x^2+4\,x^3\,] &= 3\,P[\,1\,]-2\,P[\,x^2\,]+4\,P[\,x^3\,]\\
&= 3\,x-2\,\frac{x^3}{3}+4\,\frac{x^4}{4}+c\\
&= 3\,x-\frac{2\,x^3}{3}+x^4+c
\end{aligned}
$$

Tabela de Derivadas

$$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1} \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Conhecendo uma função $f(x)$ e a sua derivada $g(x) = f'(x)$, para qualquer função $u = u(x)$, a composição $f(u) = f \circ u$ tem derivada $f'(u)\, u' = g(u)\, u'$.

Regra de Primitivação da função f

$$P\left[\, g(u)\, u' \,\right] = f(u) + c$$

As regras desta forma dizem-se **regras de primitivação imediata**.

Para aplicar esta regra é necessário que a função a primitivar seja da forma $g(u)\, u'$.

Derivada da potência

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)\, x^{\alpha}\ .$$

Regra da Potência

$$P\left[\, u^{\alpha}\, u' \,\right] = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

Exemplo

$$P\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right] = \frac{1}{2}\, P\left[\overbrace{(1+x^2)^{-1/2}}^{u^{-1/2}}\ \overbrace{(2\,x)}^{u'}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{1/2}}{1/2} + c = \sqrt{1+x^2} + c$$

Regra da Exponencial

Derivada da exponencial

$$(e^x)' = e^x \; .$$

Regra da Exponencial

$$P\left[\, e^u\, u' \,\right] = e^u + c$$

Exemplo

$$P[\, x\, e^{x^2}\,] = \frac{1}{2}\, P[\, \overbrace{e^{x^2}}^{e^u}\; \overbrace{(2\,x)}^{u'}\,] = \frac{1}{2}\, e^{x^2} + c$$

Regra do Seno

Derivada do Seno

$$(\sin x)' = \cos x \ .$$

Regra do Seno

$$P\left[\,(\cos u)\,u'\,\right] = \sin u + c$$

Exemplo

$$P[\cos(3\,x)\,] = \frac{1}{3}\,P[\overbrace{\cos(3\,x)}^{\cos u}\ \overbrace{3}^{u'}\ ] = \frac{1}{3}\,\sin(3\,x) + c$$

Regra do Coseno

Derivada do Coseno

$$(\cos x)' = -\sin x \; .$$

Regra do Coseno

$$P\left[\,(\sin u)\, u'\,\right] = -\cos u + c$$

Exemplo

$$P\left[\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right] = 2\,P\left[\overbrace{\sin\sqrt{x}}^{\sin u}\;\overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{u'}\right] = -2\,\cos\sqrt{x} + c$$

Derivada do Logarítmo

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}\,.$$

Regra do Logarítmo

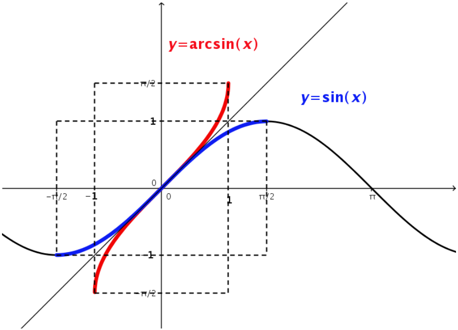
$$P\left[\frac{u'}{u}\right] = \log|u| + c$$

Exemplo

$$P\left[\frac{x}{1+x^2}\right] = \frac{1}{2}\,P\left[\frac{\overbrace{2\,x}^{u'}}{\underbrace{1+x^2}_{u}}\right] = \frac{1}{2}\,\log\left|1+x^2\right| + c$$

Arco-Seno

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ é a inversa da restrição da função seno ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.



A função arco-seno é ímpar com derivada

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Derivada do Arco-Seno

Seja $\alpha = \arcsin x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
Como $\cos\alpha > 0$ e $x = \sin(\arcsin x) = \sin(\alpha)$ tem-se

$$\begin{aligned} x^2 = \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha &\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - x^2 \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}\,. \end{aligned}$$

Logo

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}\,.$$

Derivada do Arco-Seno

Derivando a relação $x = \sin(\arcsin x)$ obtemos

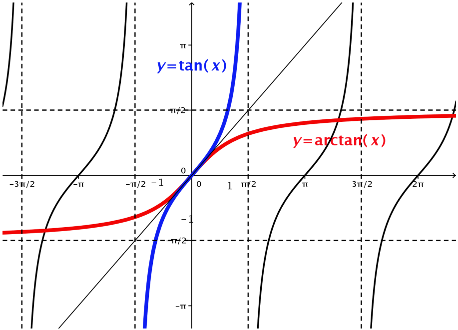
$$1 = \sin'(\arcsin x)\ \arcsin' x = \cos(\arcsin x)\ \arcsin' x$$

Logo

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Arco-Tangente

$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ é a inversa da restrição da função tangente ao intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$.



A função arco-tangente é ímpar com derivada

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

Derivada do Arco-Tangente

Seja $\alpha = \arctan x$.
Então $x = \tan(\arctan x) = \tan(\alpha)$, pelo que

$$
\begin{aligned}
x^2 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} &\Leftrightarrow \; x^2 \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\
&\Leftrightarrow \; (1+x^2)\cos^2\alpha = 1 \\
&\Leftrightarrow \; \cos^2\alpha = \frac{1}{1+x^2}\,.
\end{aligned}
$$

Logo

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Derivada do Arco-Tangente

A Tangente tem derivada

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\cos x)\,(\cos x) - (\sin x)\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Derivando a relação $\quad x = \tan(\arctan x) \quad$ obtemos

$$1 = \tan'(\arctan x)\ \arctan' x = \frac{1}{\cos^2(\arctan x)}\ \arctan' x$$

Logo

$$\arctan' x = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Regra do Arco-Seno

Derivada do Arco-Seno

$$(\arcsin(x/a))' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,.$$

Regra do Arco-Seno

$$P\left[\frac{u'}{\sqrt{a^2 - u^2}}\right] = \arcsin(u/a) + c$$

Exemplo

$$P\left[\frac{1}{\sqrt{4 - 3x^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\,P\left[\frac{\overbrace{\sqrt{3}}^{u'}}{\sqrt{2^2 - (\underbrace{\sqrt{3}\,x}_{u})^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + c$$

Regra do Arco-Tangente

Derivada do Arco-Tangente

$$(\arctan(x/a))' = \frac{a}{a^2 + x^2} \; .$$

Regra do Arco-Tangente

$$P\left[\frac{u'}{a^2 + u^2}\right] = \frac{1}{a}\arctan(u/a) + c$$

Exemplo

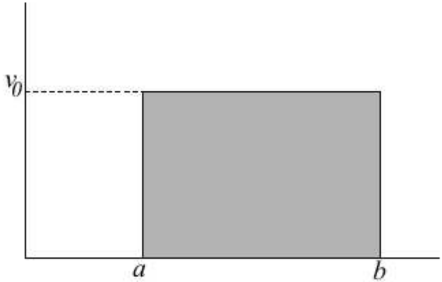
$$P\left[\frac{x}{4 + x^4}\right] = \frac{1}{2}\,P\left[\frac{\overbrace{2\,x}^{u'}}{2^2 + (\underbrace{x^2}_{u})^2}\right] = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x^2}{2}\right) + c$$

Velocidade e Deslocamento

Problema

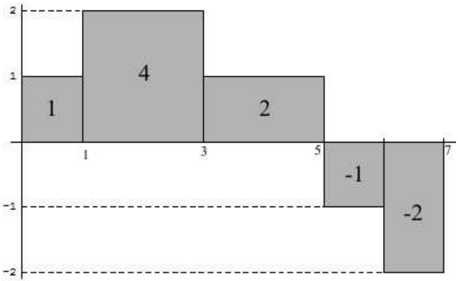
Determinar o deslocamento, num intervalo de tempo dado, conhecido o gráfico da lei de velocidades $v = f(x)$.

Se $f(x)$ é constante, $f(x) = v_0$, então o deslocamento no intervalo de tempo $[a, b]$ é igual a $v_0\,(b - a)$, produto que corresponde à área sombreada na figura seguinte, se $v_0 > 0$, ou menos essa área, se $v_0 < 0$.



Velocidade e Deslocamento

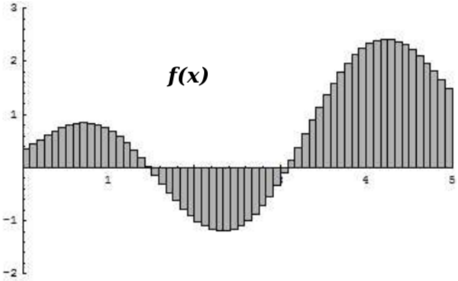
Se a lei de velocidades $v = f(x)$ for a seguinte função em escada



$$\text{Deslocamento} = 1 + 4 + 2 - 1 - 2 = 4\ .$$

Velocidade e Deslocamento

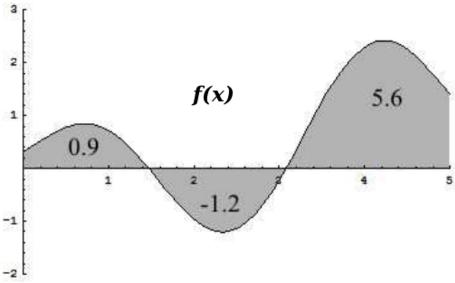
Se a lei de velocidadades $v = f(x)$ for uma função em escada



então o deslocamento num intervalo de tempo $[a, b]$ é igual à área compreendida entre o gráfico $v = f(x)$, o eixo das abcissas e as rectas verticais $x = a$ e $y = b$, considerando positiva a área da região acima do eixo das abcissas e negativa a área abaixo.

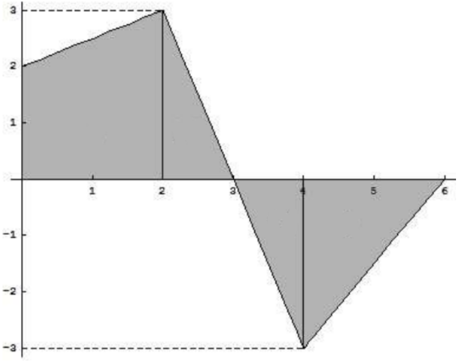
Velocidade e Deslocamento

Se a lei de velocidadades $v = f(x)$ for uma função contínua vale a mesma relação.



