Partições de Markov no toro $\mathbb{T}^2$

Seja $A \in \mathrm{SL}_2'(\mathbb{Z})$ uma matriz hiperbólica e $\bar{A} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ o automorfismo do toro por ela induzida. A matriz A tem dois valores próprios reais λ^s, λ^u tais que $|\lambda^s| < 1 < |\lambda^u|$. Designaremos por E^s e E^u os correspondentes espaços próprios. Estas duas direcções determinam duas folheações $\mathcal{F}^s$ e $\mathcal{F}^u$ do toro $\mathbb{T}^2$ cujas folhas são as linhas densas $\mathcal{F}^s(\bar{x}) = \pi(x + E^s) = W^s(\bar{x})$ e $\mathcal{F}^u(\bar{x}) = \pi(x + E^u) = W^u(\bar{x})$. Vamos chamar *rectângulo* de $\bar{A}$ a qualquer rectângulo em $\mathbb{T}^2$ cujos lados sejam segmentos de folhas das duas folheações $\mathcal{F}^s$ e $\mathcal{F}^u$. Dado um rectângulo $R \subset \mathbb{T}^2$ de $\bar{A}$ definimos $W^s(\bar{x}, R)$ como sendo a componente conexa de $R \cap W^s(\bar{x})$ que contem o ponto $\bar{x}$. Analogamente definimos $W^u(\bar{x}, R)$ como a componente conexa de $R \cap W^u(\bar{x})$ que contem $\bar{x}$.

Chama-se partição de Markov do automorfismo $\bar{A} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ a uma colecção $\{R_0, R_1, \ldots, R_d\}$ de subconjuntos de $\mathbb{T}^2$ tal que

(1) Cada R_j é um rectângulo de $\bar{A}$,

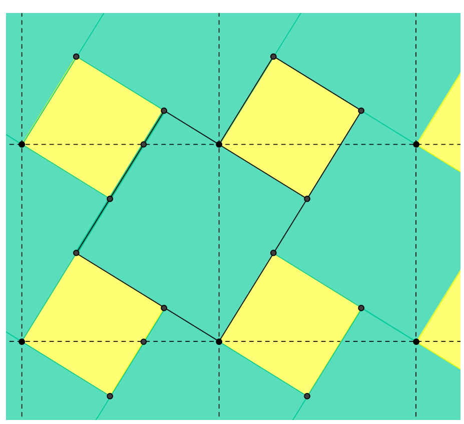
(2) $\mathbb{T}^2 = \cup_{j=1}^d R_j$,

(3) $R_i \cap R_i \subset \partial R_i \cap \partial R_j$ sempre que $i \neq j$,

(4) se $\bar{x} \in R_i$ e $\bar{A}(\bar{x}) \in \mathrm{int}(R_j)$ então $\bar{A}(W^s(\bar{x}, R_i)) \subset W^s(\bar{A}(\bar{x}), R_j)$,

(5) se $\bar{x} \in R_i$ e $\bar{A}^{-1}(\bar{x}) \in \mathrm{int}(R_j)$ então $\bar{A}^{-1}(W^u(\bar{x}, R_i)) \subset W^u(\bar{A}^{-1}(\bar{x}), R_j)$.

Todo o automorfismo hiperbólico do toro $\mathbb{T}^2$ admite uma partição de Markov[1].



[1] O mesmo resultado vale para os automorfismos hiperbólicos do toro $\mathbb{T}^d$ em qualquer dimensão $d \geq 2$ para um conceito apropriado de rectângulo.

A figura acima ilustra uma partição de Markov do automorfismo definido pela matriz hiperbólica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2'(\mathbb{Z})$$

formada por dois rectângulos (quadrados) de $\bar{A}$. Os lados dos quadrados são pedaços das linhas estáveis e instáveis do ponto fixo, i.e., de $W^s(\bar{0})$ e $W^u(\bar{0})$. Pelas identificações de $\mathbb{T}^2$ os oito cantos dos dois quadrados reduzem-se a quatro pontos, o ponto fixo $\bar{0}$ e mais três pontos homoclínicos em $W^s(\bar{0}) \cap W^u(\bar{0})$. As figuras seguintes ilustram as propriedades (4) e (5) da definição de partição de Markov.