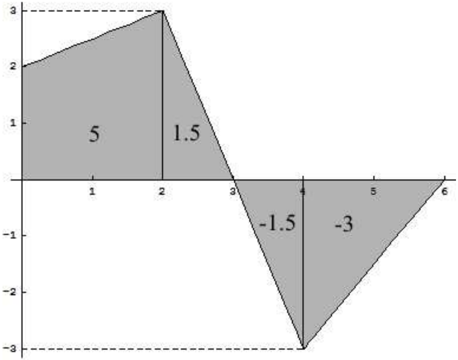
$$\text{Deslocamento} = 0.9 - 1.2 + 5.6 = 5.3 \ .$$

Considere a lei de velocidades seguinte no intervalo de tempo $[0, 6]$



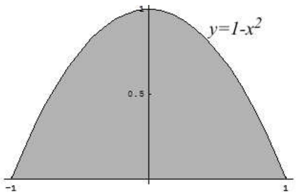
Velocidade e Deslocamento

Considere a lei de velocidades seguinte no intervalo de tempo $[0,6]$



$$\text{Deslocamento} = 5 - 1.5 - 1.5 - 3 = 2\ .$$

Problema *Qual a área da região limitada entre o gráfico da parábola* $y = 1 - x^2$ *e o eixo das abcissas?*



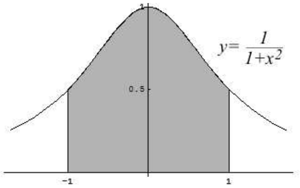
lei de velocidades $v = 1 - x^2 \quad \Rightarrow$

movimento associado $y = P\left[1 - x^2\right] = x - \frac{x^3}{3} + c$

$$\text{Área} = \text{ deslocamento} = \left(1 - \frac{1}{3} + c\right) - \left(-1 + \frac{1}{3} + c\right)$$
$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\,.$$

Primitivas e Cálculo de Áreas

Problema *Qual a área da região limitada entre o gráfico da função $y = \frac{1}{1+x^2}$, o eixo das abcissas, e as rectas verticais de equações $x = -1$ e $x = 1$?*

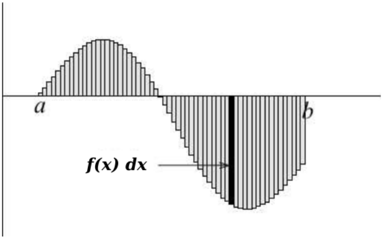


lei de velocidades $v = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow$

$$\text{movimento associado } y = P\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \arctan x + c$$

$$\begin{aligned}\text{Área} = \ \text{deslocamento} &= \arctan(1) - \arctan(-1)\\ &= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

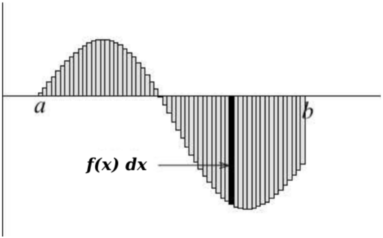
Integral Definido duma Função



$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,(x_i - x_{i-1})$$

onde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ e $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.
Por exemplo $x_i = a + \frac{i\,(b-a)}{n}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Integral Definido duma Função



$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,(x_i - x_{i-1})$$

onde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ e $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

Por exemplo $x_i = a + \frac{i\,(b-a)}{n}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Integrabilidade

Uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **integrável à Riemann** quando o limite anterior existe independentemente das escolhas dos pontos x_i e x_i^*, supondo que as diferenças $x_i - x_{i-1}$ tendem para 0 quando $n \longrightarrow \infty$.

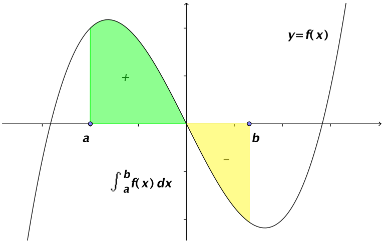
Teorema

Toda a função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é integrável à Riemann.*

▷ Ver applet

O Integral como Área

O integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é igual à área compreendida entre o gráfico $y = f(x)$, o eixo das abcissas, e as rectas verticais $x = a$ e $y = b$, considerando positiva a área da região acima do eixo das abcissas e negativa a área abaixo deste eixo.



Teorema Fundamental do Cálculo (1ª versão)
Dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *se* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *for uma primitiva de* f *então*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \, .$$

Este teorema é também conhecido como a **Regra de Barrow**.

Prova do Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
Para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(x_i^*)\ .$$

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} F'(x_i^*)\,(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,(x_i - x_{i-1}) \\
&\text{converge para } \int_a^b f(x)\,dx \ \ (n \to +\infty)
\end{aligned}$$

Linearidade do Integral

Dadas funções $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis à Riemman e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + g$ e λf são também integráveis à Riemman e

1. $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_a^b (\,f(x) + g(x)\,)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Convenções sobre a Integração

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo I. Na definição do integral $\int_a^b f(x)\,dx$ assumiu-se que $a < b$.

Com as convenções

1. $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
2. $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad \text{se} \quad b < a.$$

este integral está definido quaisquer que sejam $a, b \in I$.

Aditividade do Integral

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo I. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,, \qquad \forall\, a, b, c \in I\,.$$

Se $a \leq c \leq b$, esta igualdade é óbvia.

Se $a \leq b \leq c$, é óbvio que $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$. Logo,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

Nos restantes casos a justificação é semelhante.

Monotonia do Integral

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis.

1. Se $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$ então
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\ .$$
2. $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

Como $f(x) = \pm |f(x)|$, tem-se $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Logo

$$-\int_a^b |f(x)|\ dx = \int_a^b -|f(x)|\ dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\ dx\ ,$$

o que implica $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$.

Integrais Indefinidos

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num intervalo I.

Se $F(x) = P[\,f(x)\,]$ é uma primitiva de f no intervalo I então, fixado $a \in I$, temos para todo $x \in I$,

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt = C + \int_a^x f(t)\,dt\ .$$

Chama-se **integral indefinido** da função f a qualquer função $F : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = C + \int_a^x f(t)\,dt\ ,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ e $a \in I$ são constantes.

Teorema Fundamental do Cálculo (2ª versão)

Teorema
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo I. Então $f(x)$ é primitivável e, fixando $a \in I$, o integral indefinido $F : I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = C + \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in I)$$

é uma primitiva de $f(x)$.

Corolário
Toda a função contínua é primitivável.

▷ Ver applet

A Notação de Leibnitz

Dada uma função $f(x)$,

$$P[f] = P[f(x)] = \int f(x)\,dx = \int f$$

qualquer destas notações representa uma primitiva de $f(x)$.

Origem da Notação : Se f é contínua num intervalo I, fixado $a \in I$, o integral indefinido $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é uma primitiva de $f(x)$, função que era denotada por Leibnitz como $\int f(x)\,dx$.

Regra de Primitivação por Partes

Sejam u e v funções diferenciáveis. Então

$$\int u' v = u\, v - \int u\, v' \,.$$

Pela regra de derivação do produto temos

$$u\, v = \int (u\, v)' = \int u'\, v + u\, v' = \int u'\, v + \int u\, v' \,.$$

Exemplo 1

$$\int x\,\cos x\,dx$$

$$\left\{\begin{array}{ll} u' & = \cos x \\ v & = x \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} u & = \sin x \\ v' & = 1 \end{array}\right. .$$

$$\begin{aligned} \int \overbrace{x}^{v}\,\overbrace{\cos x}^{u'}\,dx &= \overbrace{x}^{v}\,\overbrace{\sin x}^{u} - \int \overbrace{1}^{v'}\,\overbrace{\sin x}^{u}\,dx = \\ &= x\,\sin x - (-\cos x) + c \\ &= x\,sinx + \cos x + c\ . \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\int x \arctan x \, dx$$

$$\begin{cases} u' &= x \\ v &= \arctan x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u &= x^2/2 \\ v' &= 1/(1+x^2) \end{cases} .$$

$$\begin{aligned}
\int \overbrace{x}^{u'} \overbrace{\arctan x}^{v} \, dx &= \overbrace{\frac{x^2}{2}}^{u} \overbrace{\arctan x}^{v} - \int \overbrace{\frac{x^2}{2}}^{u} \overbrace{\frac{1}{1+x^2}}^{v'} \, dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \, dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c .
\end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\int \log x \, dx = \int 1 \, \log x \, dx$$

$$\begin{cases} u' & = 1 \\ v & = \log x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u & = x \\ v' & = 1/x \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} \int \overbrace{1}^{u'} \overbrace{\log x}^{v} \, dx &= \overbrace{x}^{u} \overbrace{\log x}^{v} - \int \overbrace{x}^{u} \overbrace{\frac{1}{x}}^{v'} \, dx = \\ &= x \, \log x - \int 1 \, dx \\ &= x \, \log x - x + c \, . \end{aligned}$$

Variação duma função

Dada uma função $F(x)$,

$$[\,F(x)\,]_a^b = F(b) - F(a)$$

denota a **variação** de $F(x)$ no intervalo $[a, b]$.

Se $F(x) = \int f(x)\,dx$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\,F(x)\,]_a^b = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$

Regra de Integração por Partes

Sejam u e v funções diferenciáveis no intervalo $[a, b]$. Então

$$\int_a^b u' v = [u\, v]_a^b - \int_a^b u\, v' \ .$$

Segue da regra de primitivação por partes

$$\begin{aligned}
\int_a^b u'\, v &= \left[\int u'\, v \right]_a^b \\
&= \left[u\, v - \int u\, v' \right]_a^b \\
&= [\, u\, v\,]_a^b - \left[\int u\, v' \right]_a^b \\
&= [\, u\, v\,]_a^b - \int_a^b u\, v'
\end{aligned}$$

Exemplo 4

$$\int_1^2 x \log x \, dx$$

$$\begin{cases} u' & = x \\ v & = \log x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u & = \frac{x^2}{2} \\ v' & = 1/x \end{cases} .$$

$$\int_1^2 \overbrace{x}^{u'} \overbrace{\log x}^{v} \, dx = [\overbrace{\frac{x^2}{2}}^{u} \overbrace{\log x}^{v}]_1^2 - \int_1^2 \overbrace{\frac{x^2}{2}}^{u} \overbrace{\frac{1}{x}}^{v'} \, dx =$$

$$= \frac{4}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx$$

$$= 2 \log 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 =$$

$$= 2 \log 2 - \frac{1}{2} (\frac{4}{2} - \frac{1}{2}) = 2 \log 2 - \frac{3}{4} .$$

Regra de Primitivação por Substituição

Sejam $f(x)$ uma função primitivável num intervalo I, e $g(t)$ uma função diferenciável com valores em I. Então

$$\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = \left[\, \int f(x)\, dx \,\right]_{x=g(t)} ,$$

onde $[\, e\,]_{x=g(t)}$ representa o resultado de substituir x por $g(t)$ na expressão e.

$$x = g(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \Leftrightarrow \quad dx = g'(t)\, dt$$

Justificação da Regra

Considere a primitiva $F(x) = \int f(x)\,dx$. Derivando a composição $F(g(t))$ temos

$$[\,F(g(t))\,]' = F'(g(t))\,g'(t) = f(g(t))\,g'(t)\ .$$

Logo,

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,dt = F(g(t)) = [\,F(x)\,]_{x=g(t)} = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)}\ .$$

Regra de Primitivação por Substituição (2ª versão)

Supondo que $g : J \longrightarrow I$ é uma aplicação bijectiva,

$$\text{i.e.,} \quad x = g(t) \;\Leftrightarrow\; t = g^{-1}(x)\ ,$$

então

$$\int f(x)\,dx = \left[\,\int f(g(t))\,g'(t)\,dt\,\right]_{t=g^{-1}(x)} \quad .$$

Exemplo 1

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\, dx$$

$$\begin{aligned} t = \sqrt{e^x - 1} \;&\Leftrightarrow\; t^2 = e^x - 1 \\ &\Leftrightarrow\; e^x = 1 + t^2 \;\Leftrightarrow\; x = \log(1 + t^2)\,. \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\,t}{1 + t^2} \quad\Leftrightarrow\quad dx = \frac{2\,t}{1 + t^2}\, dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\, dx &= \left[\int \frac{1}{t}\,\frac{2\,t}{1 + t^2}\, dt\right]_{t=\sqrt{e^x-1}} = \left[2\int \frac{1}{1 + t^2}\, dt\right]_{t=\sqrt{e^x-1}} \\ &= [2 \arctan t + c\,]_{t=\sqrt{e^x-1}} = 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} + c\,. \end{aligned}$$

Exemplo 1

É costume omitir os parêntesis $[\,\cdot\,]_{t=\sqrt{e^x-1}}$ escrevendo apenas

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx &= \int \frac{1}{t}\,\frac{2\,t}{1+t^2}\,dt\\ &= 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt\\ &= 2\arctan t + c\\ &= 2\arctan\sqrt{e^x-1} + c\ .\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$$

$$t=\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad t^2=x$$

$$\frac{dx}{dt}=2\,t \quad \Leftrightarrow \quad dx=2\,t\,dt.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx &= \int \frac{1}{t+1}\,2\,t\,dt = 2\int \frac{t}{t+1}\,dt \\
&= 2\int \frac{t+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\,dt \\
&= 2\,(t-\log|t+1|)+c \\
&= 2\,(\sqrt{x}-\log\left|\sqrt{x}+1\right|)+c\ .
\end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\int \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt$$

$$x = \sin t \quad \Leftrightarrow \quad t = \arcsin x$$

$$\frac{dx}{dt} = \sin' t = \cos t \quad \Leftrightarrow \quad dx = \cos t\,dt.$$

$$\int \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt = \int \frac{1}{1+\sin^2 t}\,\sin' t\,dt = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$= \arctan x + c = \arctan(\sin t) + c\ .$$

Regra de Integração por Substituição

Sejam $g : J \to I$ uma função bijectiva e diferenciável, e $f(x)$ uma função primitivável no intervalo I. Então dados $a, b \in J$,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt\ .$$

$$x = g(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \Leftrightarrow \quad dx = g'(t)\,dt$$

$$\begin{cases} t = a \\ t = b \end{cases} \xrightarrow{g} \begin{cases} x = g(a) \\ x = g(b) \end{cases}$$

Justificação da Regra

Sendo $F(x) = \int f(x)\,dx$,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = [\,F(x)\,]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))\,.$$

Pela Regra de Primitivação por Substituição,

$$F(g(t)) = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

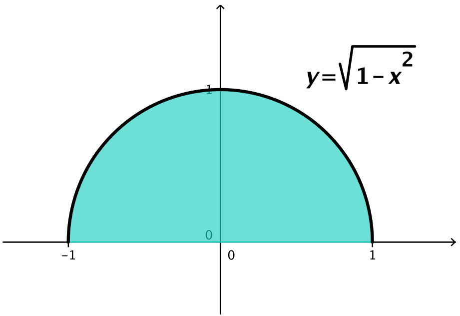
Pela Regra de Barrow

$$\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt = [\,F(g(t))\,]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))\,.$$

Logo os dois integrais definidos coincidem.

Exemplo 4

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$



$x = \sin t$ $\quad\quad$ $dx = \sin' t\, dt = \cos t\, dt$

$$\begin{cases} t = -\frac{\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\sin} \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Exemplo 4

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \quad \text{é bijectiva}$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$$

porque $\cos t > 0$ para $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\cos(2\,t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\,\cos^2 t - 1$$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2\,t)}{2}$$

Exemplo 4

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\, dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\,t)}{2}\, dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2\,t)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= (\frac{\pi}{4}+\frac{\sin(\pi)}{4}) - (-\frac{\pi}{4}+\frac{\sin(-\pi)}{4}) \\
&= \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Funções Polinomiais

Chama-se **função polinomial** a qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n\ .$$

A soma, a diferença, o produto e a composição de funções polinomiais é uma função polinomial, embora o quociente de funções polinomiais não seja em geral uma função polinomial.

A derivada e a primitiva duma função polinomial são funções polinomiais.

Funções Racionais

Chama-se **função racional** a qualquer função que possa ser expressa como um quociente de dois polinómios. A soma, a diferença, o produto, o quociente e a composição de funções polinomiais é uma função polinomial.

A derivada duma função racional é sempre uma função racional.

No entanto a primitiva duma função racional não é em geral uma função racional. Por exemplo

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c \qquad \text{e} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c\ .$$

Funções Elementares

Chamam-se **funções elementares** às funções e^x (exponencial), $\log x$ (logarítmo), $\cos x$ (coseno), $\sin x$ (seno), $\arcsin x$ (arco-seno), $\arctan x$ (arco-tangente), às funções racionais e a todas as funções que se obtenham destas pelas operações de adição, multiplicação, subtracção, divisão e composição de funções.

Por exemplo

$$f(x) = \log \frac{e^x - 1}{1 - \cos^2 x}, \quad D_f =]0, +\infty[- \{\, n\pi \;:\; n \in \mathbb{N} \,\}$$

é uma função elementar.

A derivada de qualquer função elementar é uma função elementar.

Funções Elementarmente Primitiváveis

Uma função elementar $f(x)$ diz-se **elementarmente primitivável** se as suas primitivas forem funções elementares.

Proposição *Toda a função racional é elementarmente primitivável.*

Nem toda a função elementar é elementarmente primitivável.

Por exemplo e^{x^2} e $\dfrac{\sin x}{x}$ não são elementarmente primitiváveis.

O Processo de Derivação

O processo de derivação é **unívoco**. A cada passo apenas envolve o **reconhecimento da última operação ou função** da expressão a derivar. É com a regra de derivação dessa operação ou função que o processo de derivação se inicia.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' &= \frac{x'\,\sqrt{1-x^2} - x\,(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2} \\
&= \frac{\sqrt{1-x^2} - x\,((-x)/\sqrt{1-x^2})}{1-x^2} \\
&= \frac{\sqrt{1-x^2} + x^2/\sqrt{1-x^2})}{1-x^2}
\end{aligned}$$

A derivação é facilmente mecanizável.

O Processo de Primitivação

- Regra da Potência ($u^{-1/2} = 1/\sqrt{1-x^2}$, $u' = -2x$)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int (-2x)\,(1-x^2)^{-1/2}\,dx =$$
$$-\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + c$$

- Partes ($u' = x,\ v = (1-x^2)^{-1/2}$)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2}{2}\,x\,(1-x^2)^{-3/2}\,dx$$

O Processo de Primitivação

A aplicação duma regra de primitivação envolve o reconhecimento de determinada forma na função a primitivar.

O processo de primitivação não é unívoco.
É habitual ser possível aplicar mais do que uma regra de primitivação, e frequentemente vários dos caminhos de primitivação conduzem a becos sem saída.

É difícil mecanizar a primitivação.

Fracções Próprias de Inteiros

Dados inteiros $p, q \in \mathbb{N}$ a fracção $\frac{p}{q}$ diz-se **própria** se $p < q$.

Toda a fracção própria de inteiros pode ser decomposta como soma dum inteiro com uma fracção própria.

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \qquad \frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$$

Efectuando a divisão inteira de p por q temos $p = n\,q + r$ com $0 \leq r < q$. Logo

$$\frac{p}{q} = \frac{n\,q + r}{q} = n + \frac{r}{q}\ .$$

Fracções Racionais Próprias

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinómios. Uma função racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ diz-se uma **fracção própria** se o numerador $P(x)$ tiver grau menor que o denominador $Q(x)$.

Exemplos de fracções próprias

$$\frac{2x}{1+x^2} \qquad \frac{x^7 - x}{1+x^8} \qquad \frac{2}{1+x^6}$$

Exemplos de fracções não próprias

$$\frac{2x^2}{1+x^2} \qquad \frac{x - x^8}{1+x^8} \qquad \frac{3\,x^8}{1+x^6}$$

Proposição

Toda a função racional decompõem-se como soma de um polinómio com uma fracção própria.

Efectuando a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ obtemos

$$P(x) = Q(x)\,N(x) + R(x) \qquad \text{grau}\, R(x) \,<\, \text{grau}\, Q(x)\ .$$

Logo,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)\,N(x) + R(x)}{Q(x)} = N(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\ ,$$

é soma do polinómio $N(x)$ com a fracção própria $\frac{R(x)}{Q(x)}$.

Exemplo

Considere a fracção não própria $\dfrac{x^5+2}{x^3+x}$.

Efectuando a divisão de x^5+2 por x^3+x obtemos

$$x^5+2=(x^3+x)\underbrace{(x^2-1)}_{\text{quociente}}+\underbrace{x+2}_{\text{resto}}$$

Logo

$$\frac{x^5+2}{x^3+x}=\frac{(x^3+x)(x^2-1)+x+2}{x^3+x}=x^2-1+\underbrace{\frac{x+2}{x^3+x}}_{\text{frac. própria}}.$$

Estratégia para a Primitivação de Funções Racionais

Vamos ver que toda a função racional definida por uma fracção própria pode ser decomposta numa soma de fracções fáceis de primitivar, ditas **fracções simples**.

- Toda a fracção simples é elementarmente primitivável.
- Toda a fracção própria é elementarmente primitivável (decompõem-se numa soma de fracções simples).
- Toda a função racional é elementarmente primitivável (decompõem-se na soma dum polinómio com uma fracção própria).

Polinómios Irredutíveis

Um polinómio diz-se **irredutível** se tiver grau ≥ 1 e não puder ser decomposto como produto de dois polinómios de grau menor que o seu.

São polinómios irredutíveis :

- Todos os polinómios de 1º grau, $P(x) = a\,x + b$.
- Todos os polinómios de 2º grau que não admitam raízes reais, $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ com $b^2 - 4\,a\,c < 0$.

Não há outros polinómios irredutíveis além destes.

Frações Simples

Chama-se **fracção simples** a toda a função da forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)^n}$$

onde $Q(x)$ é um polinómio irredutível, n um inteiro ≥ 1, e $P(x)$ é um polinómio com grau $P(x) <$ grau $Q(x)$.

Toda a fracção simples tem uma das duas formas seguintes

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{ou} \quad \frac{A\,x+B}{(a\,x^2+b\,x+c)^n} \quad \text{com} \quad b^2-4\,a\,c<0$$

Proposição

Toda a fracção simples é elementarmente primitivável.

Primitivação das Frações Simples I

Pela Regra do Logarítmo

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\log|x-a| + c$$

Pela Regra da Potência ($n \geq 2$)

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{A}{1-n}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c$$

Logo toda a fracção simples da forma $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ ($n \geq 1$) é elementarmente primitivável.

Primitivação das Frações Simples II

Pela Regra do Arco-tangente

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

Pela Regra do Logarítmo

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + a^2) + c$$

Logo toda a fracção simples da forma $\dfrac{A\,x + B}{x^2 + a^2}$ é elementarmente primitivável.

Primitivação das Frações Simples III

Pela Regra da Potência, para $n \geq 2$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2\,(1-n)}\,\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} + c$$

Primitivando por partes obtém-se a seguinte fórmula

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

que permite determinar recursivamente esta primitiva para qualquer $n \geq 2$.

Logo toda a fracção simples da forma $\dfrac{A\,x+B}{(x^2+a^2)^n}$ é elementarmente primitivável.

Primitivação das Frações Simples IV

Seja $P(x) = x^2 + b\,x + c$ um polinómio irredutível $(b^2 - 4\,c < 0)$.
Efectuando a substituição $u = x + b/2$, $du = dx$, obtemos

$$\int \frac{A\,x + B}{(x^2 + b\,x + c)^n}\,dx = \int \frac{A\,u + B_1}{(u^2 + a^2)^n}\,du$$

com $a^2 = c - b^2/4$ e $B_1 = B - A\,b/2$, o que reduz esta primitiva à anterior.

Logo toda a fracção simples da forma $\dfrac{A\,x + B}{(x^2 + b\,x + c)^n}$ é elementarmente primitivável.

Decomposição em Fracções Simples

Proposição *Toda a fracção própria* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *decompõem-se, de modo único, como soma de fracções simples.*

Se $(x-a)^n$ é factor de $Q(x)$ então a decomposição de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ em fracções simples contém n parcelas da forma

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} \,.$$

Se $(x^2 + b\,x + c)^n$ é factor de $Q(x)$ então a decomposição de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ em fracções simples contém n parcelas da forma

$$\frac{B_1\,x + C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2\,x + C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_n\,x + C_n}{(x^2+bx+c)^n} \,.$$

Primitivação de Funções Racionais

Proposição *Toda a função racional é elementarmente primitivável.*

Toda a função racional pode ser primitivada em quatro passos:

1. Se a fracção não fôr própria, faz-se a divisão do numerador pelo denominador, de modo a decompô-la como soma de um polinómio mais uma fracção própria.
2. Factoriza-se o denominador da fracção própria em polinómios irredutíveis.
3. Determina-se a decomposição da fracção própria obtida no passo 1 como soma fracções simples.
4. Primitiva-se a função racional dada a partir das decomposições encontradas nos passos 1 e 3.