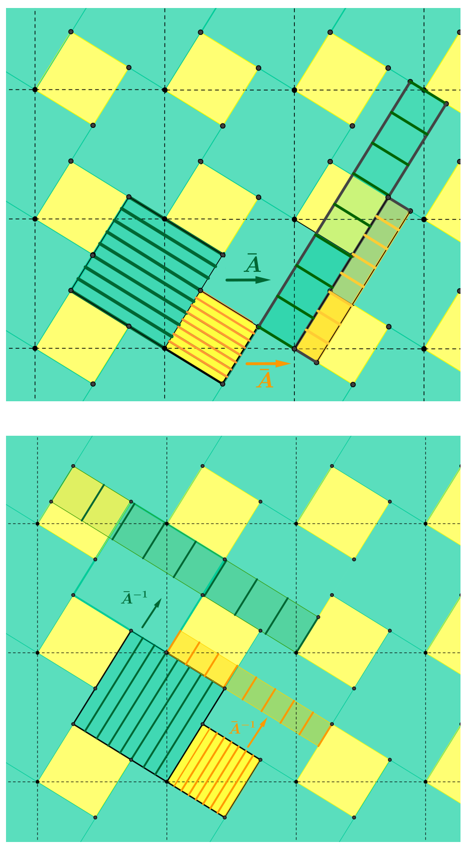
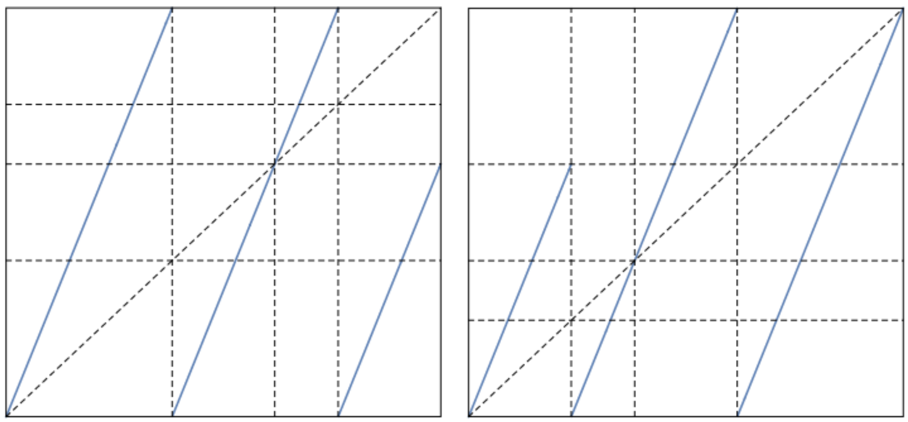


Figure 1: Acção do automorfismo na partição em conjuntos estáveis e instáveis.

Fixada a partição de Markov $\{R_0, R_1\}$ de $\mathbb{T}^2$, a partição de $\mathbb{T}^2$ em conjuntos estáveis locais, $W^s(\bar{x}, R_j)$ com $j = 0, 1$, determina um quociente X^s que podemos identificar com o intervalo $X^s = [0, 1]$. O mapa $\bar{A} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ induz uma acção neste quociente $f^s : X^s \to X^s$. Analogamente, a partição de $\mathbb{T}^2$ em conjuntos instáveis locais, $W^u(\bar{x}, R_j)$ com $j = 0, 1$, determina um quociente X^u que se identifica com o intervalo $X^u = [0, 1]$, e o mapa $\bar{A} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ induz uma acção $f^u : X^u \to X^u$. As figuras seguintes mostram os gráficos dos mapas $f^s : [0,1] \to [0,1]$ e $f^u : [0,1] \to [0,1]$ para identificações apropriadas $X^s \equiv [0,1]$ e $X^u \equiv [0,1]$.



Estes dois mapas têm derivadas constantes iguais a $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.