Exemplo 1

Calcular

$$\int \frac{x^4}{1-x^2}\,dx$$

Passo 1 Efectuando a divisão de x^4 por $1-x^2$ obtemos

$$x^4 = (1-x^2)\underbrace{(-x^2-1)}_{\text{quociente}} + \underbrace{1}_{\text{resto}}$$

Logo

$$\frac{x^4}{1-x^2} = \frac{(1-x^2)(-x^2-1)+1}{1-x^2} = (-x^2-1) + \frac{1}{1-x^2}\ .$$

Passo 2 $\quad 1-x^2 = (1-x)(1+x).$

Exemplo 1

Passo 3 A fracção dada admite a decomposição

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A\,(1+x) + B\,(1-x)}{(1-x)\,(1+x)}\ ,$$

para certas constantes A e B a determinar.

$$(\text{ igualando os numeradores}) \ \Rightarrow\ 1 = A\,(1+x) + B\,(1-x)$$

Atribuindo valores a x,
$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2\,A + 0 = 2\,A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$,
$x = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 0 + 2\,B = 2\,B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}$.
Logo

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\ .$$

Exemplo 1

Passo 4

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4}{1-x^2}\,dx &= \int (-x^2-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\,dx \\
&= \int -x^2 - 1 - \frac{1}{2}\,\frac{-1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x}\,dx \\
&= -\frac{x^3}{3} - x - \frac{1}{2}\log|1-x| + \frac{1}{2}\log|1+x| + c \\
&= -\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c\,.
\end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcular

$$\int \frac{4 + 2\,x^2 - x^3}{x^2\,(x^2 + 4)}\,dx$$

Passo 1 Desnecessário porque a fracção já é própria.
Passo 2 O denominador $x^2\,(x^2 + 4)$ já está factorizado.
Passo 3 Esta fracção própria admite uma decomposição da forma

$$\frac{4 + 2\,x^2 - x^3}{x^2\,(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C\,x + D}{x^2 + 4}$$
$$= \frac{A\,x\,(x^2 + 4) + B\,(x^2 + 4) + (C\,x + D)\,x^2}{x^2\,(x^2 + 4)},$$

para certas constantes A, B, C e D a determinar.

Exemplo 2

Passo 3 Igualando os numeradores, obtemos
$4+2\,x^2-x^3 = A\,x\,(x^2+4)+B\,(x^2+4)+(C\,x+D)\,x^2.$

$$
\begin{aligned}
x=0 &\quad\Rightarrow\quad 4=4\,B \quad\Rightarrow\quad B=1,\\
x=1 &\quad\Rightarrow\quad 5=5\,A+5+C+D,\\
x=-1 &\quad\Rightarrow\quad 7=-5\,A+5-C+D,\\
x=2 &\quad\Rightarrow\quad 4=16\,A+8+8\,C+4\,D.
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow\quad A=0,\;\; B=1,\;\; C=-1 \;\text{ e }\; D=1.$$

$$\frac{4+2\,x^2-x^3}{x^2\,(x^2+4)} = \frac{1}{x^2}+\frac{-x+1}{x^2+4}\;.$$

Exemplo 2

Passo 4

$$\begin{aligned}\int \frac{4+2\,x^2-x^3}{x^2\,(x^2+4)}dx &= \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{-x+1}{x^2+4}\,dx \\ &= \int \; x^{-2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{2}\,\log(x^2+4) + \frac{1}{2}\,\arctan(x/2) + c\ .\end{aligned}$$

Exemplo 3

Calcular

$$\int \frac{x^5+2}{x^3+x}\,dx$$

Passo 1 $\dfrac{x^5+2}{x^3+x} = (x^2-1) + \dfrac{x+2}{x^3+x}$ (exemplo da aula anterior)

Passo 2 $x^3+x = x\,(x^2+1)$.

Passo 3 Esta fracção admite a decomposição

$$\frac{x+2}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{B\,x+C}{x^2+1} = \frac{A\,(x^2+1)+(B\,x+C)\,x}{x\,(x^2+1)}\ ,$$

para certas constantes A, B e C a determinar.

Exemplo 3

Passo 3 Igualando os numeradores, obtemos $x + 2 = A\,(x^2 + 1) + (B\,x + C)\,x$. Logo, atribuindo valores a x, obtemos as equações seguintes nos coeficientes A, B e C que permitem determiná-los.

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2 = A + 0 = A, \\ x = 1 \quad &\Rightarrow \quad 3 = 2\,A + B + C = 4 + B + C, \\ x = -1 \quad &\Rightarrow \quad 1 = 2\,A + B - C = 4 + B - C. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = 2, \;\; B = -2, \;\; C = 1.$$

$$\frac{x + 2}{x^3 + x} = \frac{2}{x} + \frac{-2\,x + 1}{x^2 + 1}\,.$$

Exemplo 3

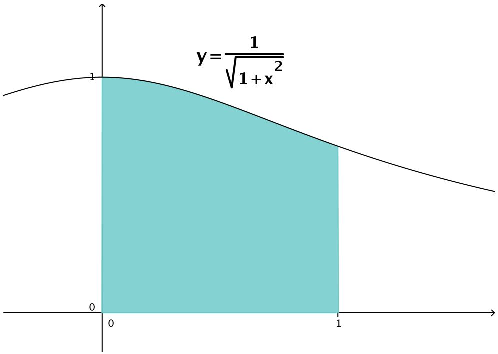
Passo 4

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5+2}{x^3+x}\,dx &= \int (x^2-1) + \frac{x+2}{x^3+x}\,dx \\
&= \int (x^2-1) + \frac{2}{x} + \frac{-2\,x+1}{x^2+1}\,dx \\
&= \int (x^2-1) + 2\,\frac{1}{x} - \frac{2\,x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= \frac{x^3}{3} - x + 2\,\log x - \log(x^2+1) + \arctan x + c\ .
\end{aligned}$$

Exemplo 4

Calcular

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$



Exemplo 4

$$x = \tan t \quad \Rightarrow \quad 1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

$$\Rightarrow \quad dx = (\tan t)'\, dt = \frac{1}{\cos^2 t}\, dt.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ x & = & 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} t & = & \arctan 0 = 0 \\ t & = & \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

$$0 \le t \le \tfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos t > 0$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1 + \tan^2 t} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t}.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \, \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t}\, dt$$

Exemplo 4

Faz-se em seguida uma nova substituição $\quad u = \sin t$

$$\Rightarrow \quad du = (\sin t)'\, dt = \cos t\, dt.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t & = & 0 \\ t & = & \pi/4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} u & = & \sin 0 = 0 \\ u & = & \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\, dt = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-u^2}\, du$$

Exemplo 4

Calcular

$$\int \frac{1}{1-u^2}\,du\ .$$

Passo 1 Desnecessário porque a fracção já é própria.

Passo 2 $1-u^2=(1-u)\,(1+u)$.

Passo 3 Esta fracção admite a decomposição

$$\frac{1}{1-u^2}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u}=\frac{A\,(1+u)+B\,(1-u)}{1-u^2}\ ,$$

para certas constantes A e B a determinar.

Exemplo 4

Passo 3 Igualando os numeradores, obtemos $1 = A\,(1+u) + B\,(1-u)$. Logo, atribuindo valores a u, obtemos as equações seguintes nos coeficientes A e B que permitem determiná-los.

$$u = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2\,A \quad \Rightarrow \quad A = 1/2,$$
$$u = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2\,B \quad \Rightarrow \quad B = 1/2,$$

Logo

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}\ .$$

Exemplo 4

Passo 4

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-u^2}\,du &= \int \frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}\,du \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{-1}{1-u}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,du \\ &= -\frac{1}{2}\log|1-u| + \frac{1}{2}\log|1+u| + c \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c\end{aligned}$$

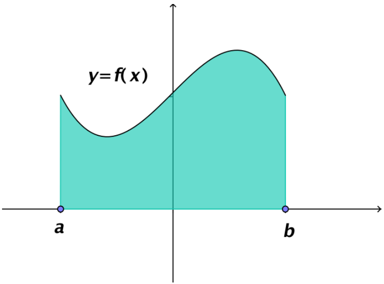
.

Exemplo 4

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-u^2}\,du \\ &= \left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]_0^{\sqrt{2}/2} \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

O Integral definido como área

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.



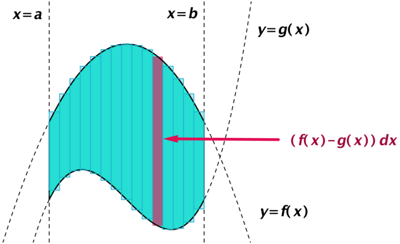
Neste caso integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

representa a área da região limitada entre o gráfico $y = f(x)$, o eixo dos xx e as rectas verticais $x = a$ e $x = b$.

Área como Integral

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que
para todo $x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x)$.

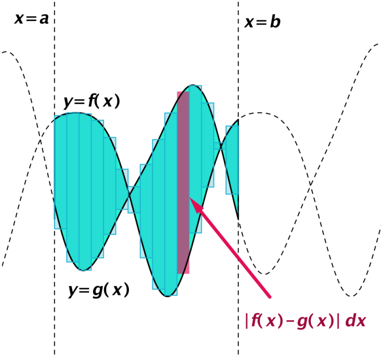


A área da região limitada entre os gráficos $y = f(x)$, $y = g(x)$ e as rectas verticais $x = a$ e $x = b$ é igual a

$$\text{Área} = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Área como Integral

Quaisquer que sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$,

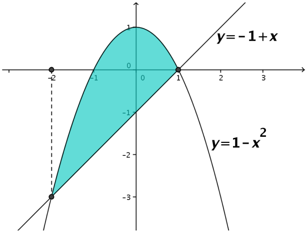


A área da região limitada entre os gráficos $y = f(x)$, $y = g(x)$ e as rectas verticais $x = a$ e $x = b$ é igual a

$$\text{Área} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Exemplo 1

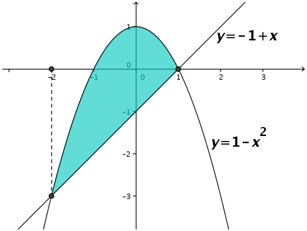
Calcular a área limitada entre as curvas $y = 1 - x^2$ e $y = -1 + x$.



As abcissas das intersecções das duas curvas são as raízes da equação

$$1 - x^2 = -1 + x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \lor x = -2$$

Exemplo 1

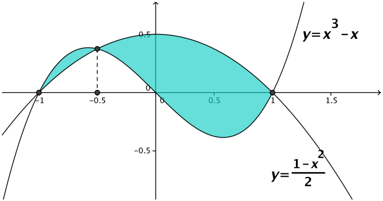


Logo

$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_{-2}^{1} (1 - x^2) - (-1 + x)\, dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx \\
&= \left[2\,x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

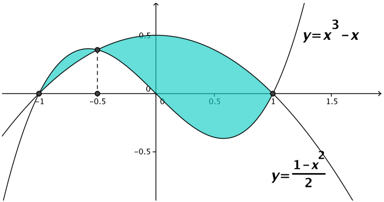
Calcular a área limitada entre as curvas $y = x^3 - x$ e $y = \frac{1-x^2}{2}$.



As abcissas das intersecções das duas curvas são as raízes da equação

$$
\begin{aligned}
x^3 - x = \frac{1-x^2}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\,x\,(x^2-1) + (x^2-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x^2-1)\,(2\,x+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \pm 1 \;\vee\; x = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

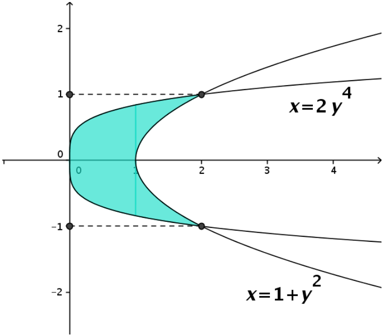


Logo

$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_{-1}^{-1/2} (x^3 - x) - \frac{1-x^2}{2}\, dx + \int_{-1/2}^{1} \frac{1-x^2}{2} - (x^3 - x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{-1/2} x^3 + \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\, dx + \int_{-1/2}^{1} -x^3 - \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\, dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_{-1}^{-1/2} + \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_{-1/2}^{1} = \frac{71}{96}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

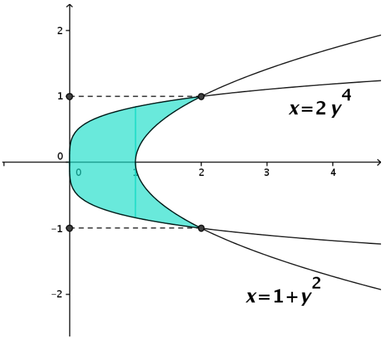
Calcular a área limitada entre as curvas $x = 2\,y^4$ e $x = 1 + y^2$.



As ordenadas das intersecções das duas curvas são as raízes da equação

$$\begin{aligned} 2\,y^4 = 1 + y^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\,y^4 - y^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y^2 = 1 \,\vee\, y^2 = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 1 \end{aligned}$$

Exemplo 3



Logo

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1} 1 + y^2 - 2\,y^4\,dy = \left[y + \frac{y^3}{3} - 2\,\frac{y^5}{5}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) - \left(-1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{28}{15}$$

Cálculo de Volumes

Corte-se um sólido S segundo fatias perpendiculares a um eixo.

Seja $A(x)$ a área do corte segundo o plano de abcissa x.

Supondo que as coordenadas dos cortes variam entre a e b, o volume do sólido é dado pelo integral

$$\text{Volume} = \int_a^b A(x)\,dx\ .$$

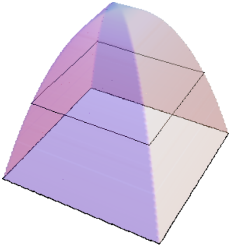
$A(x)\,dx$ mede o volume infinitesimal duma fatia de espessura dx.

Exemplo

Considere o sólido

$$S = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; |x| \leq \sqrt{1-z}, \; |y| \leq \sqrt{1-z} \;\; \text{e} \;\; 0 \leq z \leq 1 \,\}$$

Para cada $z \in [0, 1]$ o plano horizontal com cota z corta S segundo um quadrado de lado $\ell(z) = 2\sqrt{1-z}$ com área $A(z) = (2\sqrt{1-z})^2 = 4\,(1-z)$.

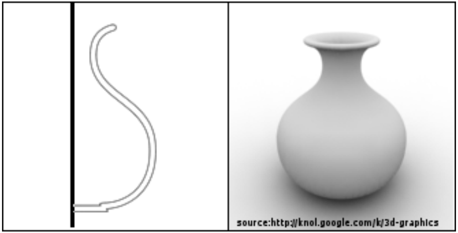


O volume de S é

$$V = \int_0^1 A(z)\, dz = \int_0^1 4\,(1-z)\, dz = 4\left[z - \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = 2$$

Sólidos de Revolução

Chama-se **sólido de revolução** a uma região do espaço obtida rodando uma figura plana em torno dum eixo contido no mesmo plano.



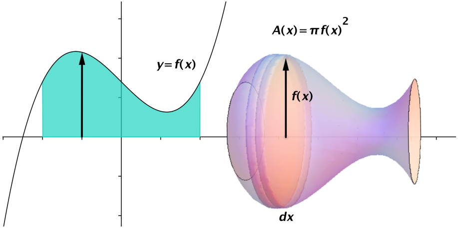
Proposição

O sólido de revolução obtido por rotação da região plana

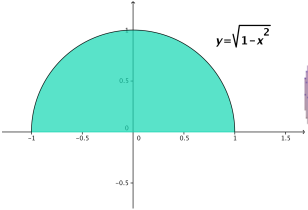
$$\{\,(x,y)\ :\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\,\}$$

em torno do eixo dos xx tem volume

$$V = \int_a^b \pi\, f(x)^2\, dx\ .$$



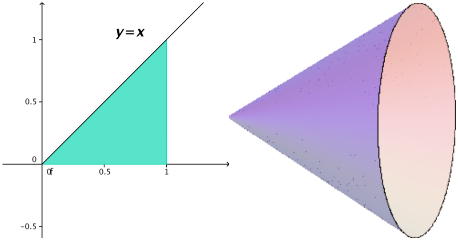
Exemplo 1



$$V = \int_{-1}^{1} \pi \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \pi \left(1-x^2\right) dx$$

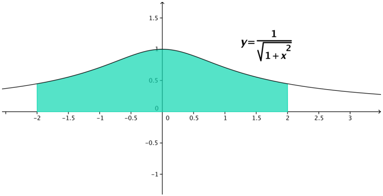
$$= \pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4\,\pi}{3}$$

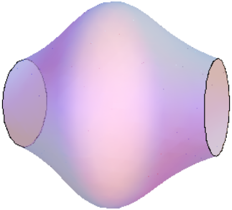
Exemplo 2



$$V = \int_0^1 \pi\, x^2\, dx = \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

Exemplo 3

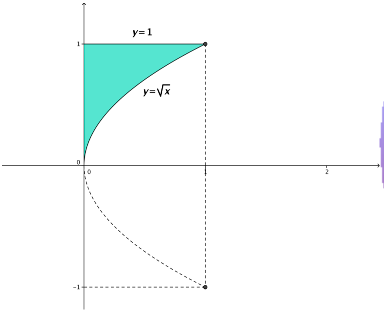


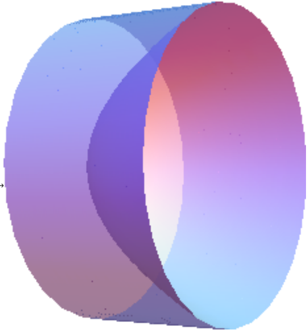


$$V = \int_{-2}^{2} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 dx = \int_{-2}^{2} \frac{\pi}{1+x^2}\, dx$$

$$= \pi \, [\arctan x]_{-2}^{2} = 2\pi \, \arctan 2$$

Exemplo 4

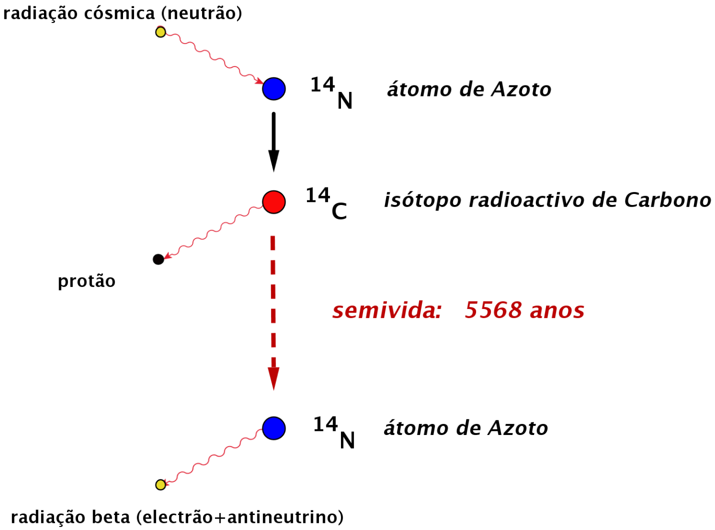




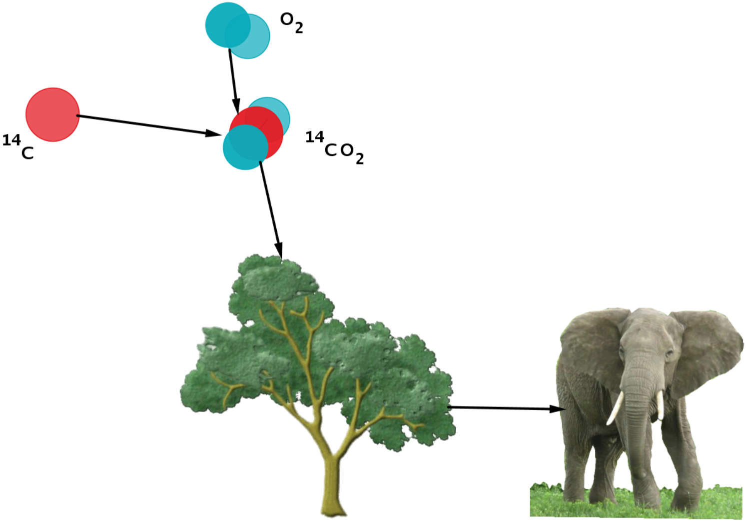
$$V = \int_0^1 \pi \, 1^2 \, dx - \int_0^1 \pi \, (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_0^1 (1 - x) \, dx$$

$$= \pi \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

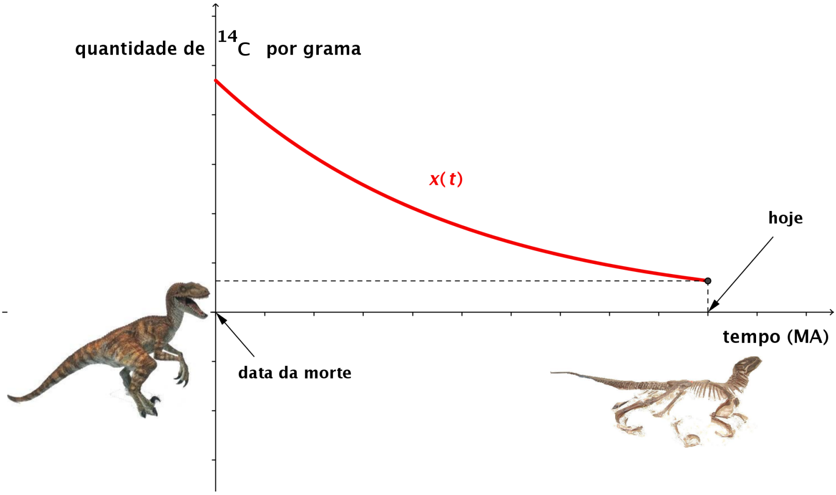
O Ciclo do Carbono-14



O Ciclo do Carbono-14



Datação pelo Carbono-14



Taxa de decaimento constante

$x(t)$ quantidade de ^{14}C numa amostra

$x'(t)$ velocidade de desintegração ou decaimento radioactivo

$\dfrac{x'(t)}{x(t)}$ taxa de desintegração ou decaimento radioactivo

Princípio: *Todo o elemento radioactivo tem uma taxa constante de desintegração radioactiva .*

Taxa de decaimento constante

Primitivando

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = k \quad \Leftrightarrow \quad \log|x(t)| = k\,t + c$$
$$\Leftrightarrow \quad |x(t)| = e^{k\,t+c} = e^c\,e^{k\,t}$$
$$\Leftrightarrow \quad x(t) = \pm\,e^c\,e^{k\,t}$$

Proposição *As funções exponenciais da forma*

$$x(t) = C\,e^{k\,t}$$

são as que têm taxa de decaimento constante igual a k,

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = k\ .$$

Equações Diferenciais

As equações

$$\frac{x'}{x} = k \quad \Leftrightarrow \quad x' = k\,x$$

dizem-se **equações diferenciais** na função incógnita x.

As funções $x(t) = C\,e^{k\,t}$ são as soluções desta equação diferencial.

Semivida e Taxa de desintegração radioactiva

Chama-se **semivida** dum elemento radioactivo ao tempo T que uma amostra desse elemento leva a ficar reduzida a metade.

Seja T a semivida dum elemento radioactivo com taxa de decaimento $k < 0$. Como $x(t) = x(0)\, e^{k\,t}$,

$$\frac{1}{2} = \frac{x(T)}{x(0)} = e^{k\,T} \quad \Leftrightarrow \quad -\log 2 = k\,T$$

$$\Leftrightarrow \quad k = -\frac{\log 2}{T}$$

Problema (Datação do *Homo Florensis*)

Foi mandado analisar em laboratório um pedaço de carvão duma escavação arqueológica na ilha de Flores na Indonésia, extraído dum nível contendo restos do hominídeo *homo florensis*.

A análise do Carbono-14 da referida amostra revelou uma média de 1.31 desintegrações por minuto e por grama. Sabendo que a mesma análise dá 6.68 desintegrações por minuto e por grama na madeira viva, estime a idade da amostra.

Solução (Idade do Homo Florensis)

Seja T a idade da amostra. A constante de decaimento radioactivo do ${}^{14}C$ é $\quad k = -\log 2/5568$.

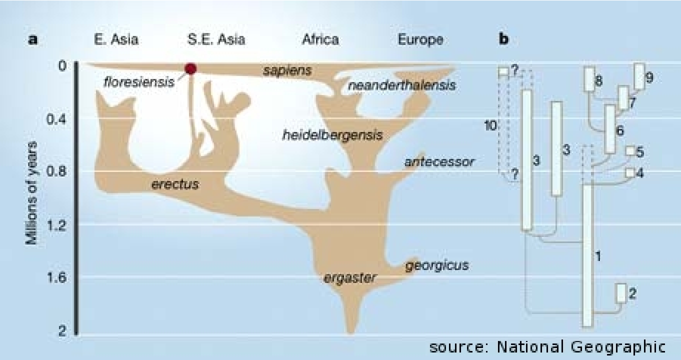
$$\frac{1.31}{6.68} = \frac{x'(T)}{x'(0)} = \frac{x(T)}{x(0)} = \frac{x(0)\,e^{k\,T}}{x(0)} = e^{k\,T}$$

$$\log\frac{1.31}{6.68} = -\frac{\log 2}{5568}\,T \quad \Leftrightarrow \quad T = -\frac{5568}{\log 2}\,\log\frac{1.31}{6.68}$$

O carvão analisado tem aproximadamente 13 086.4 anos.

As Origens do *Hobbit*

O **Homo floresiensis** é uma espécie extinta de hominideos com pouco mais de um metro de altura que viveu na Ilha de Flores até há cerca de 13 000 anos.



Lei do Arrefecimento de Newton

Todo o corpo perde calor a uma taxa que é directamente proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio ambiente em redor do corpo.

α temperatura (constante) do meio ambiente.

$x(t)$ temperatura do corpo no instante t.

Existe uma constante $c > 0$ tal que

$$x'(t) = c\,(\alpha - x(t))$$

Resolução da equação $x' = c\,(\alpha - x)$

Proposição

As soluções da equação $x' = c\,(\alpha - x)$ *são as funções da forma*

$$x(t) = \alpha + \lambda\, e^{-c\,t} \quad (\lambda \in \mathbb{R})\,.$$

Suponha que $\quad y(t) = x(t) - \alpha.$

$$y'(t) = x'(t) = c\,(\alpha - x(t)) = -c\,y(t) \;\Rightarrow$$

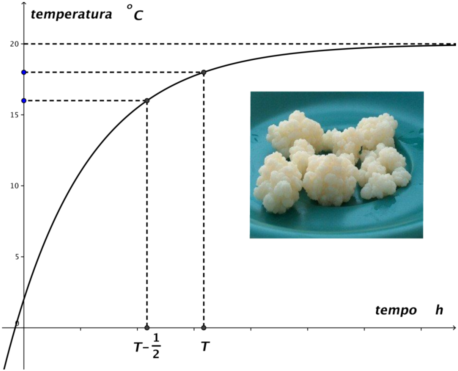
$$\Rightarrow \quad y(t) = \lambda\, e^{-c\,t} \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \alpha + \lambda\, e^{-c\,t}$$

Para toda a solução $x(t)$ da equação do arrefecimento de Newton

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \alpha$$

Problema

Numa sala mantida a $20^\circ C$ uma cultura de kefir encontra-se à temperatura de $18^\circ C$. Sabendo que meia hora antes a cultura estava a $16^\circ C$ determine há quantas horas o kefir foi retirado do frigorífico onde se encontrava a $2^\circ C$?



Solução

$$2 = x(0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = 20 - 18\, e^{-c\, t}$$

$$18 = x(T) = 20 - 18\, e^{-c\, T} \qquad \Rightarrow \qquad c\, T = \log 9$$

$$16 = x(T - \frac{1}{2}) = 20 - 18\, e^{-c\,(T-\frac{1}{2})} \quad \Rightarrow \quad c\,(T - \frac{1}{2}) = \log \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad c = 2\, \log 2$$

$$\Rightarrow \qquad T = \frac{\log 9}{2\, \log 2} \approx 1.5849 \;\; \text{horas.}$$

Taxas Absoluta e Relativa de Crescimento

Seja $x(t)$ uma função representando a evolução temporal no tamanho duma população.

Chama-se **taxa absoluta de crescimento** de $x(t)$ no instante t à derivada

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \; .$$

Chama-se **taxa relativa de crescimento** de $x(t)$ no instante t à derivada

$$(\log x(t))' = \frac{x'(t)}{x(t)} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h\, x(t)} \; .$$

Resolução da equação $x' = g(t)\,x$

Proposição *Dada uma função contínua* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *toda a solução da equação* $\frac{x'(t)}{x(t)} = g(t)$ *satifaz*

$$x(t) = x(0)\, e^{\int_0^t g(s)\, ds}\,.$$

$$log \frac{x(t)}{x(0)} = \log x(t) - \log x(0) = \int_0^t \frac{x'(s)}{x(s)}\, ds = \int_0^t g(s)\, ds$$

Logo, exponenciando

$$\frac{x(t)}{x(0)} = \exp\left(\int_0^t g(s)\, ds\right)\,.$$

Resolução da equação $x' = g(t)\,x$

Corolário *As soluções da equação* $x' = g(t)\,x$ *são da forma*

$$x(t) = \lambda\, e^{G(t)}$$

onde $G(t) = \int g(t)\,dt$ *é uma primitiva de* $g(t)$.

Cultura de Bactérias

Admitamos o seguinte

Princípio
A taxa relativa de crescimento duma população de bactérias é proporcional à diferença entre a concentração de nutrientes e a concentração de toxinas no meio de cultura.

Problema

Numa cultura de bactérias em laboratório a concentração de nutrientes é mantida constante igual a $\nu = 1\ g\,\ell^{-1}$ enquanto a concentração de toxinas cresce de acordo com a lei $\tau = \frac{2\,t}{1+t}\ g\,\ell^{-1}$, onde t representa o tempo medido em horas.

Sendo $x(0) = 0.5\ g$ o tamanho inicial e $x'(0) = 0.5\ g\,h^{-1}$ a taxa de crescimento inicial da população, determine:

1. O que acontece à população quando $t \to +\infty$
2. O instante em que a população maximiza o seu tamanho.
3. A massa máxima que a população alcança.

Solução do Problema

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = c\left(1 - \frac{2\,t}{1+t}\right) = c\left(\frac{1-t}{1+t}\right) = c\left(\frac{2}{1+t} - 1\right)$$

Em $t = 0$ temos

$$1 = \frac{x'(0)}{x(0)} = c\left(\frac{1-0}{1+0}\right) = c$$

Logo

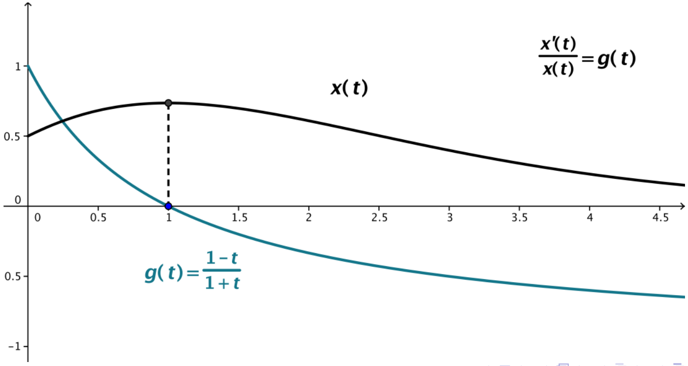
$$\begin{aligned}
\log\frac{x(t)}{x(0)} &= \log x(t) - \log x(0) = \int_0^t \frac{x'(s)}{x(s)}\,ds \\
&= \int_0^t \left(\frac{2}{1+s} - 1\right) ds \\
&= \left[2\,\log(1+s) - s\,\right]_0^t = 2\,\log(1+t) - t
\end{aligned}$$

Solução do Problema

Exponenciando obtemos

$$\frac{x(t)}{x(0)} = e^{2\,\log(1+t)-t} = e^{2\,\log(1+t)}\,e^{-t} = (1+t)^2\,e^{-t}$$

Logo $\quad x(t) = x(0)\,(1+t)^2\,e^{-t} = 0.5\,(1+t)^2\,e^{-t}.$



Solução do Problema

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{(1+t)^2}{e^t} = 0$$

Como $\dfrac{x'(t)}{x(t)} = \dfrac{1-t}{1+t}$,

$$x'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \, .$$

Além disso $x'(t)$ e $1-t$ têm o mesmo sinal o que mostra que $x(t)$ tem um máximo absoluto em $t = 1 \; h$.

O valor máximo da população é $\quad x(1) = \dfrac{2}{e} \approx 0.735759 \; g$.

Equações Numéricas

Chama-se **equação numérica** na incógnita numérica x a qualquer igualdade entre duas expressões na variável x

$$e.g. \qquad (x+1)\,e^{x} - 2\,x - 2\,cos(x+1) = 0$$

Chama-se **solução duma equação numérica** a um valor numérico tal que a substituição na equação da incógnita x por esse valor torna a equação numa igualdade verdadeira.

$$e.g. \qquad x = -1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(-1+1)}_{=0}\,e^{-1} - 2\,(-1) - 2\,\underbrace{cos\,\underbrace{(-1+1)}_{=0}}_{=1} = 0$$

Logo $x = -1$ é solução da equação anterior.

Chama-se **equação diferencial** na função incógnita x a qualquer igualdade entre duas expressões que envolvam x e as suas derivadas x', x'', etc.

$$e.g. \qquad x'' + x = 0$$

Chama-se **solução duma equação diferencial** a uma função $x = f(t)$ tal que a substituição na equação de x por essa função torna a equação numa igualdade entre funções verdadeira.

e.g. $\qquad x = \sin t \qquad \Rightarrow \quad$ para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$(\sin t)'' + \sin t = (\cos t)' + \sin t = (-\sin t) + \sin t = 0$$

Logo $x = \sin t$ é solução da equação anterior.

Ordem duma Equação Diferencial

Chama-se **ordem duma equação diferencial** à maior ordem das derivadas da função incógnita presentes na equação.

Por exemplo

$$x'' + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \quad \text{é uma equação de ordem 2}$$

A incógnita x representa uma função $x(t)$

$$y' + x\,y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} + x\,y = 0 \quad \text{é uma equação de ordem 1}$$

A incógnita x representa uma função $y(x)$

Equações de Primeira Ordem

Uma equação diferencial de primeira ordem diz-se **explícita** se for da forma

$$y' = f(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Vamos estudar uma classe de equações diferenciais de primeira ordem da forma

$$y' = a(x)\, b(y)$$

onde $a(x)$ e $b(y)$ são funções contínuas.

As equações diferenciais desta forma dizem-se **separáveis**.

Problema de Valor inicial

Sob condições muito gerais a equação diferencial $y' = f(x, y)$ tem infinitas soluções.

Chama-se **problema de valor inicial** ao problema de encontrar uma solução $y = g(x)$ duma equação diferencial $y' = f(x, y)$ que satisfaça uma restrição do tipo $g(x_0) = y_0$, a que se chama uma **condição inicial**.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

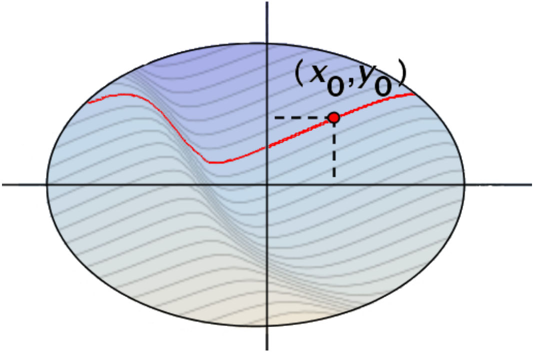
Princípio

Sob condições muito gerais na função $f(x, y)$ o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem uma única solução.

Existência e Unicidade



Mais precisamente,

1. dado (x_0, y_0) no domínio de $f(x, y)$ existe uma solução deste problema definida num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ contendo x_0,
2. Quaisquer duas soluções $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ deste problema definidas em intervalos abertos contendo x_0 são iguais na intersecção dos seus domínios.

Equações Separáveis

Sejam $a : I \to \mathbb{R}$ e $b : J \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas, sendo $b(y) \neq 0$ para todo $y \in J$.

Consideremos as primitivas

$$A(x) = \int a(x)\, dx \quad \text{e} \quad B(y) = \int \frac{1}{b(y)}\, dy \ .$$

Proposição

As soluções da equação diferencial separável $y' = a(x)\, b(y)$ *são as funções implicitamente definidas por*

$$B(y) = A(x) + c \quad \Leftrightarrow \quad y = B^{-1}(A(x) + c)$$

Prova da Proposição

Derivando a relação

$$B(y(x)) = A(x) + c$$

obtemos

$$\begin{aligned} B'(y(x))\,y'(x) = A'(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{b(y(x))}\,y'(x) = a(x) \\ &\Leftrightarrow \quad y'(x) = a(x)\,b(y(x)) \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) \;\text{ é solução de }\; y' = a(x)\,b(y) \end{aligned}$$

Método de Resolução

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = a(x)\,b(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{b(y)} = a(x)\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{b(y)}\,dy = \int a(x)\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad B(y) = A(x) + c \\
&\Leftrightarrow \quad y = B^{-1}(A(x) + c)
\end{aligned}$$

Proposição

Dadas funções contínuas $a : I \to \mathbb{R}$ *e* $b : J \to \mathbb{R}$ *a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = a(x)\, b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(a) *é a função constante igual a* y_0 *quando* $b(y_0) = 0$,

(b) *fica implicitamente definida pela equação*

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{b(s)}\, ds = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$$

quando $b(y_0) \neq 0$.

Prova de (b)

Seja $y(x)$ uma solução da equação $y' = a(x)\, b(y)$ satifazendo a equação inicial $y(x_0) = y_0$.

$$\begin{aligned}
\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{b(s)}\, ds &= \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{b(s)}\, ds \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{b(y(t))}\, y'(t)\, dt \\
&= \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt
\end{aligned}$$

1º Caso Particular: Equações que só dependem do tempo

Quando $b(y) = 1$ as soluções da equação

$$y' = a(x)$$

são as primitivas de $a(x)$.

A única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = a(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

é a função

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$$

2º Caso Particular: Equações Lineares

Quando $b(y) = y$ as soluções da equação

$$y' = a(x)\, y$$

são as funções da forma $y(x) = \lambda\, e^{A(x)}$ em que $A(x)$ é uma primitiva de $a(x)$.

A única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = a(x)\, y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

é a função

$$y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt}$$

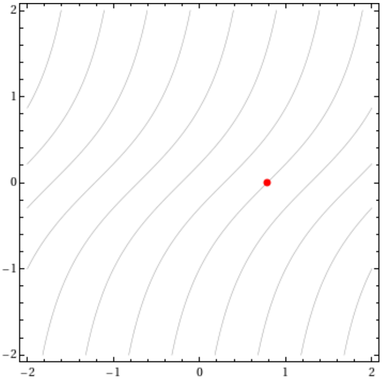
Exemplo 1

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 1 + y^2 \\ y(\pi/4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{1+y^2} = \int 1\, dt \quad &\Leftrightarrow \quad \arctan y = t + c \\ &\Leftrightarrow \quad y = \tan(t+c) \end{aligned}$$

Exemplo 1



Exemplo 1

$$(t_0, y_0) = (\tfrac{\pi}{4}, 0) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \arctan y_0 = t_0 + c \qquad &\Rightarrow \arctan 0 = \frac{\pi}{4} + c \\ &\Rightarrow 0 = \frac{\pi}{4} + c \\ &\Rightarrow c = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Logo a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \tan(t - \frac{\pi}{4}) \; .$$

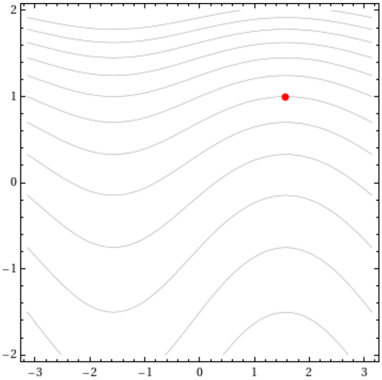
Exemplo 2

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1+e^x)\,\frac{dx}{dt} = \cos t \\ x(\pi/2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int (1+e^x)\,dx = \int \cos t\,dt \quad &\Leftrightarrow \quad x + e^x = \sin t + c \\ &\Leftrightarrow \quad x + e^x - \sin t = c \end{aligned}$$

Exemplo 2



Exemplo 2

$$(t_0, x_0) = (\tfrac{\pi}{2}, 1) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_0 + e^{x_0} - \sin t_0 = c \qquad &\Rightarrow\ 1 + e - \sin\frac{\pi}{2} = c \\ &\Rightarrow\ c = e \end{aligned}$$

Logo a solução do problema de valor inicial está implicitamente definida pela equação

$$x + e^x - \sin t = 1 \ .$$

Exemplo 3

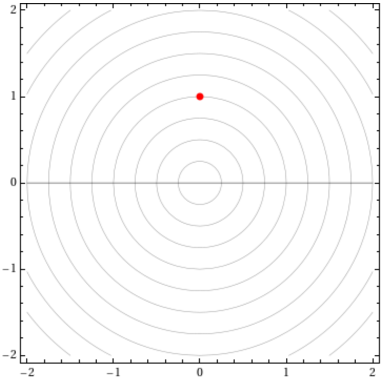
Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{ds} = -\frac{s}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\int y\, dy = -\int s\, ds \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{s^2}{2} + c$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 + s^2 = 2\, c$$

Exemplo 3



Exemplo 3

$$(s_0, y_0) = (0, 1) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y_0^2 + s_0^2 = 2\,c \qquad & \Rightarrow \; 1 + 0 = 2\,c \\ & \Rightarrow \; 2\,c = 1 \end{aligned}$$

Logo a solução do problema de valor inicial é

$$y(s) = \sqrt{1 - s^2}\;.$$

Exemplo 4

Resolva o problema de valor inicial

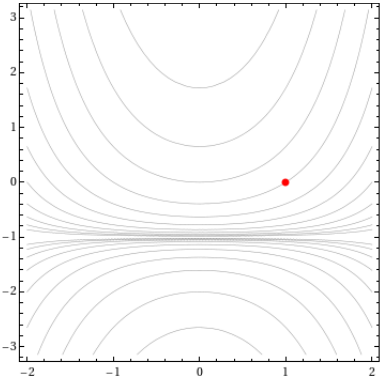
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = (1+y)\,x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int x\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \log|1+y| = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -1 + \lambda\, e^{x^2/2}$$

onde $\lambda = \pm\, e^c$.

Exemplo 4



Exemplo 4

$$(x_0, y_0) = (1, 0) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y_0 = -1 + \lambda\, e^{x_0^2/2} \qquad &\Rightarrow\; 0 = -1 + \lambda\, e^{1/2} \\ &\Rightarrow\; \lambda = e^{-1/2} \end{aligned}$$

Logo a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = -1 + e^{-1/2}\, e^{x^2/2} = -1 + e^{(x^2-1)/2}\ .$$

Dinâmica de Populações

t mede o tempo.

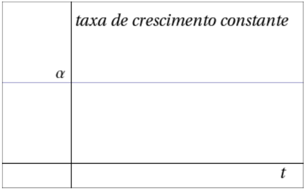
$x = x(t)$ mede o tamanho duma população.

$x' = \dfrac{dx}{dt}$ mede a taxa absoluta de crescimento da população.

$\dfrac{x'}{x} = \dfrac{\frac{dx}{dt}}{x}$ mede a taxa relativa de crescimento da população.

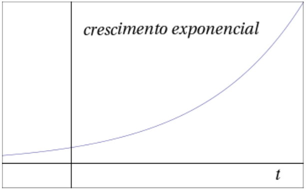
Crescimento Exponencial

$$x' = \alpha\, x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x'}{x} = \alpha$$



$$\Downarrow$$

$$x(t) = x_0\, e^{\alpha\, t}$$



Modelo de crescimento Malthusiano

Este modelo de crescimento exponencial é por vezes chamado de **Modelo de crescimento Malthusiano** em honra ao reverendo e académico **Thomas Malthus** (1766-1834) autor da influente obra

An Essay on the Principle of Population

cujas ideias marcaram tanto Charles Darwin como Alfred Russel Wallace nas suas eleborações (independentes) da teoria da evolução por selecção natural.

O Modelo Logístico de P. Verhulst

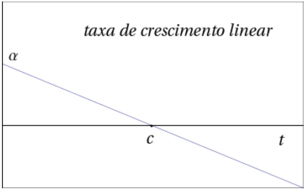
Um modelo matemático mais mais realista do que o modelo Malthusiano foi proposto em 1838 pelo matemático belga **Pierre François Verhulst** (1804-1849).

Equação logística

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\, x \left(1 - \frac{x}{c}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x'}{x} = \alpha \left(1 - \frac{x}{c}\right)$$

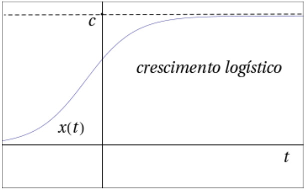
Modelo Logístico

$$\frac{x'}{x} = \alpha \left(1 - \frac{x}{c}\right)$$



$$\Downarrow$$

$$x(t) = \frac{c\, x_0\, e^{\alpha\, t}}{c - x_0 + x_0\, e^{\alpha\, t}}$$



Resolução da Equação Logística

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\, x \left(1 - \frac{x}{c}\right) \qquad \frac{dx}{x\,(c-x)} = \frac{\alpha}{c}\, dt$$

$$\int \frac{1}{x} + \frac{1}{c-x}\, dx = \int \alpha\, dt \quad \frac{x}{c-x} = \lambda\, e^{\alpha\, t} \quad x = \frac{c\,\lambda\, e^{\alpha\, t}}{1 + \lambda\, e^{\alpha\, t}}$$

Logo

$$x(t) = \frac{c\,\lambda\, e^{\alpha\, t}}{1 + \lambda\, e^{\alpha\, t}} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

é a solução geral da equação Logística.

Modelo Logístico: Comportamento assimptótico

Se $\lambda > 0$ então a solução $x(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e

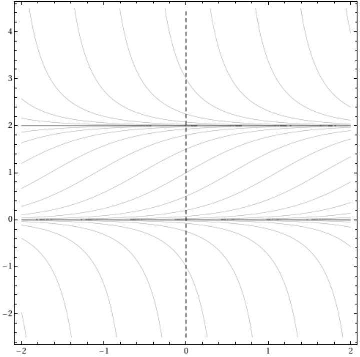
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{c\,\lambda\, e^{\alpha\, t}}{1+\lambda\, e^{\alpha\, t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{c\,\lambda\, e^{\alpha\, t}}{\lambda\, e^{\alpha\, t}} = c$$

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{c\,\lambda\, e^{\alpha\, t}}{1+\lambda\, e^{\alpha\, t}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Todas as soluções da equação logística tendem a 0 quando $t \to -\infty$ e tendem a c quando $t \to +\infty$.
O parâmetro c diz-se a **capacidade carregadora da população**, enquanto α se diz a **taxa de crescimento intrínseco da população** .

Modelo Logístico: Comportamento assimptótico

Se $\lambda < 0$ então o gráfico da solução $x(t) = \dfrac{c\,\lambda\,e^{\alpha\,t}}{1+\lambda\,e^{\alpha\,t}}$ tem uma assímptota vertical em $t = \alpha^{-1}\log(-\lambda^{-1})$.



Modelo Logístico: Problema de Valor Incical

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha\, x\, (1 - \frac{x}{c}) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Substituindo a condição inicial na solução geral obtida

$$x_0 = x(0) = \frac{c\,\lambda\, e^0}{1 + \lambda\, e^{\alpha\, 0}} = \frac{c\,\lambda}{1+\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{x_0}{c - x_0}$$

Logo a solução deste problema de valor inicial é

$$x(t) = \frac{c\, \frac{x_0}{c - x_0}\, e^{\alpha\, t}}{1 + \frac{x_0}{c-x_0}\, e^{\alpha\, t}} = \frac{c\, x_0\, e^{\alpha\, t}}{c - x_0 + x_0\, e^{\alpha\, t}}$$

Sistema Predador-Presa

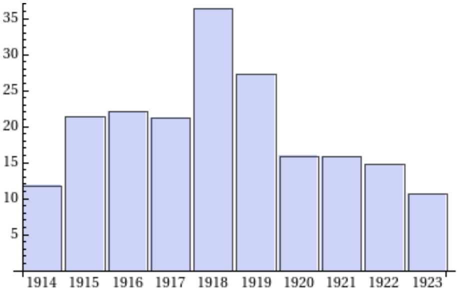
O sistema **predador-presa**, proposto independentemente pelo matemático americano Alfred Lotka(1880-1949) em 1925, e pelo matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) em 1926, é o seguinte sistema de duas equações diferenciais

$$\begin{cases} x' &= x\,(a - b\,y) \\ y' &= y\,(-c + d\,x) \end{cases}$$

Ele modela a dinâmica de duas populações, uma de predadores e outra de presas interagindo entre si.

O Problema de Umberto D'Ancona

Dados do Porto de Fiume-Itália (1914-1923)



Percentagens de seláceos (tubarões, raias, cações, etc) do total pescado.

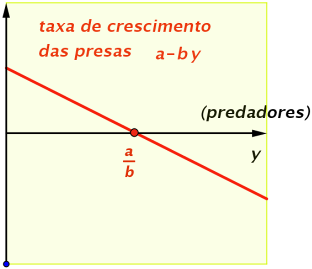
O Problema de Umberto D'Ancona

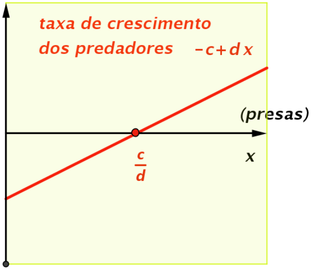
Como se explica este aumento na percentagem de seláceos pescados neste período?

Ele está obviamente relacionado com a diminuição da actividade pesqueira durante a Primeira grande guerra.

Modelo Predador-Presa de Volterra

- A taxa de crescimento relativa das presas é positiva na ausência de predadores e decresce linearmente em função do número de predadores.
- A taxa de crescimento relativa dos predadores é negativa na ausência de presas e cresce linearmente em função do número de presas.





Modelo Predador-Presa de Volterra

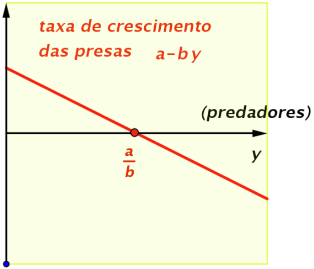
$$\begin{cases} \frac{x'}{x} & = & a - b\,y \\ \\ \frac{y'}{y} & = & -c + d\,x \end{cases}$$

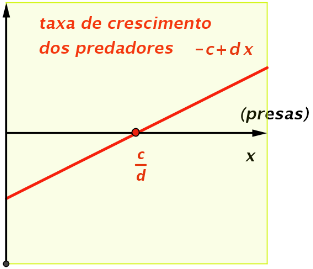
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x' & = & x\,(a - b\,y) \\ y' & = & y\,(-c + d\,x) \end{cases}$$

Equilíbrio

As funções constantes $x(t) = c/d$ e $y(t) = a/b$ satisfazem as equações de Volterra. Diz-se que $P = (c/d, a/b)$ é um **ponto de equilíbrio do sistema** .





Lei de Conservação

Volterra mostrou que a seguinte quantidade

$$Q(x,y) = d\,x - c\,\log x \,+\, b\,y - a\,\log y\ ,$$

é preservada ao longo das trajectórias do sistema.

Proposição
Se $x(t)$ e $y(t)$ satisfazem as equações do modelo predador-presa então a função $t \mapsto Q(x(t), y(t))$ é constante.

Lei de Conservação

Derivando

$$Q(x(t), y(t)) = d\,x(t) - c\,\log x(t) + b\,y(t) - a\,\log y(t)$$

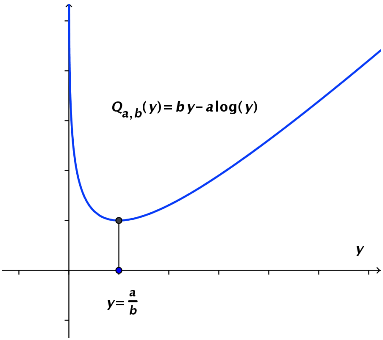
obtemos

$$\begin{aligned}
& d\,x' - c\,\frac{x'}{x} + b\,y' - a\,\frac{y'}{y} = \\
& d\,x\,(a - b\,y) - c\,(a - b\,y) + b\,y\,(-c + d\,x) - a\,(-c + d\,x) = \\
& (-c + d\,x)\,(a - b\,y) - (a - b\,y)\,(-c + d\,x) = 0
\end{aligned}$$

Decomposição da função $Q(x, y)$

$$Q(x,y) = Q_{c,d}(x) + Q_{a,b}(y) \ ,$$

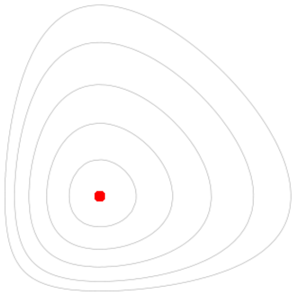
onde



tem o seu único mínimo em $y = \frac{a}{b}$

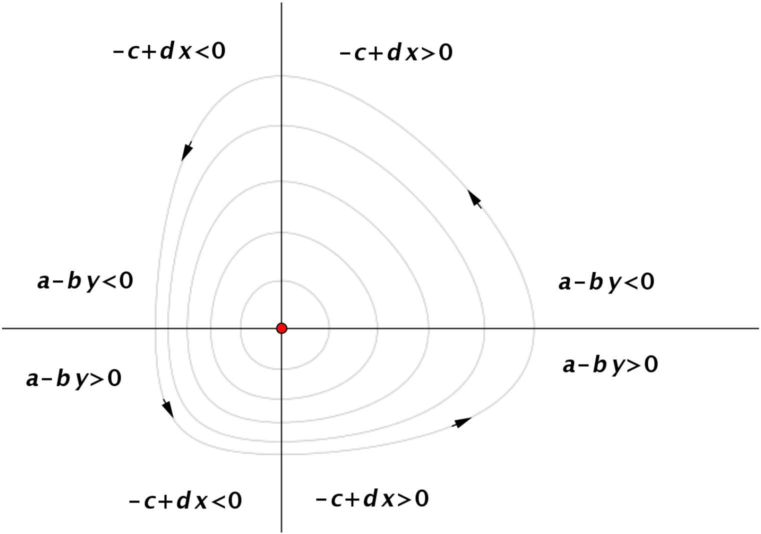
As Curvas de nível de $Q(x, y)$

O ponto de equilíbrio $P = (c/d, a/b)$ é um mínimo absoluto da função $Q(x, y)$.



Todas as trajectórias do sistema predador-presa estão contidas nas curvas de nível $\quad Q(x, y) = c$.

Análise Qualitativa



Proposição

Todas as trajectórias do sistema predador-presa são periódicas.

As soluções $x(t)$, $y(t)$ *do sistema predador-presa são funções periódicas com o mesmo período* T.

O Valor médio duma função

Chama-se valor médio duma função $f(x)$ num intervalo $[a, b]$ ao integral

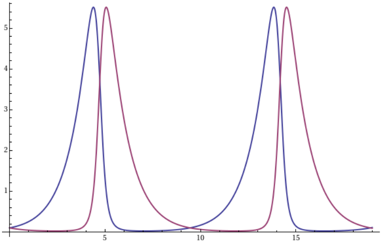
$$\begin{aligned}\mathcal{M}(f; a, b) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{b-a} \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \frac{(b-a)}{n} \\ &\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}\end{aligned}$$

onde $x_i = a + \frac{i+1/2}{n}(b-a)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ são n pontos igualmente espaçados entre a e b.

Proposição

Os valores médios ao longo do período T das soluções $x(t)$ e $y(t)$ do sistema predador-presa são

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(s)\,ds = \frac{c}{d} \quad e \quad \frac{1}{T}\int_0^T y(s)\,ds = \frac{a}{b}$$



Justificação

$$0 = \frac{\log x(T) - \log x(0)}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{x'(s)}{x(s)}\, ds$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T (a - b\, y(s))\, ds = a - b\, \frac{1}{T} \int_0^T y(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{T} \int_0^T y(s)\, ds = \frac{a}{b}$$

$$0 = \frac{\log y(T) - \log y(0)}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{y'(s)}{y(s)}\, ds$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T (-c + d\, x(s))\, ds = -c + d\, \frac{1}{T} \int_0^T x(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{T} \int_0^T x(s)\, ds = \frac{c}{d}$$

A Solução de Volterra

A pesca faz diminuir indiscriminadamente as taxas de crescimento das duas populações: predadores e presas.

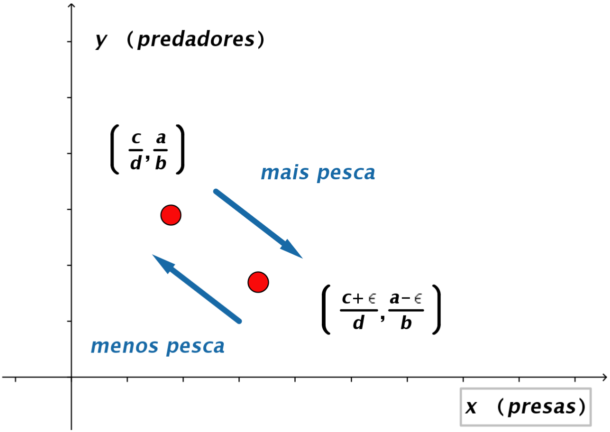
$$\begin{cases} x'/x &= a - b\,y - \epsilon \\ y'/y &= -c + d\,x - \epsilon \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x'/x &= (a - \epsilon) - b\,y \\ y'/y &= -(c + \epsilon) + d\,x \end{cases}$$

Os valores médios das populações de presas e predadores passam de $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$, na ausência de pesca, para o novo equilíbrio $\left(\frac{c+\epsilon}{d}, \frac{a-\epsilon}{b}\right)$, sob o efeito da pesca. Logo, uma consequência da actividade piscatória é um aumento em termos absolutos dos valores médios das populações de presas e uma correspondente diminuição dos valores médios das populações de predadores.

Alteração dos equilíbrios sob efeito da pesca



Referência Bibliográfica

Martin Braun, *Differential Equations and their Applications*, Springer-Verlag, NY, 1998.